γινομένων γαρ πάντων κατά τον λόγον

Διδασκαλία και Απόδειξη στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου.

27 Μαρτίου 2013

Ν.Σ. Μαυρογιάννης (MSc, PhD),
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο
Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

1 Εισαγωγή. Το ειδικό βάρος της απόδειξης στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου.

Στην παρούσα εισήγηση πρόθεση μου είναι:

- Να επιχειρηματολογήσω υπέρ ενός διακριτού ρόλου που πρέπει κατά τη γνώμη μου να έχει η απόδειξη (εξ' ης και το παράθεμα του Ηράκλειτου) στην διδασκαλία των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ' Τάξης.

- Να καταθέσω μερικές προτάσεις που η εφαρμογή τους μπορεί, πάλι κατά την γνώμη μου, να αποδώσει στην απόδειξη τον παραπάνω ρόλο.

Τα προτεινόμενα τα εφαρμόζω κατά την διδασκαλία του μαθήματος τα τελευταία 12 χρόνια. Δεν πρόκειται φυσικά για πλήρη περιγραφή της ετήσιας πορείας διδασκαλίας του μαθήματος στην Γ΄ τάξη[1] πολύ περισσότερο δε δεν αποτελούν μία συνολική πρόταση για την ανάδειξη της απόδειξης σε όλο το Λύκειο[2].
Όσοι κάνουμε μάθημα στην Γ΄ Τάξη ασφαλώς πρέπει να στηριχθούμε:

- Στο επίσημο αναλυτικό πρόγραμμα όπως αυτό εξειδικεύεται από το σχολικό βιβλίο και τις οδηγίες διδασκαλίας.

Συγχρόνως όμως η πραγματικότητα επιβάλλει να δούμε και:

- Το ανεπίσημο αναλυτικό πρόγραμμα που επιβάλλουν οι Πανελλήνιες εξετάσεις όπως «εξειδικεύεται» από τα θέματα των εξετάσεων αυτών.

Που σημαίνει ότι ο σχεδιασμός της διδασκαλίας πρέπει να λαμβάνει σοβαρότατα υπ' όψιν τις άμεσες ανάγκες μεγάλου μέρους των μαθητών για τις εξετάσεις που θα αντιμετωπίσουν. Είναι δουλειά του σχολείου να βοηθήσει τους μαθητές του δίνοντας τα κατάλληλα εφόδια και δεν είναι κάτι που μπορεί να ανατεθεί αλλού. Το αν οι μαθητές δεχθούν και εξωσχολική βοήθεια είναι μία άλλη ιστορία αλλά αυτήν τη βοήθεια δεν πρέπει με κανένα τρόπο το σχολείο να την θεωρεί δεδομένη.
Επομένως ο τελικός σχεδιασμός και η υλοποίηση της διδασκαλίας μας πρέπει να ισορροπεί μεταξύ άλλων[3] ανάμεσα στο επίσημο και στο ανεπίσημο πρόγραμμα. Κανένα από τα δύο δε μπορεί να αγνοηθεί.

Υπάρχει κατ' αρχήν ένας βασικός λόγος που από μόνος του θα ήταν αρκετός για να εμμείνουμε στην ανάδειξη της απόδειξης στην διδασκαλία. Και να αξιώσουμε να αποτελέσει βασική πνευματική προπαίδεια των μαθητών μας που θα είναι μέρος των μορφωμένων ανθρώπων της αυριανής κοινωνίας. Και ο λόγος είναι πολιτισμικός:

- Η μεγάλη πολιτισμική παράδοση των Μαθηματικών σύμφωνα με την οποία η Τέχνη των Μαθηματικών είναι ταυτόσημη με την απόδειξη[4]

Ωστόσο υπάρχει και ένας επιπλέον λόγος, ίσως όχι πιο ισχυρός, αλλά με πιο άμεση «απόδοση». *Αποδείξεις πρέπει να γίνονται γιατί και οι εξετάσεις το ζητούν.* Βάζοντας δίπλα-δίπλα τις οδηγίες διδασκαλίας (επίσημο πρόγραμμα) και τα θέματα των εξετάσεων (αφανές πρόγραμμα) θα δούμε ότι ενώ οι πρώτες απαιτούν σε αίσχιστο βαθμό λιγότερες αποδείξεις τα δεύτερα απαιτούν μια σημαντική εξοικείωση με την αποδεικτική διαδικασία. Οι εξετάσεις ζητούν ένα είδος μαθηματικής ωριμότητας που τα επίσημα προγράμματα όχι μόνο δεν ενθαρρύνουν, αλλά απ' εναντίας αποτρέπουν την καλλιέργεια της[5]. Ας δούμε τρία παραδείγματα Οι μαθητές έπρεπε:

Παράδειγμα 1. Το 2009 να αποδείξουν ότι

$$x + \sqrt{x^2 + 9} > 0$$

Παράδειγμα 2. Το 2003 να συγκρίνουν τους αριθμούς

$$\frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5}, \quad \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8}$$

Παράδειγμα 3. Το 2004 να αποδείξουν ότι

$$\left.\begin{array}{l} \alpha > 0 \\ \alpha > \beta \\ \alpha^2 - \beta^2 = -\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta < 0$$

Παράδειγμα 4. Το 2001 να αποδείξουν ότι

$$\left.\begin{array}{l} g(x)\left(3(f(x))^2+2\beta f(x)+\gamma\right)=x^2-4x+\beta \\ \beta^2<3\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)>0$$

Τα παραπάνω παραδείγματα αφορούν στην ουσία τους ύλη προηγουμένων τάξεων. Και το ερώτημα είναι εύλογο. Όπως είναι έτσι διαρθρωμένη η ύλη Άλγεβρας των Α΄, Β΄ Λυκείου και όπως γίνεται η διδασκαλία ετοιμάζονται επαρκώς οι μαθητές μας για να αντιμετωπίσουν τέτοια ζητήματα;

Αλλά και σε ότι αφορά την καθαυτό ύλη της Γ΄ Τάξης οι εξετάσεις είναι απαιτητικές σε ζητήματα αποδεικτικής ικανότητας. Ας δούμε δύο πολύ χαρακτηριστικά παραδείγματα απαιτητικών από άποψη απόδειξης θεμάτων

Παράδειγμα 5. Το 4ο θέμα του 2006
Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln x$$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.
2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού τους.
3. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $\mathrm{A}(\alpha,\ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $\mathrm{B}(\beta,\mathrm{e}^\beta)$ με $\beta\in\mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$
4. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτομένες.

Το ερώτημα 4. αυτού του θέματος παρουσιάζει σημαντική δυσκολία τεκμηρίωσης. Όποιος έχει μπει στον κόπο να γράψει σε ένα χαρτί μία λύση καταλαβαίνει τι εννοώ.

Παράδειγμα 6. Το 4ο θέμα του 2007
Έστω f μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $f(0)>0$. Δίνεται επίσης συνάρτηση g συνεχής στο διάστημα $[0,1]$ για την οποία ισχύει $g(x)>0$ για κάθε $x\in[0,1]$. Ορίζουμε τις συναρτήσεις:

$$F(x)=\int_0^x f(t)\,g(t)\,dt,\qquad x\in[0,1]$$

$$G(x)=\int_0^x g(t)\,dt,\qquad x\in[0,1]$$

1. Να δειχθεί ότι $F(x) > 0$ για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
2. Να αποδειχθεί ότι:
$$f(x) \cdot G(x) > F(x)$$
για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
3. Να αποδειχθεί ότι ισχύει:
$$\frac{F(x)}{G(x)} \leq \frac{F(1)}{G(1)}$$
για κάθε x στο διάστημα $(0,1]$.
4. Να βρεθεί το όριο:
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\left(\int_0^x f(t)\, g(t)\, dt\right) \cdot \left(\int_0^{x^2} \eta\mu^2 t dt\right)}{\left(\int_0^x g(t)\, dt\right) \cdot x^5}$$

Εδώ η αποδεικτική δυσκολία εντοπίζεται κυρίως στο 2. Η εξοικείωση με την αποδεικτική διαδικασία δεν περιλαμβάνει φυσικά μόνο την διαμόρφωση της ίδιας της απόδειξης αλλά και

- την κατανόηση των θεωρημάτων όχι μόνο ως προς το τι λένε αλλά και ως προς το τι δεν λένε
- την δυνατότητα κατανόησης των υποθέσεων μίας άσκησης δηλαδή τι περιλαμβάνεται στις υποθέσεις της και τι όχι

Στα θέματα των εξετάσεων συχνά εμφανίζεται το φαινόμενο κάποια θέματα να είναι «φειδωλά» σε υποθέσεις με αποτέλεσμα να μη μπορεί να εφαρμοσθεί κάποιο οικείο θεωρητικό εργαλείο όπως λ.χ. συνέβαινε με το 4ο θέμα του 2008:

Παράδειγμα 7. Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο $\mathbb{R}$ για την οποία ισχύει
$$f(x) = \left(10x^3 + 3x\right) \int_0^2 f(t)\, dt - 45$$
1. Να αποδείξετε ότι
$$f(x) = 20x^3 + 6x - 45$$
2. Δίνεται επίσης μια συνάρτηση g δύο φορές παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$. Να αποδείξετε ότι
$$g''(x) = \lim_{h \to 0} \frac{g'(x) - g'(x-h)}{h}$$

3. Αν για τη συνάρτηση f του ερωτήματος (1) και τη συνάρτηση g του ερωτήματος (2) ισχύει ότι

$$\lim_{h\to 0}\frac{g(x+h)-2g(x)+g(x-h)}{h^2}=f(x)+45$$

και $g(0)=g'(0)=1$, τότε

(α΄) να αποδείξετε ότι $g(x)=x^5+x^3+x+1$

(β΄) να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι 1-1

Εδώ πέρα από το τρύκ του ερωτήματος 1, δυσκολία παρουσιάζουν τα 2. 3. διότι στο 2. χρειάζεται ο ορισμός και οι κανόνες De l' Hospital δεν δουλεύουν ενώ στο 3. χρειάζονται οι κανόνες De l' Hospital και ο ορισμός δεν δουλεύει. Ένα παράδειγμα όπου η απαιτούμενη από τα θέματα θεωρητική κατάρτιση υπερβαίνει κατά πολύ την επίσημη ύλη και το σχολικό βιβλίο είναι εκείνο του 2000:

Παράδειγμα 8. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος* δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

1. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f' είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

2. Αν η f είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

3. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f' είναι συνεχής στο x_0.

Όπου στο 3. το τυπικό αντιπαράδειγμα[6]

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\frac{1}{x} & x\neq 0\\ 0 & x=0\end{cases}$$

Ανάλογη δυσκολία παρουσιάζεται και με τους ορισμούς. Όταν δεν υπάρχει μια ανάπτυξη μέσω αποδείξεων όλες οι ισοδύναμες συνθήκες φαίνονται στους μαθητές ισότιμες και η διαφορά τους είναι στην ετικέτα: Χαρακτηριστικό παράδειγμα ο ορισμός της ασυμπτώτου που ζητήθηκε δύο φορές (2005, 2011). Ο μόνος λόγος για να ξεχωρίσει ένας μαθητής τον ορισμό της σελίδας 280 από το θεώρημα είναι *ότι το ένα ονομάζεται ορισμός και το άλλο θεώρημα*. Τέλος δεν λείπουν οι περιπτώσεις όπου ναι μεν κάποια τεχνική η θεώρημα τίθεται εκτός εξεταστέας ύλης από το επίσημο πρόγραμμα αλλά εμμέσως τίθεται εντός από το ανεπίσημο (ασκήσεις όπου χρειάζεται να λυθεί μία διαφορική εξίσωση ή εφαρμόζεται το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού κ.α.)

Με τον ένα ή τον άλλο τρόπο οι πανελλήνιες εξετάσεις υπαγορεύουν την ανάγκη για μια επιπλέον θεωρητική κατάρτιση των μαθητών. Κατάρτιση από ένα corpus θεωρίας που δεν θα είναι ένα σύνολο κανόνων αλλά μία οργανική ενότητα. Και το οποίο *πρέπει να δομηθεί* αφού δυστυχώς δεν το προσφέρει το σχολικό βιβλίο το οποίο μάλλον περιέχει πληροφορίες και όχι μία διαρθρωμένη θεωρητική προσέγγιση. Το ζητούμενο εν προκειμένω δεν είναι λιγότερη (= «συνοπτική») θεωρία (κάτι που φαίνεται να προτιμούν διάφορα βοηθήματα ή βοηθητικές σημειώσεις) *αλλά η πληρέστερη ανάπτυξη της*.

Βασική θέση του παρόντος κειμένου είναι πως *είναι εφικτό (με την έννοια ότι έχει πραγματοποιηθεί) να έχουμε μία ανάπτυξη της ύλης της Ανάλυσης που η λογική συνοχή της να αγγίζει εκείνη της (συνθετικής) Γεωμετρίας όπως την διδάσκουμε στην Α΄ και Β΄ Λυκείου*. Και όπως όταν διδάσκουμε Γεωμετρία στα παιδιά δεν έχουμε την αξίωση να πετύχουμε μία απόλυτα αυστηρή θεωρητική έκθεση (όπως λ.χ. γίνεται στα *Θεμέλια της Γεωμετρίας*[7] του Hilbert) έτσι και όταν διδάσκουμε στοιχειώδη Ανάλυση δεν αναμένουμε να εξασφαλίσουμε ακαδημαϊκά επίπεδα αυστηρότητας λ.χ. κατά το πρότυπο του Landau[8]. Φυσικά θα υπάρχουν αναπόδεικτα στοιχεία όπως και έννοιες χωρίς ορισμό αλλά πρέπει να γίνει μία *μετατόπιση* του κέντρου βάρους ώστε το κυρίαρχο στοιχείο να είναι όχι το «αποδεικνύεται» αλλά το «θα αποδείξουμε».
Θα ήθελα να επισημάνω ότι το εγχείρημα αυτό διευκολύνεται από δύο επιλογές που γίνονται στο σχολικό βιβλίο:

1. Η επιλογή να μελετώνται συναρτήσεις σε πεδία ορισμού που είναι σχετικά απλά: Διαστήματα ή ενώσεις διαστημάτων. Έτσι είναι σχετικά εύκολο να διδαχθεί έννοια:
   Η συνάρτηση f έχει «κοντά» σε ένα $\sigma \in \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ την ιδιότητα I

2. Το ότι το «σύμπαν» των σχολικών συναρτήσεων είναι σχετικά περιορισμένο. Αρκετές «δύσκολες» συναρτήσεις όπως λ.χ. η συνάρτηση του ακεραίου μέρους $f(x) = [x]$ έχουν μείνει έξω.

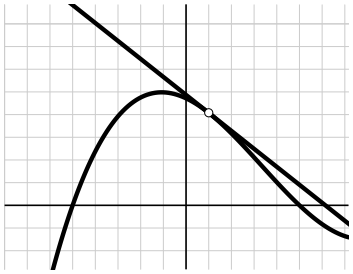
Βέβαια πρέπει να έχουμε πάντα κατά νου ότι μιλάμε για διδασκαλία Μαθηματικών σε νέους 17-18 ετών και ότι όπως και η διδασκαλία των Μαθηματικών σε μικρότερε ηλικίες δεν ήταν «οριστική» (με την έννοια ότι κάποια πράγματα τα γνώρισαν άπαξ και αυτό ήταν άπαξ δια παντός) έτσι και η διδασκαλία Μαθηματικών στην Γ΄ τάξη ενδέχεται να έχει και συνέχεια. Και κάποια πράγματα θα ειδωθούν με μια νέα ματιά[9].
Στις επόμενες παραγράφους παρουσιάζονται μερικές από τις δυνατότητες που έχουμε να κάνουμε αποδείξεις στο μάθημα μας. Για *λόγους οικονομίας η αναφορά είναι ενδεικτική και όχι εξαντλητική* και δεν αναφέρω άλλες ενδιαφέρουσες δυνατότητες (όπως λ.χ. τις αποδείξεις προτάσεων που μπορούμε να δώσουμε στην ενότητα της μονοτονίας και της κυρτότητας, ή στην ενότητα

συνέχειας σε διάστημα). Οι περισσότερες αποδείξεις είναι ενδιαφέρουσες και προσφέρουν σε κατανόηση ή εν πάση περιπτώσει πιο ενδιαφέρουσες και πιο διαφωτιστικές από πολλές ανούσιες ασκήσεις που είναι σε χρήση.

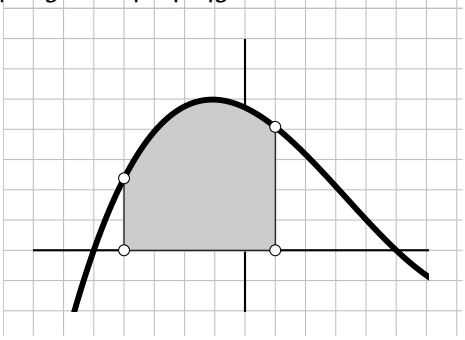
2 Η αφετηρία: Δύο βασικά προβλήματα.

Είναι σημαντικό η πορεία της διδασκαλίας και της μάθησης να έχει κάποιους *ορατούς βασικούς στόχους*. Αν συμβαίνει αυτό η όλη προσπάθεια αποκτά νόημα. Ξέρουμε που θέλουμε να πάμε και ξεφεύγουμε από την περιπτωσιολογία των ασκήσεων που λειτουργεί παρελκυστικά. Στόχος των Μαθηματικών είναι να λύνουν σημαντικά προβλήματα και όχι να αντιμετωπίζουν «μορφές ασκήσεων» που λίγο-πολύ είναι κατασκευασμένες επί τούτου. Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ τάξη μπορεί να εστιασθεί στην λύση δύο προβλημάτων. Πρόκειται για δύο προβλήματα που ιστορικά διαδραμάτισαν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της Ανάλυσης[10]:

ΠΡΟΒΛΗΜΑ 1. Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης σε ένα σημείο της[11].



ΠΡΟΒΛΗΜΑ 2. Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης πάνω από ένα διάστημα.

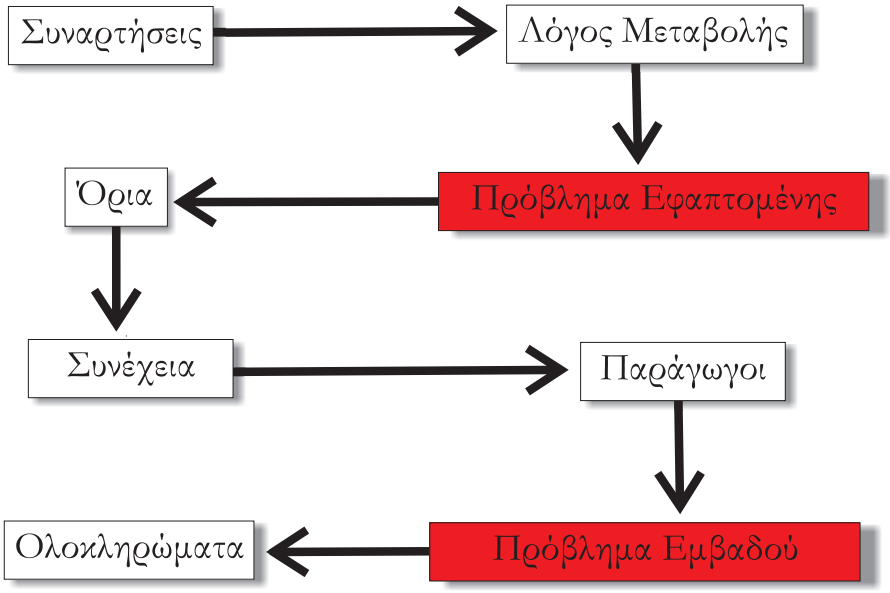


Επιπλέον τα προβλήματα αυτά:

- Είναι αρκούντως κατανοητά[12] στην διατύπωση τους από τους μαθητές οι οποίοι έχουν εμπειρία ενασχόλησης με ειδικές περιπτώσεις τους.

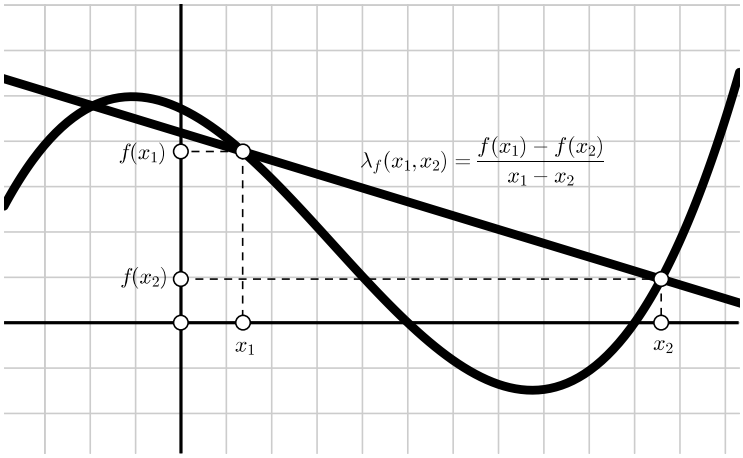
- Καθιστούν γρήγορα αντιληπτό ότι τα υπάρχοντα μαθηματικά εργαλεία δεν επαρκούν για την επίλυση τους και ότι χρειάζεται να αναπτυχθούν νέα
- Είναι (μάλλον) ενδιαφέροντα.

Τα δύο αυτά προβλήματα μας επιτρέπουν να έχουμε ένα «σκελετό» της ιστορίας μας στον οποίο θα τοποθετηθούν τα επιμέρους «συμβάντα» και φυσικά μιας και αυτό είναι το ζητούμενο μας οι αποδείξεις.

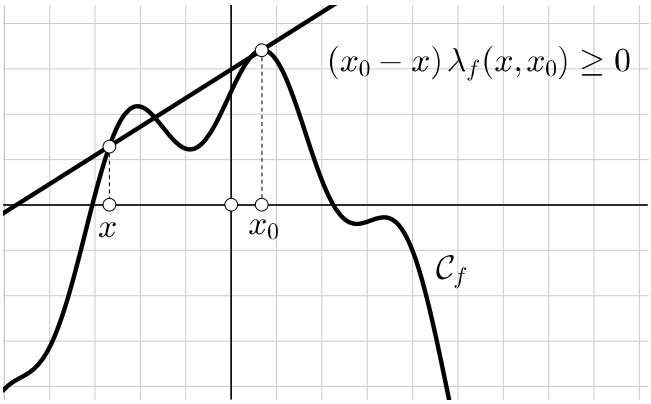


3 Ο λόγος μεταβολής: Μια ενοποιός έννοια.

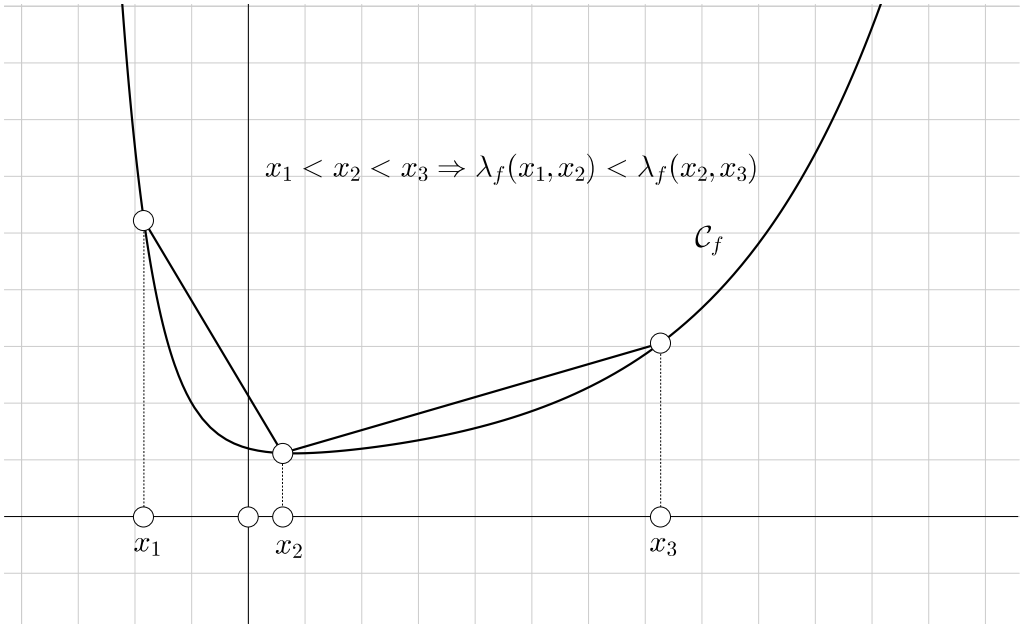
Ο λόγος μεταβολής οποίος συνδέει αλγεβρικές και γεωμετρικές ιδιότητες συναρτήσεων μπορεί να διαδραματίσει σημαντικό ενοποιητικό ρόλο.



Δυστυχώς η χρήση του έχει παραμερισθεί[13]. Μπορεί να περιγράψει τη μονοτονία:
$\lambda_f(x_1,x_2) > 0 \Leftrightarrow f \uparrow\!\!\uparrow$
$\lambda_f(x_1,x_2) \geq 0 \Leftrightarrow f \uparrow$
$\lambda_f(x_1,x_2) < 0 \Leftrightarrow f \downarrow\!\!\downarrow$
$\lambda_f(x_1,x_2) \leq 0 \Leftrightarrow f \downarrow$
$\lambda_f(x_1,x_2) \neq 0 \Leftrightarrow f$ 1 – 1
$\lambda_f(x_1,x_2) = 0 \Leftrightarrow f$ σταθερή
τα ακρότατα:



την κυρτότητα



και έχει αλγεβρικές ιδιότητες ανάλογες της παραγώγου στην οποία αποτελεί μία εξαιρετική «διακριτή» εισαγωγή:

$$\lambda_{cf}(x_1, x_2) = c\lambda_f(x_1, x_2)$$

$$\lambda_{f\pm g,}(x_1, x_2) = \lambda_f(x_1, x_2) \pm \lambda_g(x_1, x_2)$$

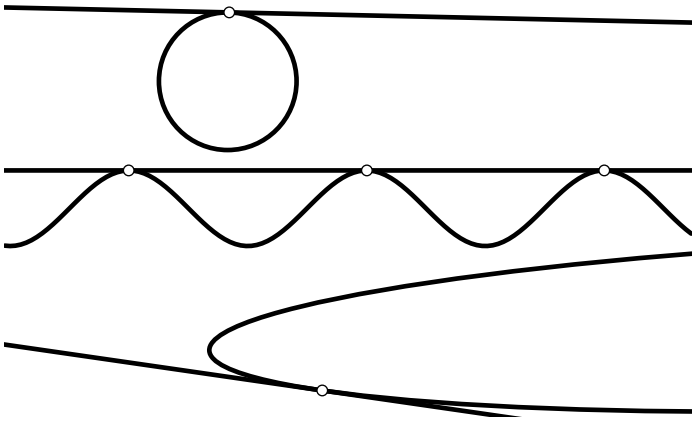
$$\lambda_{fg,}(x_1, x_2) = \lambda_f(x_1, x_2)\, g(x_1) + \lambda_g(x_1, x_2)\, f(x_2)$$

$$\lambda_{\frac{1}{g}}(x_1, x_2) = -\frac{1}{g(x_1)\, g(x_2)}\lambda_g(x_1, x_2)$$

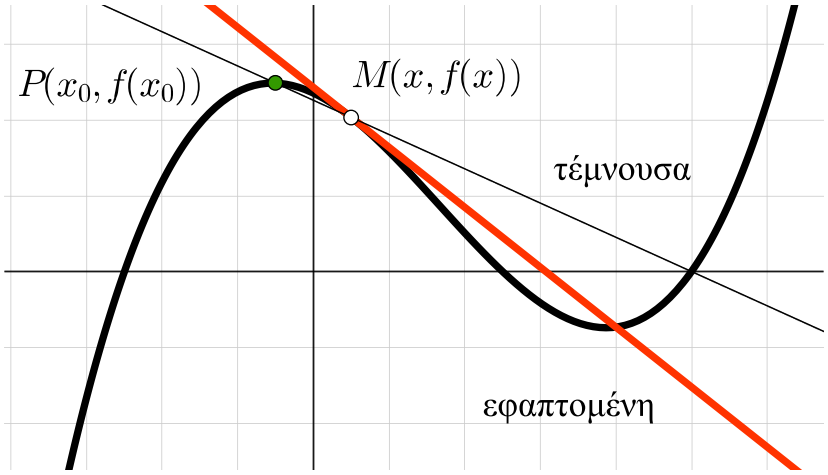
$$\lambda_{g\circ f}(x_1, x_2) = \lambda_g(f(x_1), f(x_2))\, \lambda_f(x_1, x_2)$$

4 Το όριο ως απάντηση στο πρώτο πρόβλημα.

Η εισαγωγή στην έννοια του ορίου μπορεί να γίνει μέσω του προβλήματος της εφαπτομένης όπου με κατάλληλα παραδείγματα οι μαθητές μπορούν να πεισθούν ότι ο «στατικός» ορισμός της εφαπτομένης ως ευθείας που τέμνει την καμπύλη σε ένα μόνο σημείο δεν επαρκεί:



και επομένως πρέπει να αντικατασταθεί[14] από τον «δυναμικό» ορισμό[15]: Η εφαπτομένη σε μία θέση είναι η οριακή «θέση» μίας τέμνουσας.



Και ακριβώς στο σημείο αυτό μπορεί[16] να εισαχθεί η έννοια του ορίου:

όταν $\boxed{M \to P}$ τότε $\boxed{\text{τέμνουσα} \to \text{εφαπτομένη}}$

όταν $\boxed{x \to x_0}$ τότε $\boxed{\text{τέμνουσα} \to \text{εφαπτομένη}}$

όταν $\boxed{x \to x_0}$ τότε $\boxed{\text{συντ. διευθ. τέμνουσας} \to \text{συντ. διευθ. εφαπτομένης}}$

όταν $\boxed{x \to x_0}$ τότε $\boxed{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \lambda_{\text{εφαπτομένης}}}$

Εδώ μπορεί να εισαχθεί και ο συμβολισμός του ορίου:

$$\lambda_{\text{εφαπτομένης}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

Η αρχική εξοικείωση με τα όρια μπορεί να γίνει με υπολογισμό απλών εφαπτομένων:

$$f(x) = x^2, \quad x_0 = 1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{x^2 - 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x_0 = 1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{\frac{1}{x} - 1}{x - 1}$$

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x_0 = 1, \quad \lim_{x \to 1} \frac{\sqrt{x} - 1}{x - 1}$$

Και φθάνοντας στην πιο δύσκολη περίπτωση:

$$f(x) = \eta\mu x, \quad x_0 = 0, \quad \lim_{x \to 0} \frac{\eta\mu x}{x}$$

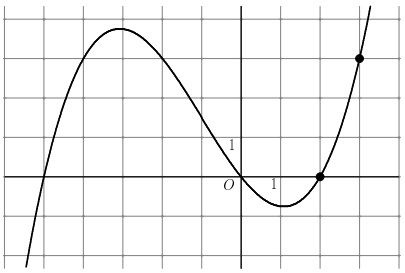
Η τελευταία εφαπτομένη μπορεί να βρεθεί κατά τα γνωστά αφού προηγουμένως αποδειχθεί με την βοήθεια του τριγωνομετρικού κύκλου η ανισότητα

$$\sigma\upsilon\nu x < \frac{\eta\mu x}{x} < \frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}, \quad x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

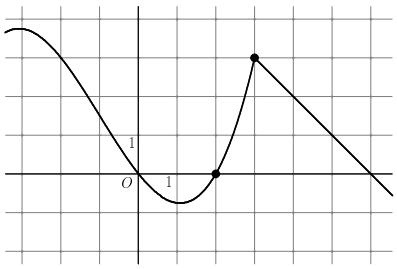
και εφαρμοσθεί ένα επιχείρημα που επιτρέπει στα παιδιά να «μαντέψουν» το κριτήριο της παρεμβολής.
Το πρόβλημα εύρεσης της εφαπτομένης υπαγορεύει την αναγκαιότητα εισαγωγής της έννοιας του ορίου και μάλιστα στην ενδιαφέρουσα περίπτωση όπου έχουμε απροσδιόριστη μορφή και η εύρεση του δεν ανάγεται σε μία απλή αντικατάσταση. Η ανάπτυξη των ορίων μπορεί αρχικά να γίνει μέσω της γραφικής παράστασης χρησιμοποιώντας μία εντελώς περιγραφική γλώσσα με πολλά παραδείγματα. Ενδεικτικά:
Στα επόμενα σχήματα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$f(2) = \ldots \quad \lim_{x\to 2} f(x) = \ldots \quad f(3) = \ldots \quad \lim_{x\to 3} f(x) = \ldots$$

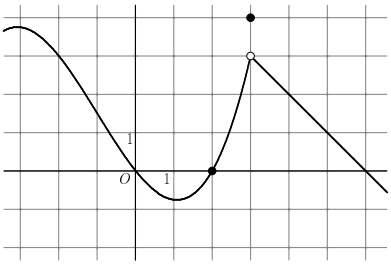
(α′)



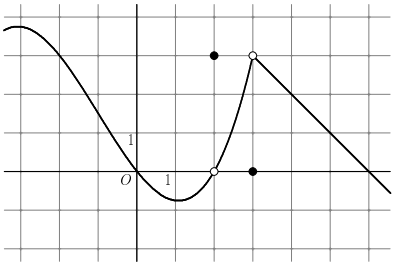
(β′)



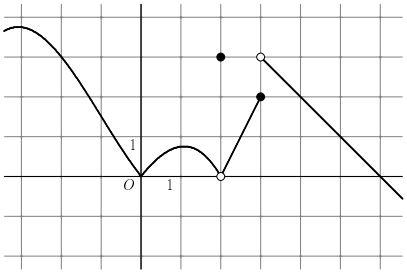
(γ′)



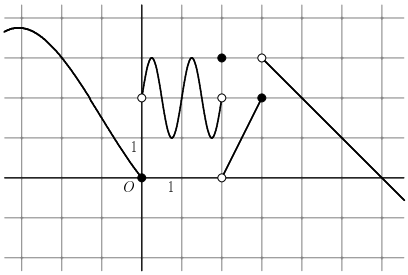
(δ′)



(ε′)



(ς′)



Η ίδια η έννοια του ορίου μπορεί να θεωρηθεί[17] σαν έννοια χωρίς ορισμό (όπως λ.χ. είναι η έννοια του συνόλου, του σημείου, της ευθείας η οποία θα γίνει αντιληπτή μέσω των ιδιοτήτων της. Δεν υπάρχει ιδιαίτερος λόγος να γίνει διάκριση μεταξύ των περιπτώσεων $x \to x_0 \in R$ και $x \to \pm\infty$. Ευθύς

αμέσως μπορούν να εισαχθούν μερικοί απλοί κανόνες εν είδει αξιωμάτων που διευθετούν και μερικές κακοτεχνίες του σχολικού βιβλίου.

Κανόνας 1. Το όριο της $f(x)$ στο σ αν υπάρχει είναι μοναδικό.

Κανόνας 2. Αν η $f(x)$ορίζεται εκατέρωθεν του $x_0 \in R$ το όριο της στο x_0 υπάρχει αν και μόνο αν τα πλευρικά όρια της στο x_0 υπάρχουν και είναι ίσα. Στην περίπτωση αυτή η κοινή «τιμή» τους θα είναι το όριο $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

Κανόνας 3. Αν οι $f(x)$, $g(x)$ συμπίπτουν κοντά στο σ τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$.

Κανόνας 4. Όρια βασικών συναρτήσεων:

1. $\lim\limits_{x\to\sigma} c = c$
2. $\lim\limits_{x\to\sigma} x = \sigma$
3. $\lim\limits_{x\to\sigma} \frac{1}{x} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & , \quad \sigma \in R^* \\ 0 & , \quad \sigma = \pm\infty \\ * & , \quad \sigma = 0 \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, $\lim\limits_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$
4. $\lim\limits_{x\to\sigma} \ln x = \begin{cases} \ln\sigma & \sigma \in (0,+\infty) \\ +\infty & \sigma = +\infty \\ -\infty & \sigma = 0 \end{cases}$
5. $\lim\limits_{x\to\sigma} \eta\mu x = \begin{cases} \eta\mu\sigma & \sigma \in R \\ * & \sigma = \pm\infty \end{cases}$

Κανόνας 5. Πράξεις στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
1. Πρόσθεση

$+$	$-\infty$	$\alpha \in \mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$*$
$\beta \in \mathbb{R}$		$\alpha+\beta$	$+\infty$
$+\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$

2. Πολλαπλασιασμός

$\cdot$		$-\infty$	$\alpha \in \mathbb{R}$			$+\infty$
			$\alpha < 0$	$\alpha = 0$	$\alpha > 0$	
$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$-\infty$
$\beta \in \mathbb{R}$	$\beta < 0$	$+\infty$	$\alpha \cdot \beta$			$-\infty$
	$\beta = 0$	$*$				$*$
	$\beta > 0$	$-\infty$				$+\infty$
$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$

2. Αντιστροφή

$$\frac{1}{\sigma} = \begin{cases} \frac{1}{\sigma} & \sigma \in R^* \\ 0 & \sigma = \pm\infty \\ * & \sigma = 0 \end{cases}$$

Κανόνας 6. Σύνδεση ορίων με τις πράξεις

1. *Πρόσθεση, Αφαίρεση, Πολλαπλασιασμός, Διαίρεση.* Αν $\square$ είναι οποιαδήποτε από τις πράξεις $+, -, \cdot, :$ τότε ισχύει

$$\lim_{x\to\sigma} (f(x) \square g(x)) = \lim_{x\to\sigma} f(x) \square \lim_{x\to\sigma} g(x)$$

υπό τις προϋποθέσεις ότι:

(α΄) Η $f(x) \square g(x)$ ορίζεται κοντά στο σ.

(β΄) Τα όρια του β΄ μέλους υπάρχουν.

(γ΄) Η πράξη στο β΄ μέλος επιτρέπεται.

2. *Σύνθεση.* Ισχύει

$$\lim_{x\to\sigma} (f(g(x))\ ) = \lim_{u\to \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)} f(u)$$

υπό τις προϋποθέσεις ότι:

(α΄) Η $f \circ g$ ορίζεται κοντά στο σ.

(β΄) Τα όρια του β΄ μέλους υπάρχουν.

(γ΄) Το $g(x)$ είναι διάφορο του $\lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$ κοντά στο σ.

Κανόνας 7. *Όρια και διάταξη.*

1. Αν $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = L \neq 0$ τότε κοντά στο σ τα $f(x), L$ είναι ομόσημα.

2. Αν κοντά στο σ είναι $f(x) \leq g(x)$ και τα όρια των $f(x), g(x)$ κοντά στο στο σ υπάρχουν τότε $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) \leq \lim\limits_{x\to\sigma} g(x)$.

3. Αν $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ κοντά στο στότε:

   (α') $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = \lim\limits_{x\to\sigma} h(x) = \ell \in R \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = \ell \in R$

   (β') $\lim\limits_{x\to\sigma} h(x) = -\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = -\infty$

   (γ') $\lim\limits_{x\to\sigma} f(x) = +\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$

Έχοντας αυτούς τους κανόνες ως αφετηρία μπορούμε να δώσουμε αποδείξεις για όλες τις υπόλοιπες αναπόδεικτες ιδιότητες των σελίδων 159-185 του σχολικού βιβλίου.

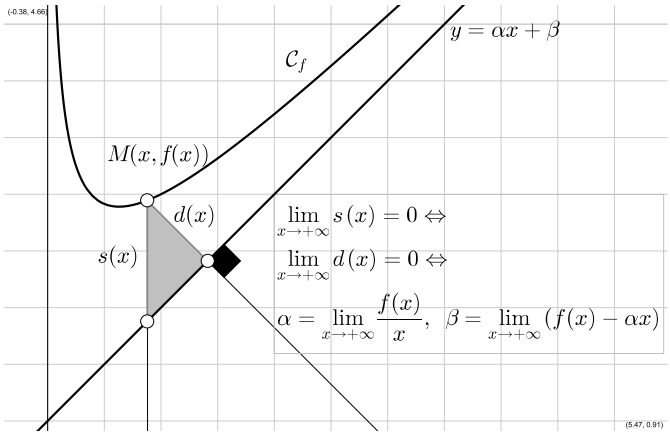
Είναι ουσιώδες να εξηγηθεί γιατί ορισμένες πράξεις στο $\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ δεν επιτρέπονται (απροσδιόριστες μορφές).

Επίσης ουσιώδες είναι να γίνουν αρκετά παραδείγματα ορίων όπου οι κανόνες De l' Hospital - Bernoulli δεν εφαρμόζονται. Ενδεικτικά:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{2^x + 3^x}{3^x + 4^x}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\sqrt{x^2+1}}{x}$$

Τα όρια μπορούν να τελειώσουν με την διδασκαλία των ασυμπτώτων όπου εδώ είναι η φυσική τους θέση και μπορούν να δοθούν οι αποδείξεις των τύπων που δίνουν τους συντελεστές των ασυμπτώτων:



5 Η παράγωγος και οι κανόνες παραγώγισης.

Έχοντας λύσει το πρόβλημα της εφαπτομένης όπου

$$\lambda_{\text{εφαπτομένης}} = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$$

μπορούμε να περάσουμε στο πρόβλημα της εύρεσης της στιγμιαίας ταχύτητας

$$\upsilon(t_0) = \lim_{\Delta t\to 0} \frac{f(t_0+\Delta t)-f(t_0)}{\Delta t}$$

Τα δύο αυτά προβλήματα δικαιώνουν την εισαγωγή μίας νέας έννοιας της παραγώγου:

$$f'(x_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h} = \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$$

Που φυσικά συνδέεται άμεσα με τον λόγο μεταβολής:

$$f'(x_0) = \lim_{x\to x_0} \lambda_f(x, x_0)$$

Η σύνδεση με την συνέχεια είναι αμφίδρομη. Αποδεικνύουμε ότι:

1. Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο είναι συνεχής σε αυτό.

2. Η παραγωγισιμότητα μπορεί να δοθεί με όρους συνεχείας: Η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο a αν και μόνο αν υπάρχει a τέτοιο ώστε η συνάρτηση
$$f(x) = \begin{cases} \lambda_f(x, x_0) & x \neq x_0 \\ \alpha & x = x_0 \end{cases}$$
να είναι συνεχής στο a. Που σημαίνει ότι αν «γνωρίζουμε» όλες τις συνεχείς συναρτήσεις «γνωρίζουμε» και τις παραγωγίσιμες.

Η τελευταία συνθήκη μας οδηγεί στην «παρατήρηση του Καραθεοδωρή» ή αλλιώς ο ορισμός της παραγώγου κατά Καραθεοδωρή[18].

Θεώρημα. (Η παρατήρηση του Καραθεοδωρή) Η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 αν και μόνο αν υπάρχει συνάρτηση $\hat{f}$ συνεχής στο x_0 τέτοια ώστε

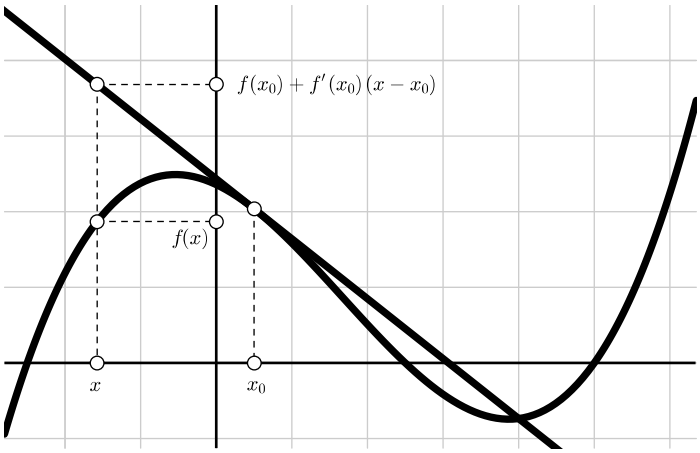
$$f(x) = f(x_0) + \hat{f}(x)(x-x_0)$$

Σε αυτή την περίπτωση

$$\hat{f}(x_0) = f'(x_0)$$

Και επομένως έχουμε ένα τύπο γραμμικής προσέγγισης

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0)$$



Έχοντας στην διάθεση μας την παρατήρηση του Καραθεοδωρή μπορούμε να δώσουμε πλήρεις αποδείξεις όλων των τύπων που έχει το σχολικό βιβλίο στις σελίδες 222-237 χρησιμοποιώντας δύο μόνο αναπόδεικτες σχέσεις[19]:

1. $\eta\mu(\alpha+\beta)=\eta\mu\alpha\ \sigma\upsilon\nu\beta+\eta\mu\beta\ \ \sigma\upsilon\nu\alpha$

2. $e^x\geq 1+x$

Οι τύποι για τις παραγώγους μπορούν να αποδειχθούν με την ακόλουθη σειρά[20]:

1. Υπολογίζοντας τις παραγώγους των c, x, $\frac{1}{x}$, $|x|\sqrt{x}$, x^ν.

2. Υπολογίζοντας την παράγωγο της $\eta\mu x$.

3. Υπολογίζοντας την παράγωγο της e^x χρησιμοποιώντας μόνο την $e^x\geq 1+x$. [21]

4. Υπολογίζοντας την παράγωγο της $\ln x$ χρησιμοποιώντας την $\ln x\leq x-1$ που προκύπτει από την $e^x\geq 1+x$. [22]

5. Αποδεικνύοντας τους τύπους για τις παραγώγους των cf, $f+g$, $f\cdot g$, $\frac{1}{g}$, $\frac{f}{g}$.[23]

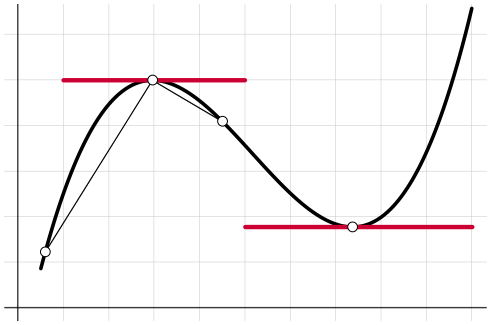
6. Αποδεικνύοντας τον τύπο για την παράγωγο της $g\circ f$. [24]

7. Υπολογίζοντας τις παραγώγους των $\sigma\upsilon\nu x=\eta\mu\left(\frac{\pi}{2}-x\right)$, $\varepsilon\varphi x=\frac{\eta\mu x}{\sigma\upsilon\nu x}$, $\alpha^x=e^{x\ln a}$, $x^\alpha=e^{a\ln x}$, $\log_\alpha x=\frac{\ln x}{\ln a}$.

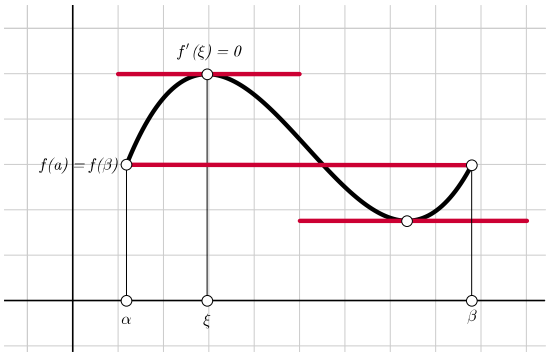
6 Τα βασικά θεωρήματα των παραγωγίσιμων συναρτήσεων.

Το σχολικό βιβλίο έχει μία κακοτεχνία που είναι πηγή ταλαιπωρίας από την έκδοση του δηλαδή εδώ και 14 χρόνια. Χωρίς να υπάρχει κάποιος ορατός λόγος καθορίζει το θεώρημα του Rolle και το θεώρημα της μέσης τιμής να προηγούνται του θεωρήματος του Fermat αντί της φυσιολογικής αντίθετης σειράς. Αλλάζοντας την σειρά μπορούμε να έχουμε πλήρεις και διαισθητικά αιτιολογημένες αποδείξεις[25] στα ακόλουθα:

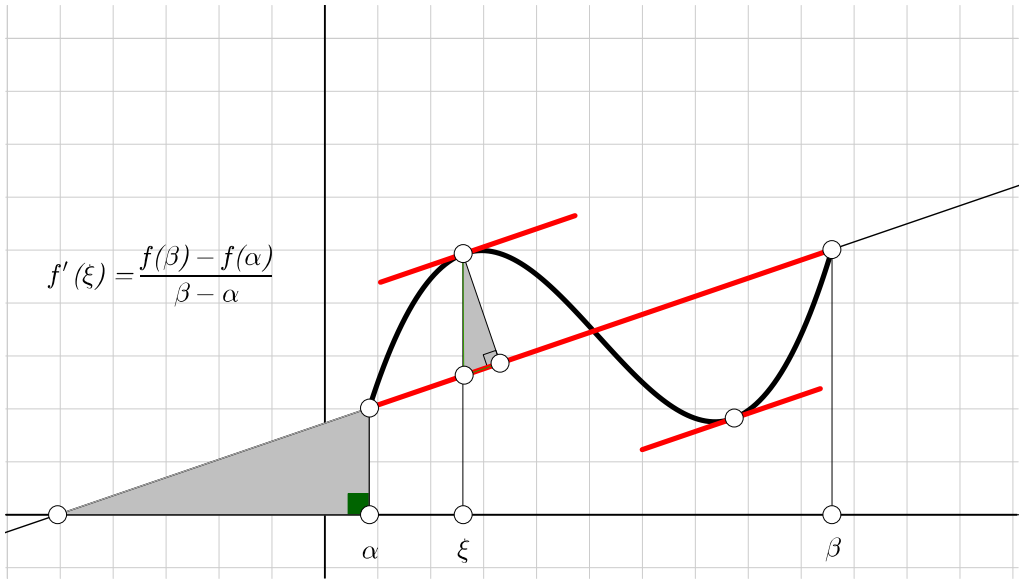
Θεώρημα (Fermat)**.** Αν η f σε κάποιο εσωτερικό σημείο ενός διαστήματος παρουσιάζει ακρότατο και η $\mathcal{C}_f$ έχει εφαπτομένη τότε η εφαπτομένη θα είναι οριζόντια.



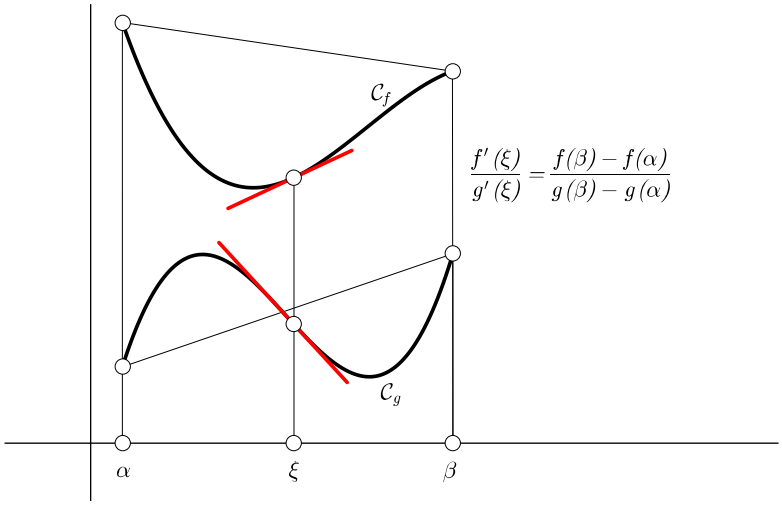
Θεώρημα (Rolle)**.** Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$, παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία και οι τιμές στα άκρα είναι ίσες τότε θα έχει οριζόντια εφαπτομένη σε κάποιο εσωτερικό σημείο.



Θεώρημα (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Lagrange)**.** Αν μία συνάρτηση f είναι συνεχής σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$και παραγωγίσιμη στα εσωτερικά του σημεία τότε σε κάποιο εσωτερικό σημείο η εφαπτομένη θα είναι παράλληλη στην χορδή με άκρα $A(\alpha,f(\alpha))$, $B(\beta,f(\beta))$



Θεώρημα (Θεώρημα Μέσης Τιμής του Cauchy)**.** Αν οι συναρτήσεις f, g είναι συνεχείς σε ένα κλειστό διάστημα $[\alpha,\beta]$ και παραγωγίσιμες στα εσωτερικά σημεία τότε σε κάποιο εσωτερικό σημείο ο λόγος των κλίσεων των γραφικών παραστάσεων C_f, C_g θα είναι ίσος με τον λόγο των κλίσεων των χορδών με άκρα $A(\alpha, f(\alpha))$, $B(\beta, f(\beta))$ και $A'(\alpha, g(\alpha))$, $B'(\beta, g(\beta))$.

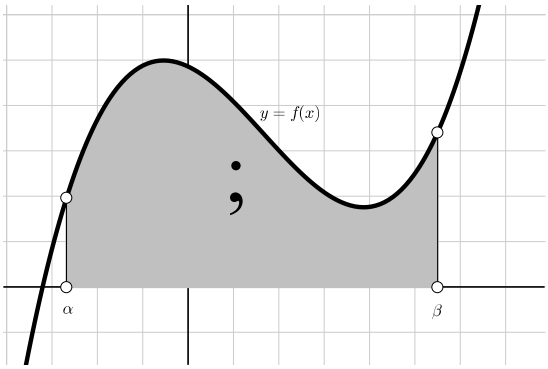


Η διάταξη των αποδείξεων μπορεί να είναι η ακόλουθη. Το θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy δίνει την δυνατότητα στους μαθητές μας να «μαντέψουν» τους κανόνες De l' Hospital - Bernoulli που θα διδαχθούν (αναπόφευκτα) χωρίς απόδειξη. Η διευθέτηση αυτή εμπεριέχει και ένα είδος αισθητικής αξίας: Ξεκινάμε τα όρια για να βρούμε κλίσεις (εφαπτομένων) που μας οδηγούν στις

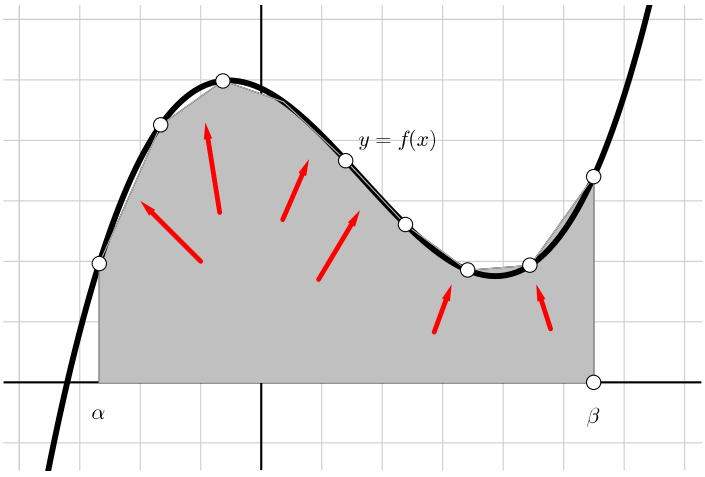
παραγώγους και μετά οι παράγωγοι μας «ανταποδίδουν» την δυνατότητα να υπολογίζουμε όρια.

7 Η αντιπαράγωγος ως απάντηση στο πρόβλημα του εμβαδού. Το ορισμένο ολοκλήρωμα.

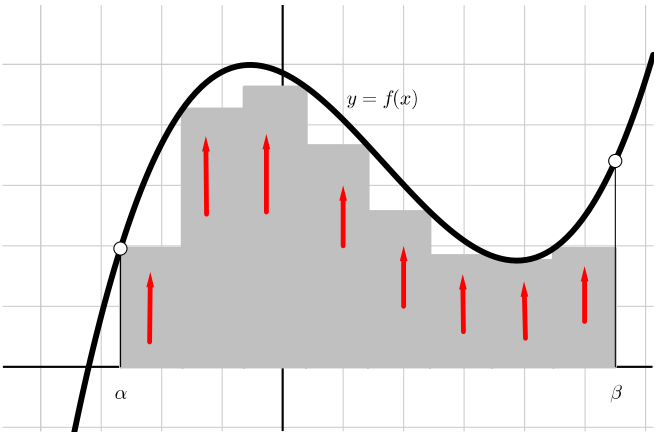
Το δεύτερο πρόβλημα δηλαδή το πρόβλημα του τετραγωνισμού έχει ανάλογα χαρακτηριστικά με εκείνο της εφαπτομένης.



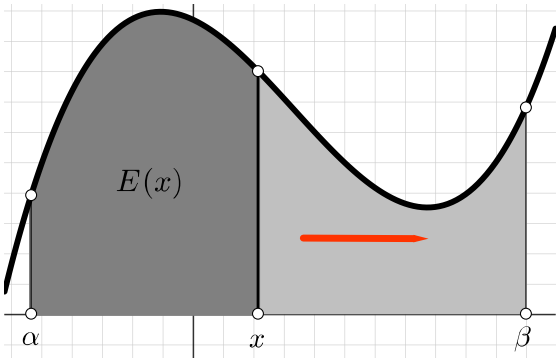
Φαίνεται ότι οι προσπάθειες αντιμετώπισης με χωρισμό σε ευθύγραμμα τμήματα σε μπορούν να αποδώσουν όταν τα σχήματα είναι μικτόγραμμα. Εδώ οι μαθητές έχουν κάποια σχετική εμπειρία από τον υπολογισμό του εμβαδού του κύκλου όπου η λογική ήταν να προσεγγισθεί το εμβαδόν με κατάλληλα πολύγωνα (που τελικά ανάγονται σε τραπέζια).



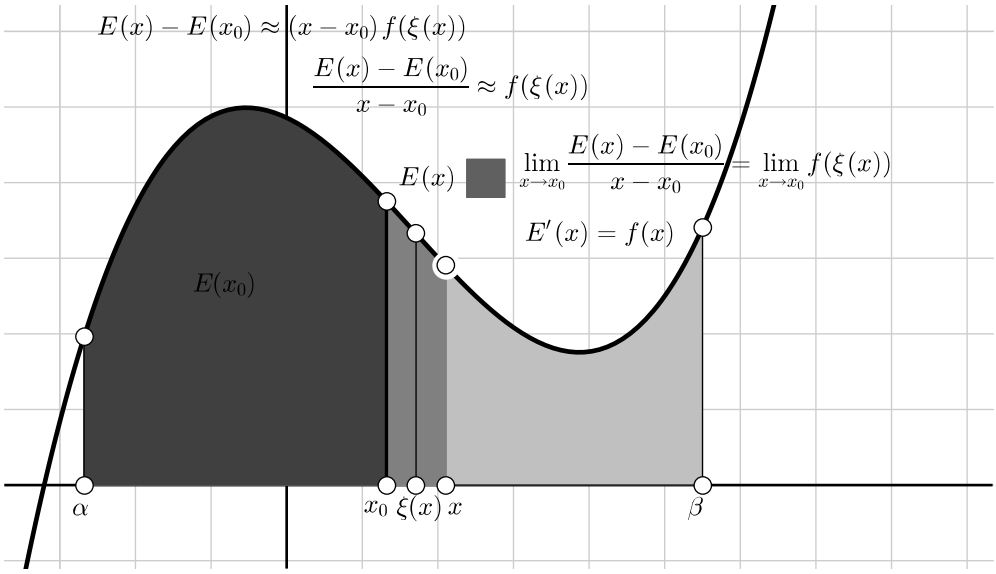
που οδηγεί στην απλούστερη προσέγγιση όπου τα τραπέζια αντικαθίστανται με ορθογώνια σε άνω, κάτω ή ενδιάμεσα αθροίσματα τεχνική που μας οδηγεί στην ολοκλήρωση κατά Riemann:



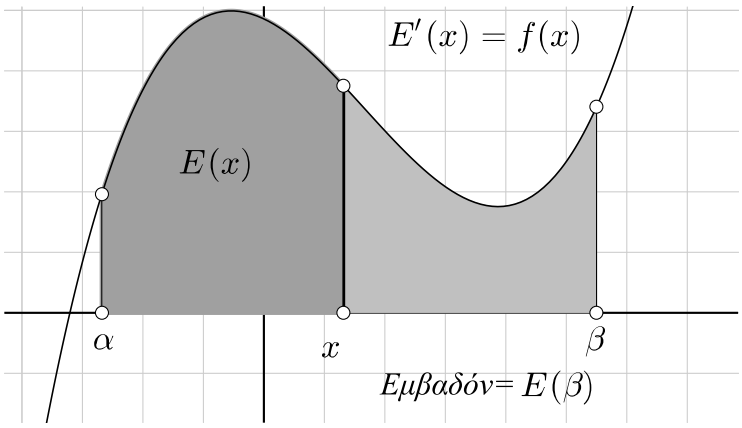
Δυστυχώς η προσέγγιση του προβλήματος λυκειακό επίπεδο μέσω του ολοκληρώματος σε Ριεμανν παρουσιάζει πολλές δυσχέρειες. Πολύ περισσότερο δε αν, όπως τώρα, η διδασκαλία της σύγκλισης των ακολουθιών δεν περιλαμβάνεται στην διδακτέα ύλη. Η σχετική ενότητα υπάρχει μεν στο σχολικό βιβλίο αλλά δεν διαδραματίζει κάποιο ρόλο στην διδασκαλία. Παραμένει στην διδακτέα ύλη για αδιευκρίνιστους λόγους, ενδεχομένως συμβολικούς.[26] Ωστόσο η αντιμετώπιση του προβλήματος μπορεί να γίνει απ' ευθείας μέσω της παράγουσας με πειστικό και διαισθητικά προσιτό τρόπο[27] Η προσέγγιση δεν είναι υπήρχε και σε παλαιότερα σχολικά βιβλία[28] καθώς και σε πολλά παλιά και νέα βιβλία απειροστικού λογισμού[29]. Η ιδέα είναι να επιχειρήσουμε μία οριζόντια «σάρωση» του προς υπολογισμό εμβαδού θεωρώντας την συνάρτηση $E\left(x\right)$που εκφράζει το εμβαδόν που περικλείεται μεταξύ των ευθειών που είναι κάθετες στον $x'x$, της C_f και του $x'x$.



Με ένα όχι δύσκολο συλλογισμό μπορούν οι μαθητές να οδηγηθούν στο συμπέρασμα ότι η συνάρτηση $E\left(x\right)$ είναι εκείνη η αντιπαράγωγος (παράγουσα) της $f\left(x\right)$ που μηδενίζεται στο α.



και έτσι έχουμε απάντηση στο δεύτερο πρόβλημα.



Η εισαγωγή του ορισμένου ολοκληρώματος μπορεί μέσω των παραγουσών και να δοθούν αποδείξεις[30] σε όλες τις ιδιότητες του. Πρόκειται ουσιαστικά για ασκήσεις παραγώγων μέτριας δυσκολίας [31]

1. Αν $F,\ G$ είναι δύο παράγουσες της f στο Δ τότε για κάθε $\alpha,\ \beta$ ισχύει
$$F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha)$$

2. Ορίζουμε
$$\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)$$
Συμβολισμός
$$[F(x)]_{\alpha}^{\beta} = F(\beta) - F(\alpha)$$
όπου F είναι μία οποιαδήποτε παράγουσα της f.

3. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du$
4. $\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0$
5. $\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx$
6. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx$
7. $\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$
8. $\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)$
9. Αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0$.
10. Αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha,\beta]$ και έστω για ένα x στο $[\alpha,\beta]$είναι $f(x) \neq 0$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0$.
11. Αν $f(x) \leq g(x)$ στο στο $[\alpha,\beta]$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.
12. Αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[\alpha,\beta]$ και έστω για ένα x είναι $f(x) \neq g(x)$ τότε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx$.
13. Αν $\alpha < \beta$ τότε $\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|dx$.
14. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,g(x)\,dx$.
15. $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du$.
16. Υπάρχει $\xi \in [\alpha,\beta]$ ώστε $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta-\alpha)$

Σημειώσεις

[1]Εκτέθηκε σε ομιλία με τίτλο «*Διδασκαλία Ανάλυσης Γ΄ Λυκείου Ένα ετήσιο οδοιπορικό*» που δόθηκε την 26-1-2012 στο Πανεπιστήμιο Αθηνών σε διοργάνωση της Επιστημονικής Ένωσης για τη Διδακτική των Μαθηματικών.

[2]Εκτέθηκε σε ομιλία με τίτλο «*Λυκειακά Μαθηματικά και Πανελλήνιες Εξετάσεις. Μία ασύμμετρη σχέση*» που δόθηκε την 18-10-2-12 στο Λασίθι σε συνδιοργάνωση του τοπικού παραρτήματος της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας και του Σχολικού Συμβούλου Ιωάννη Κανέλλου.

[3]Το θέμα της διδασκαλίας, του τι φθάνει στην τάξη και του τι γίνεται στην τάξη είναι πολυπαραγοντικό και το επίσημο ή το αφανές πρόγραμμα είναι κάποιοι από τους παράγοντες που επηρεάζουν την διδασκαλία.

[4]Επιστήμη, Απόδειξη, Πόλη και Δημοκρατία επινοήθηκαν περίπου συγχρόνως. Η αποδεικτική γενικά αποτελεί βασικό στοιχείο του Πολιτισμού μας και συστατικό της Δημοκρατίας. Όπως εύστοχα σημειώνει ο Philippe Nemo «Αυτό το οποίο χαρακτηρίζει ένα ελεύθερο πολίτευμα δεν είναι το γεγονός ότι οι εντολές δίνονται *στο όνομα του συνόλου* αλλά ότι *υπάρχουν γενικοί κανόνες και όχι ειδικές εντολές*» (Philippe Nemo, *Τι είναι η Δύση;* Μετ. Διαπανεπιστημιακό Μεταπτυχιακό Πρόγραμμα Μετάφρασης ΕΚΠΑ, ΕΣΤΙΑ, 2008. Βέβαια το θέμα της απόδειξης είναι τεράστιο και όπως είναι φυσικό υπάρχουν διάφορες απόψεις. Μεταξύ αυτών και απόψεις σύμφωνα με τις οποίες η επιβολή της απόδειξης είναι τελικά μία ρατσιστική επιβολή ενός πολιτισμού (του δυτικού εν προκειμένω) στους υπόλοιπους λ.χ. βλ. C.K. Raju, *Towards Equity in Math Education 1. Good-Bye Euclid!*, Bharatiya Samajik Chintan 7 (4) (New Series) (2009) pp. 255-264 που υπάρχει στο http://ckraju.net/papers/MathEducation1Euclid.pdf. Όπως υπάρχουν και διαφωνίες ως προς το αν και κατά πόσον η απόδειξη πρέπει να διαποτίζει την διδασκαλία των Μαθηματικών. Λ.χ. πολύ χαρακτηριστική είναι η θέση του Ralph P. Boas που διετέλεσε πρόεδρος της Μαθηματικής Ένωσης της Αμερικής MAA σύμφωνα με την οποία «Μόνο οι επαγγελματίες μαθηματικοί μαθαίνουν κάτι από τις αποδείξεις. Οι υπόλοιποι άνθρωποι μαθαίνουν από τις εξηγήσεις. Ακόμη και για τους μαθηματικούς δεν είμαι σίγουρος ότι μαθαίνουν κάτι από αποδείξεις σε περιοχές που δεν είναι εξοικειωμένοι» (βλ. R. P. Boas, *Can We Make Mathematics Intelligible?* , The American Mathematical Monthly, 88, 10, 1981, σελίδες 727-731. Από την άλλη μεριά οι Davis και Hersh θεωρούν ότι «Η απόδειξη στις καλλίτερες εκδοχές της αυξάνει την κατανόηση αποκαλύπτοντας την καρδιά του θέματος. Η απόδειξη προτείνει νέα Μαθηματικά. Ο μαθητευόμενος που μελετά αποδείξεις πλησιάζει στην δημιουργία νέων Μαθηματικών. Η απόδειξη είναι μαθηματική δύναμη, η ηλεκτρική τάση του θέματος που δίνει ζωή στους στατικούς ισχυρισμούς των θεωρημάτων» (βλ. τεξτλατινΠηιλιπ Θ. Δαις, Ρευβεν Ηερση, *Της Ματηεματιςαλ Εξπεριενςε*, Πενγυιν, 1981 σελίδα 151). Η γνώμη μου είναι ότι με κατάλληλη προετοιμασία και επιδέξια χρήση μπορεί η απόδειξη στην διδασκαλία να προσλάβει τα χαρακτηριστικά που αναφέρουν οι Davis και Hersh.

[5]Δε μπορούμε να παραβλέψουμε ότι υπάρχει μία αρκετά διαδεδομένη αντίληψη σύμφωνα με την οποία η διδασκαλία των Μαθηματικών είναι επί το πλείστον ένα «δρώμενο» και δεν απαιτείται πολλή θεωρία. Η όποια θεωρία περίπου θα «ανακαλυφθεί» από τους μαθητές μέσω «συγκεκριμένων» προβλημάτων. Η αντίληψη αυτή προσφέρει την «θεωρητική» κάλυψη στην δημαγωγική πρακτική των συνεχών μειώσεων και εκπτώσεων στην διδακτέα ύλη

[6]Την στιγμή που η διδασκαλία αντιπαραδειγμάτων δεν ενθαρρύνεται. Ωστόσο κατά την διδασκαλία ενός θεωρήματος είναι σημαντικό να φαίνεται γιατί μία υπόθεση είναι ουσιώδης κάτι που μπορεί να δειχθεί με κατάλληλο αντιπαράσειγμα. Βλ. σχετικά και Γιάννης Δ. Πλατάρος, *Η διδασκαλία του Απειροστικού Λογισμού μέσω αντιπαραδειγμάτων*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Παν. Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 2004

[7]David Hilbert, *Τα Θεμέλια της Γεωμετρίας*, Μετάφραση και εισαγωγή: Στράτης Παπαδόπουλος, ΤΡΟΧΑΛΙΑ, 1995

[8] Ο διαπρεπής Γερμανός μαθηματικός Edmund Landau χρειάστηκε 134 σελίδες και 301 προτάσεις (τις ονομάζει όλες ομοιόμορφα «θεωρήματα») για να δώσει μία αυστηρή παρουσίαση των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών, των πραγματικών και των μιγαδικών αριθμών: Edmund Landau, *Foundations of Analysis*, Chelsea,1966 (1929) που αποτελεί εισαγωγή στον Απειροστικό Λογισμό του: Edmund Landau, *Differential and Integral Calculus*, Chelsea,1951 (1934)

[9]Ένα μόνιμο πρόβλημα του εκπαιδευτικού σχεδιασμού είναι εκείνο της ασυνέχειας: Η μία βαθμίδα εκπαίδευσης δεν λαμβάνει υπ' όψιν ούτε την προηγούμενη (να στηριχθεί σε αυτήν) αλλά ούτε την επόμενη (να την υποβοηθήσει). Βέβαια αυτό το πρόβληημα επ' ουδενί δεν λύνεται με το να διδάσκεται σε μία βαθμίδα κάτι όπως ακριβώς το χρειάζεται η επόμενη

[10]Βλ. E. Hairer, G. Warner, *Analysis by Its History*, Springer,1996 σελίδες 80 και 107

[11]Για το πρόβλημα αυτό ο Καρτέσιος αναφέρει «Και τολμώ να πω πως όχι μόνο είναι το πιο χρήσιμο και πιο γενικό γεωμετρικό πρόβλημα που γνωρίζω ή και ακόμη θα ήθελα να ποτέ να μάθω». Βλ.Rene Descartes, *The Geometry of Rene Descartes*, Dover, 1954 (1925) σελίδα 95

[12]Χωρίς αυτό να σημαίνει βέβαια ότι δεν καταγράφονται δυσκολίες όταν αρχίζει η προσπάθεια αποσαφήνισης των προβλημάτων. Βλ.

1. Biza, I, Christou, C, Zachariades, T: *Student perspectives on the relationship between a curve and its tangent in the transition from Euclidean Geometry to Analysis*, Research in Mathematics Education, 10, 1, 2008 σελίδες 53-70.
2. Bronislaw Czarnocha, Ed Dubinsky, Sergio Loch, Vrunda Prabhu and Draga Vidakovic, *Conceptions of Area: In Students and in History*, The College Mathematics Journal, 32, 3, 2001 σελίδες 99-109,

[13]Παλαιότερα ήταν βασικό στοιχείο της διδασκαλίας των συναρτήσεων βλ. Ν. Βαρουχάκης κ.α. *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου Άλγεβρα*, ΟΕΔΒ, 1989, σελ. 34

[14]Η μετάβαση αυτή ιστορικά ήταν αργή και φαίνεται ότι οι ιδέα έγινε καθαρή με τον Fermat. Βλ. J. L. Coolidge, *The Story of Tangents*, The American Mathematical Monthly, Vol. 58, No. 7 (Aug. - Sep., 1951 σελίδες 449-462

[15]Οι ιδέες αυτές θα έπρεπε να καλλιεργούνται ήδη από τα Μαθηματικά κατεύθυνσης της Β' τάξης. Όμως η σχετική πραγμάτευση για τις κωνικές τομές (πλην της παραβολής) έχει εξαιρεθεί από το σχολικό βιβλίου και για την παραβολή εξαιρείται από τις οδηγίες διδασκαλίας (αναφέρουν «χωρίς την απόδειξη της εξίσωσης της παραβολής, την απόδειξη του τύπου της εφαπτομένης»).

[16]Πρόκειται για ένα σημείο όπου χρειάζεται προσοχή και εγρήγορση εκ μέρους του δασκάλου ώστε να διαχειρισθεί διάφορες «εγγενείς» παρανοήσεις. Βλ. και David Tall, *Constructing the concept image of the tangent*, Proceedings of the Eleventh International Conference of P.M.E., Montreal, III, 69-75, (1986) που μπορεί να βρεθεί εδώ:
www.warwick.ac.uk/staff/David.Tall/downloads.html
καθώς και Σωτήριος Σκοτίδας, *Η διδασκαλία του ορίου συνάρτησης με χρήση νέων τεχνολογιών*, Μεταπτυχιακή Διπλωματική Εργασία, Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ, 2010 σελίδες 58-60 .

[17]Βέβαια υπάρχει και η άποψη ότι το όριο γίνεται κατανοητό μόνο αν διδάσκεται μέσω του ορισμού του. Ο αντίλογος είναι εκτενής. Πάντως μια ενδιάμεση κατάσταση είναι να μην χρησιμοποιηθούν τα $\varepsilon-\delta$ και να χρησιμοποιηθεί μία περιγραφή περίπου σαν των αρχών του 19ου αιώνα: Η συνάρτηση $f(x)$ θα έχει για $x \to \sigma$ όριο το L αν το $f(x)$ είναι όσο κοντά θέλουμε στο L αρκεί να πάρουμε το x αρκετά κοντά στο σ. Βλ. και Barbara A. Shipman, *A*

Comparative Study of Definitions on Limit and Continuity of Functions PRIMUS, 22,8, 2012 σελίδες 609•633

[18]Βλ. Stephen Kuhn, *The Derivative ala Caratheodory*, The American Mathematical Monthly, Vol. 98, No. 1 (Jan., 1991), σελίδες 40-44

[19]Η πρώτη σχέση ως γνωστόν μέχρι πρότινος διδάσκονταν αλλά χωρίς απόδειξη (που δεν είναι δύσκολη). Δυστυχώς έχει πάψει να διδάσκεται. Η δεύτερη σχέση δε μπορεί να αποδειχθεί αν δεν εισαχθεί προσεκτικά η εκθετική συνάρτηση πράγμα που είναι πολύ δύσκολο να γίνει στο Λύκειο

[20]Βλ. και Αποστόλης Παπαδογιαννάκης, *Η Ανάλυση στο Λύκειο και μερικές προτάσεις για την ενοποίηση και απλοποίηση των αποδείξεων βασικών θεωρημάτων της.* Μεταπτυχιακή Διπλωματική εργασία. Τμήμα Μαθηματικών Παν. Κρήτης, 2005

[21]Αν θεωρήσουμε ως δεδομένη την $e^x \geq 1+x$ θέτοντας όπου το x το $-x$ βρίσκουμε ότι για $x<1$ είναι $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ και επομένως $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ και επομένως για $x>0$ είναι $1 \leq \frac{e^x-1}{x} \leq \frac{1}{1-x}$. Άρα $\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{e^x-1}{x}=1$ και όμοια $\lim\limits_{x\to 0^-}\frac{e^x-1}{x}=1$. Βρίσκουμε έτσι ότι η συνάρτηση$\varphi(x)=e^x$ έχει στο 0 παράγωγο 1. Η παράγωγος στις άλλε θέσεις $x-0$ βρίσκεται από την συναρτησιακή σχέση $\varphi(x_0+h)=\varphi(x_0)\varphi(h)$ αφού $\frac{\varphi(x_0+h)-\varphi(x_0)}{h}=\frac{\varphi(x_0)\varphi(h)-\varphi(x_0)}{h}=\varphi(x_0)\frac{\varphi(h)-1}{h}$

[22]Αν θέσουμε στην $e^x \geq x+1$ όπου x το $\ln x$ βρίσκουμε ότι $\ln x \leq x-1$ και αν στην τελευταία θέσουμε όπου x το $\frac{1}{x}$ θα καταλήξουμε στην $1-\frac{1}{x} \leq \ln x$ οπότε έχουμε ότι $1-\frac{1}{x} \leq \ln x \leq x-1$. Για $x>1$ έχουμε $\frac{1}{x} \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq 1$ ενώ για $x<1$ ότι $1 \leq \frac{\ln x}{x-1} \leq \frac{1}{x}$. Επομένως $\lim\limits_{x\to 1^+}\frac{\ln x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1^-}\frac{\ln x}{x-1}=1$ από την οποία συνάγουμε ότι η παράγωγος της $\sigma(x)=\ln x$ στο 1 είναι 1. Για την παράγωγο σε άλλες θέσεις μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε την συναρτησιακή σχέση $\sigma(x_0h)=\sigma(x_0)+\sigma(h)$ και την παρατήρηση ότι $\frac{\sigma(x)-\sigma(x_0)}{x-x_0}\underset{x=x_0h}{=}\frac{\sigma(x_0h)-\sigma(x_0)}{x_0h-x_0}=\frac{1}{x_0}\frac{\sigma(h)}{h-1}=\frac{1}{x_0}\frac{\ln h}{h-1}$.

[23]Οι αποδείξεις για τις παραγώγους των τριών πρώτων μπορούν να γίνουν όπως στο σχολικό. Για την $\frac{1}{g}$ μπορούμε να γράψουμε $\frac{\frac{1}{g}(x)-\frac{1}{g}(x_0)}{x-x_0}=\frac{\frac{1}{g(x)}-\frac{1}{g(x_0)}}{x-x_0}=-\frac{1}{g(x_0)}\cdot\frac{1}{g(x)}\frac{g(x)-g(x_0)}{x-x_0}$ και να δώσουμε την ευκαιρία στους μαθητές να αξιοποιήσουν την γνώση ότι η παραγωγισμότητα συνεπάγεται την συνέχεια. Τέλος η παράγωγος της $f\cdot g$ μπορεί να αποδειχθεί με καθαρά αλγεβρικό χειρισμό: $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0)=\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)(x_0)+f(x_0)\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0)=f'(x_0)\frac{1}{g(x_0)}+f(x_0)\left(-\frac{g'(x_0)}{g^2(x_0)}\right)$

[24]Εδώ μπορούμε να αξιοποιήσουμε την παρατήρηση του Καραθεοδωρή:

$$(g\circ f)'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x))-g(f(x_0))}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g(f(x_0))+\hat{g}(f(x))(f(x)-f(x_0))-g(f(x_0))}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\hat{g}(f(x))\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=g'(f(x_0))f'(x_0)$$

[25]Για τις αποδείξεις σε συντομία:

- Η απόδειξη του θεωρήματος του Fermat μπορεί να δοθεί όπως στο σχολικό βιβλίο (σελίδα 260).
- Μία απόδειξη του θεωρήματος του Rolle που μπορεί να δοθεί είναι αδρομερώς η εξής: Η συνάρτηση από το θεώρημα μέγιστης-ελάχιστης τιμής έχει μέγιστη και ελάχιστη τιμή. Αν και οι δύο παρουσιάζονται στα άκρα του διαστήματος τότε μέγιστη και ελάχιστη τιμή είναι ίσες και η συνάρτηση είναι σταθερή οπότε η παράγωγος της μηδενίζεται σε κάθε εσωτερικό σημείο του διαστήματος. Αν μία τουλάχιστον από την

μέγιστη ή την ελάχιστη τιμή παρουσιάζονται στο εσωτερικό του διαστήματος τότε εκεί έχουμε τοπικό ακρότατο και επομένως σημείο μηδενισμού της παραγώγου.

- Για μία απόδειξη του θεωρήματος του Lagrange μπορούμε να θεωρήσουμε την συνάρτηση $h(x) = f(x) - \frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}(x-\alpha) - f(\alpha)$. Η συνάρτηση αυτή εκφράζει την διαφορά των τιμών της $f(x)$ και της ευθείας που διέρχεται από τα $A(\alpha, f(\alpha))$ και $B(\beta, f(\beta))$ και ικανοποιεί τις υποθέσεις του θεωρήματος του Rolle.
- Μία απόδειξη του θεωρήματος του Cauchy μπορεί να προκύψει αν εφαρμόσουμε το θεώρημα του Rolle στην συνάρτηση $h(x) = f(x)(g(\beta) - g(\alpha)) - g(x)(f(\beta) - f(\alpha))$.

[26]Η παράκαμψη ή ακόμη χειρότερα η απομάκρυνση των αθροισμάτων Riemann και η υιοθέτηση της χρήσης αντιπαραγουσών για την εύρεση ορισμένων ολοκληρωμάτων και εμβαδών έχει δεχθεί δριμύα κριτική. Παρά το ότι πρόκειται για μία πολύ σημαντική ευκολία. Ωστόσο από αρκετούς μεταξύ των οποίων και οι Bourbaki θεωρήθηκε ότι αυτή η ευκολία υπήρξε και παράγοντας επιβράδυνσης των ερευνών στην ολοκλήρωση μιας και δόθηκε μεγαλύτερη έμφαση στην εύρεση των παραγουσών, πεδίο που ως γνωστόν παρουσιάζει πολλά άλυτα προβλήματα, παρά στην αποσαφήνιση της έννοιας του ολοκληρώματος. Επίσης υπάρχουν και αιτιάσεις που σχετίζονται με την ιστορική ανάπτυξη του θέματος. Λ.χ. ο Tom Apostol στο καταξιωμένο έργο του Tom Apostol *Διαφορικός και Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Τόμος Ι, Μετάφραση Δημήτριος Γκιόκας, ΑΤΛΑΝΤΙΣ-Μ. Πεχλιβανίδης χ.χ (στα Αγγλικά εξεδόθη το 1962) σημειώνει στον πρόλογο του «Η προοδευτική ανάπτυξη της ύλης του βιβλίου έχει υπαγορευθεί από την ιστορική και φιλοσοφική ανάπτυξη της Ανάλυσης και της Αναλυτικής γεωμετρίας. Η ολοκλήρωση προηγείται και ακολουθεί η παραγώγιση. Αυτό μπορεί να παραξενεύει μερικούς είναι όμως παιδαγωγικό και ιστορικά ορθό.» Για το θέμα αυτό βλ. και Σ. Μάκρας, *Ολοκλήρωμα και Παράγουσες*. Ευκλείδης Γ', Νο 30-31, 1992, σελίδες 147-156.

[27]Βλ. και Thompson, P. W., Silverman, J. *The concept of accumulation in calculus*. στο M. P. Carlson , C. Rasmussen (Eds.), *Making the connection: Research and teaching in undergraduate mathematics* (pp. 43-52). Washington, Mathematical Association of America.2008.

[28]Η τελευταία φορά που εμφανίσθηκε σε σχολικό βιβλίο ήταν στο: Δαλιεράκη κ.α. *Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Ενιαίου Λυκείου Τεχνολογικής Κατεύθυνσης*, ΟΕΔΒ, 2000 σελίδα 299-300.

[29]Ενδεικτικά βλ.:

1. Lynn Loomis, *Calculus*, Addison-Wesley, 1974 (1973) σελίδες 304-305
2. Serge Lang, *First Course in Calculus*, Addison-Wesley, 1972 σελίδες 209-211

[30]Βλ. και Kazimierz Kuratowski, *Introduction to Calculus*, Pergamon, PWN-Polish Scientific Publishers, 1969 (1961) σελίδες 224-230

[31]

1. Οι αποδείξεις των 1 και 3-8 είναι άμεσες.
2. Η 9 μπορεί να αποδειχθεί μελετώντας την συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$: Έχει παράγωγο $f(x)$, είναι αύξουσα και επομένως $F(\beta) \geq F(\alpha) = 0$.
3. Η 10 μπορεί να αποδειχθεί ως εξής. Από την 9 ξέρουμε ότι $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt \geq 0$. Ας υποθέσουμε ότι το αποδεικτέο δεν ισχύει. Θα είναι $\int_\alpha^\beta f(t)\,dt = 0$. Θα καταλήξουμε σε άτοπο. Θεωρούμε πάλι την αύξουσα συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)\,dt$. Για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ είναι $\alpha \leq x \leq \beta$ και επομένως $F(\alpha) \leq F(x) \leq F(\beta)$. Άρα αφού $F(\alpha) = F(\beta) = 0$ θα είναι και $F(x)$ για όλα τα x. Μα τότε και η παράγωγος $f(x)$ της $F(x)$ είναι παντού μηδέν πράγμα που αντιβαίνει στην υπόθεση ότι η f κάπου δεν μηδενίζεται.

4. Οι 11, 12 προκύπτουν αν εφαρμόσουμε στην $g(x) - f(x)$ τις 9-10. Βλ. και άσκηση 353-Γ-10 του σχολικού.

5. Η 13 προκύπτει αν εφαρμόσουμε την 11 στην προφανή ανισότητα $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$.

6. Οι 14, 15 μπορούν να αποδειχθούν όπως ακριβώς αποδεικνύονται οι αντίστοιχες σχέσεις για τα αόριστα ολοκληρώματα στις σελίδες 309 και 313 του σχολικού.

7. Η 16 που είναι το θεώρημα μέσης τιμής του ολοκληρωτικού λογισμού προκύπτει σαν άμεση εφαρμογή του θεωρήματος μέσης τιμής του Lagrange σε μία παράγουσα F της f. Αλλιώς (βλ. και άσκηση 353-Γ-10 του σχολικού)σαν εφαρμογή του θεωρήματος ενδιάμεσης τιμής για την συνεχή συνάρτηση $f(x)$ ως εξής: Αν m και M είναι η ελάχιστη και η μέγιστη τιμή της f στο $[\alpha, \beta]$ τότε από την $m \leq f(x) \leq M$ έχουμε $\int_\alpha^\beta m dx \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq \int_\alpha^\beta M dx$ και επομένως $m(\beta - \alpha) \leq \int_\alpha^\beta f(x)\, dx \leq M(\beta - \alpha)$ ή $m \leq \frac{\int_\alpha^\beta f(x) dx}{\beta - \alpha} \leq M$ και επομένως το $\frac{\int_\alpha^\beta f(x) dx}{\beta - \alpha}$ είναι τιμή της f αφού βρίσκεται μεταξύ δύο τιμών της f.