Καλαμαρί
ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

Ανάλυση Γ΄ Λυκείου
Η θεωρητική εμβάθυνση ως μοχλός για την απόκτηση δεξιοτήτων στην επίλυση ασκήσεων και προβλημάτων.

Εισηγήσεις εκδήλωσης - συζήτησης

Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί

Σάββατο 3 Δεκεμβρίου 2016

Επιμέλεια:
Σαράφης Ιωάννης - Πέρδος Αθανάσιος

Πρόλογος

Στην έκδοση αυτή περιλαμβάνονται εργασίες των εισηγητών που αναλύουν με θεωρητικό και πρακτικό τρόπο τη διδασκαλία της Ανάλυσης της Γ Λυκείου.

Η επιμέλεια έγινε με γνώμονα την πρακτική αξιοποίηση των εργασιών από μάχιμους εκπαιδευτικούς που είτε κάνουν τα πρώτα βήματα τους στη διδασκαλία του μαθήματος είτε έχουν σημαντική εμπειρία αλλά θέλουν να εντοπίσουν μικρές λεπτομέρειες που θα βελτιώσουν περαιτέρω τη διδασκαλία τους.

Η Εκδήλωση – Συζήτηση διεξήχθη στις 03/12/2016 στην Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί σε συνεργασία με τους Σχολικούς Συμβούλους Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης, κ.Ανδρέα Πούλο και Κιλκίς-Λαγκαδά – Ωραιοκάστρου, κ. Ιωάννη Θωμαΐδη

Οφείλουμε να ευχαριστήσουμε για την ευγενική χορηγία τον κ. Παναγιώτη Κανδύλα αλλά και τους κ. Πέρδο Αθανάσιο και κα. Χριστίνα Τίκβα για την βοήθεια τους στην οργάνωση και πραγματοποίηση της εκδήλωσης.

Ιωάννης Σαράφης
Μαθηματικός

Περιεχόμενα

Η Διαρκής Αναζήτηση της Ταυτότητας της Μαθηματικής Εκπαίδευσης. Προβληματισμοί και Επιλογές.

Α. Σ .Σκούρας, Σύμβουλος Α΄ ΥΠ.Π.Ε.Θ

Εισαγωγή

Τα Μαθηματικά βρίσκονται στον πυρήνα του σχολικού προγράμματος. Κατέχουν μια προνομιούχο θέση στα σχολικά προγράμματα σπουδών σε όλες τις χώρες του κόσμου, γιατί ακριβώς είναι ένα θέμα που απευθύνεται και αφορά ολόκληρο τον μαθητικό πληθυσμό. Η μαθηματική εκπαίδευση αποτελεί για όλους τους μαθητές έναν κρίσιμο παράγοντα για τη ζωή τους και όχι μόνο για αυτούς που θα επιλέξουν ένα επάγγελμα που απαιτεί επιπλέον μαθηματική προετοιμασία. Μάλιστα υπάρχει μια πολύ εντυπωσιακή ομοιομορφία των σχολικών μαθηματικών προγραμμάτων ανά τον κόσμο. Ο Usiskin (1999) παρατήρησε ότι στη Σαγκάη οι μαθητές έλυναν προβλήματα Ευκλείδειας γεωμετρίας όπως εκείνοι της Ιαπωνίας. Γενικά η μαθηματική εκπαίδευση δείχνει αξιοσημείωτη ομοιότητα ανά τον κόσμο. Τούτο αντανακλά και ενισχύει την οργανωμένη φύση των μαθηματικών ως ένα επιστημονικό κλάδο. Με την ίδια ομοιομορφία επίσης διατυπώνονται και ερωτήσεις από τους μαθητές και απαντήσεις από τους καθηγητές όπως:

ΜΑΘΗΤΗΣ: Πότε θα το χρησιμοποιήσω αυτό;

ΚΑΘΗΓΗΤΗΣ : (κάπως έτσι): Γνωρίζω ότι αυτό θα σου φανεί αστείο αλλά θυμήσου, δεν ξέρεις τι καριέρα θα επιλέξεις - δεν μπορείς να δεις τη συνάφεια τώρα αλλά αργότερα.

Παρά την προνομιακή θέση των μαθηματικών στο σχολικό πρόγραμμα τα αποτελέσματα που παράγονται στις σχολικές αίθουσες δεν είναι τα αναμενόμενα. Μάλιστα -όπως η ερευνητική βιβλιογραφία υπογραμμίζει, πολλές από τις δυσκολίες που συναντούν οι μαθητές στα Μαθηματικά οφείλονται περισσότερο στις πρακτικές διδασκαλίας και λιγότερο στη φύση του αντικειμένου ή τις γνωστικές ικανότητες των μαθητών. Μόνο για τους λίγους η μαθηματική εκπαίδευση απελευθερώνει και φωτίζει το κρυμμένο δυναμικό των Μαθηματικών (Mullis, V. S. Inaetall., 2005). Κάθε εκπαιδευτικό σύστημα προβαίνει σε όλες εκείνες τις διευθετήσεις με τις οποίες θα προωθήσει το μαθησιακό και αναπτυξιακό δυναμικό των μαθητών του. Κατ αναλογία μέσω της μαθηματικής εκπαίδευσης προωθείται το μαθησιακό και αναπτυξιακό δυναμικό των μαθητών στα Μαθηματικά. Με αυτή την έννοια ο όρος «μαθηματική εκπαίδευση» καλύπτει ένα μεγάλο νοηματικό εύρος και μπορεί να θεωρηθεί , όπως έχει διατυπωθεί από τον Dörfler (2003), ως η μελέτη του πώς οι άνθρωποι μαθαίνουν και κάνουν Μαθηματικά. Πράγματι, η διδασκαλία των μαθηματικών είναι ένα σύνθετο και επίπονο έργο πάνω σε ένα ευρύ φάσμα αντικειμένων και παραγόντων που την επηρεάζουν και τους οποίους πρέπει κανείς να λάβει υπόψη του κατά την διεξαγωγή της. Η κατανόηση και ερμηνεία των φαινόμενων της διδασκαλίας και μάθησης των μαθηματικών αλλά και ο τρόπος δράσης επί αυτών θα πρέπει με γόνιμο, ευρηματικό και συστηματικό τρόπο να διαχέονται στην εκπαιδευτική κοινότητα.

Κάθε προσπάθεια που αποβλέπει στη συγκρότηση ενός Προγράμματος Σπουδών για τα μαθηματικά βρίσκεται άμεσα αντιμέτωπη με μια σειρά από ερωτήματα όπως:

- Ποιες μαθηματικές γνώσεις είναι σημαντικό να αναπτύξουν όλοι οι μελλοντικοί πολίτες;
- Ποια κριτήρια θα μπορούσαν να υιοθετηθούν για την επιλογή τους;
- Ποιες από τις γνώσεις που εμπεριέχονται στο ισχύον Πρόγραμμα Σπουδών χρειάζεται να εξαιρεθούν; Ποιες πρέπει να παραμείνουν και σε ποια έκταση;
- Ποιες Διαδικασίες σκέψης-δεξιότητες αναμένεται να αναπτύξουν οι μαθητές;
- Ποιες καταστάσεις αναμένεται να είναι ικανοί οι μαθητές να αντιμετωπίσουν;
- Πως θα αποτυπωθεί η ιδιαίτερη φύση των Μαθηματικών;

Απαντήσεις σε αυτά και άλλα, ανάλογα ερωτήματα, παρά τη δυσκολία που παρουσιάζουν, προσδιορίζουν σε μεγάλο βαθμό την ταυτότητα της μαθηματικής εκπαίδευσης που επιχειρείται να αναπτυχθεί στις εκάστοτε κοινωνικές και πολιτισμικές συνθήκες (Schoenfeld, A., 2000; NCTM, 2000; N.A.E.P., 2003; Sriraman , B., &English , L., 2010; CPRE, 2011).

Δύο σημαντικά ζητήματα αυτής της ταυτότητας θα προσπαθήσω να προσεγγίσω στο υπόλοιπο αυτού του άρθρου: Την επιλογή των περιεχομένων και την διαχείριση τους.

Α. Για την επιλογή των περιεχόμενων

Η έλλειψη σαφήνειας για το πώς μπορούν να ληφθούν αποφάσεις σχετικά με το *«τι»* της μαθηματικής εκπαίδευσης, έρχεται σε οξεία αντίθεση με τη σπουδαιότητα που αποδίδεται σ' αυτή. Ένα ευρύ κοινό νοιάζεται πολύ για το « τι » μαθαίνουν τα παιδιά στο σχολείο . Ο μεγάλος αριθμός των χωρών που καθιέρωσαν πρότυπα (standards[1]) και το ενδιαφέρον για διεθνείς συγκριτικές μελέτες (TIMSS , PISA) , αντικατοπτρίζουν επίσης αυτή την εμπλοκή. Αν και φαίνεται ότι αυτή η αντίληψη είναι τυπική της εποχής μας, δεν είναι έτσι. Ήδη από το 1845, ο Γραμματέας του Πολιτειακού Συμβουλίου Εκπαίδευσης της Μασαχουσέτης, HoraceMann, ανέδειξε το ερώτημα του αν το σχολείο δίδασκε το πώς να υπολογίζεται το ποσό του φόρου που πρέπει να πληρώνουν οι πολίτες (MarjavandenHeuvel—Panhuizen , 2005).

Όταν το 1957 η τότε Σοβιετική . Ένωση εκτόξευσε τον πρώτο Sputnik στις ΗΠΑ αυτό το γεγονός έπεισε την κυβέρνηση και τους πολίτες ότι θα πρέπει να είναι πίσω στα μαθηματικά και τις φυσικές επιστήμες και μια μεγάλη συζήτηση ξεκίνησε για το «τι» θα πρέπει διδάσκεται. Το κυρίως μήνυμα ήταν ότι η μαθηματική εκπαίδευση είχε αποτύχει επειδή η διδασκόμενη ύλη προσέφερε πεπαλαιωμένα μαθηματικά –δηλαδή μαθηματικά που δημιουργήθηκαν πριν το 1700. Το εν λόγω μήνυμα εμπεριείχε και τον υπαινιγμό ότι οι νέοι είχαν συναίσθηση αυτού του γεγονότος και κατά συνέπεια αρνούνταν να μάθουν την ύλη. Ποιος θα κατέφευγε στις υπηρεσίες ενός δικηγόρου ή ενός γιατρού , ισχυρίζονταν οι παιδαγωγοί,, που οι επαγγελματικές τους γνώσεις περιορίζονταν στα όσα ήταν γνωστά πριν το 1700; Βέβαια τα μαθηματικά αναπτύσσονται σωρευτικά και είναι πρακτικώς αδύνατο να μάθει κανείς τα πιο καινούργια αν δεν γνωρίζει τα πιο παλιά. Έτσι ξεκίνησε μια μεταρρύθμιση σύνθημα της οποίας έγινε το «Μοντέρνα μαθηματικά». Αυτό το κύμα της μεταρρύθμισης για τα μαθηματικά που ξεκίνησε από τις ΗΠΑ επεκτάθηκε και έφερε στο προσκήνιο διεθνείς ομάδες που άρχισαν να συστήνουν πιο ριζικές μεταρρυθμίσεις που έφταναν μέχρι την εγκατάλειψη όλων των γνώριμων τομέων των σχολικών μαθηματικών (Kleine , M, . 1990) Η Ιστορία των νέων μαθηματικών δείχνει καθαρά πως ζητήματα Προγραμμάτων Σπουδών μπορεί να γίνουν κοινωνικά θέματα. Ένα από τα διδάγματα της εμπειρίας με τα νέα μαθηματικά είναι ότι για να πετύχει ένα curriculum χρειάζεται να είναι προσιτό σε διάφορες κοινωνικές ομάδες. Εάν οι καθηγητές αισθάνονται άβολα με ένα curriculum, τότε δεν θα προετοιμάζονται για να το εφαρμόσουν , είτε θα το αποφεύγουν είτε θα το νοθεύουν.. Αν οι γονείς αισθάνονται αποστερημένοι εξαιτίας του ότι δεν νοιώθουν ικανοί να βοηθήσουν τα παιδιά τους και δεν αναγνωρίζουν τι είναι στο curriculum αυτό που έχει ιδιαίτερη αξία, τελικά θα απαιτήσουν αλλαγή. Στην αρχή της δεκαετίας του 70 τα νέα μαθηματικά ήταν νεκρά. Σε αντίδραση των όσων είχαν ιδωθεί ως οι υπερβολές των νέων μαθηματικών οι τάξεις των μαθηματικών σε όλη τη χώρα «επέστρεψαν στα βασικά». Δημιουργήθηκε έτσι ένα άλλο κίνημα το «πίσω στα βασικά» το οποίο όμως εστιάστηκε ευρέως σε δεξιότητες και διαδικασίες (Schoenfeld, A., 2004.)

Το πρόβλημα για το «τι» θα διδάσκεται, δεν είναι ένα ενιαίο πράγμα. Σε διαφορετικές χώρες , ακόμα και στην ίδια τη χώρα (π.χ. ΗΠΑ), τα σχολικά μαθηματικά φαίνονται διαφορετικά. Σε μια διεθνή κλίμακα η κατάσταση είναι παρόμοια. Αυτό φανερά φαίνεται από τη διακύμανση

---

[1]Standards: Είναι περιγραφές για το τι η διδασκαλία των Μαθηματικών θα πρέπει να καθιστά ικανούς τους μαθητές να ξέρουν και να κάνουν. *Καθορίζουν την κατανόηση, την γνώση και τις δεξιότητες που οι μαθητές θα πρέπει να αποκτήσουν από το Δημοτικό έως και το Λύκειο*.

των θεμάτων στα σχολικά εγχειρίδια που βρέθηκε σε σχετική μελέτη του ΤΙΜΣΣ για τα σχολικά βιβλία (Valverdeetal., 2002). .Οι λόγοι για αυτές τις διαφορές στο περιεχόμενο, έχουν να κάνουν με διαφορετικές επιλογές κάθε φορά, καθόσον η διδασκαλία των Μαθηματικών στο σχολείο είναι μια επιλογή για το τι θεωρείται ότι είναι τα Μαθηματικά , και τι αξίες προωθούνται μέσα από τη διδασκαλίας τους σε σύνδεση με τις αξίες που η εκπαίδευση γενικά προωθεί (Lerman, 2004). Στο παραπάνω πνεύμα δεν θα πρέπει να αποτελούν έκπληξη οι «μαθηματικοί πόλεμοι » που η δημοσίευση των NCTMStandards πυροδότησε (αρχικά στις ΗΠΑ) , αν και η φράση «μαθηματικοί πόλεμοι » είναι οξύμωρη αφού οι άνθρωποι πιστεύουν τουλάχιστον ότι τα « γεγονότα » των Μαθηματικά είναι καθολικώς αληθή, οι διαδικασίες τους καθολικά σωστές και είναι και τα δύο (γεγονότα και διαδικασίες) τελείως ανεξάρτητα από τους διάφορους πολιτισμούς. Έτσι σε ένα τρίγωνο το άθροισμα των εσωτερικών του γωνιών θα είναι 180 μοίρες ανεξάρτητα από τη χώρα και την επίπεδη επιφάνεια στην οποία αυτό έχει σχεδιασθεί. Και όμως οι πόλεμοι για τα Μαθηματικά έχουν την ιστορία τους και οι σημερινές διαμάχες γύρω από τη μαθηματική εκπαίδευση κατανοούνται καλύτερα όταν εξετάζονται στο πλαίσιο των προηγούμενων ανταγωνισμών . (*Schoenfeld, A., 2004.)*

Σύμφωνα με τους Kilpatrick et al. (2001) οι επιλογές σχετικά με το αναλυτικό πρόγραμμα των μαθηματικών εξαρτάται εν μέρει από ό,τι η κοινωνία θέλει να γνωρίζουν οι μορφωμένοι ενήλικες και να είναι σε θέση να κάνουν με αυτά που ξέρουν , αλλά οι ιδέες αυτές εξαρτώνται επίσης από κρίσεις με βάση τις εμπειρίες και τις πεποιθήσεις, και οι αποφάσεις αυτές συχνά δεν εμπίπτουν στο πεδίο της έρευνας. Μόλις έχουν καθοριστεί οι στόχοι μάθησης για την μαθηματική εκπαίδευση , η έρευνας μπορεί να καθοδηγήσει τις αποφάσεις σχετικά με τον τρόπο για την επίτευξη αυτών των στόχων. Με άλλα λόγια, η έρευνα δεν μπορεί να επιλύσει τα θέματα των αξιών και προτεραιοτήτων.

Παρόμοιες απόψεις διατυπώνονται και από τον Hiebert (2003). Η έρευνα δεν μπορεί να επιλέξει Standards καθόσον αυτά επιλέγονται μέσα από μια πολύπλοκη διαδικασία η οποία τροφοδοτείται από :

- Κοινωνικές προσδοκίες
- Πρακτικές του παρελθόντος
- Πληροφορίες από την έρευνα
- Οράματα των επαγγελματιών του πεδίου
- Στέρεες εμπειρικές εκπαιδευτικές πρακτικές

Καθώς η γνώση μας για το *πώς* οι μαθητές μαθαίνουν Μαθηματικά διευρύνεται και οι απόψεις για το «πώς» όλο και συμπίπτουν, δίδονται και απαντήσεις σε κρίσιμα διδακτικά ερωτήματα, όπως: «ποιοι είναι οι εκάστοτε στόχοι μάθησης, ποια είναι η αφετηρία εκκίνησης, πως και που μετακινείσαι κάθε φορά και πως επιτυγχάνεται, τελικά, ο στόχος μάθησης που είχε αρχικά τεθεί». Σε αυτήν την κατεύθυνση είναι εξαιρετικά σημαντική η έννοια της «τροχιάς μάθησης». Μια Τροχιά Μάθησης και Διδασκαλίας (ΤΜΔ) αποτυπώνει μια συνολική θέαση της μαθησιακής εμπειρίας των μαθητών σε μια συγκεκριμένη θεματική του Προγράμματος Σπουδών των μαθηματικών και στοχεύει στη διαφάνεια και στην προσβασιμότητα στην αντίστοιχη εκπαιδευτική τους πορεία (Heuvel – Panhuizen, 2001). Στην πραγματικότητα, μια τέτοια τροχιά:

- Προσφέρει μια βάση για την άσκηση της διδακτικής πράξης
- Ορίζει σημαντικούς σταθμούς μάθησης (ενδιαμέσους και τελικούς) αλλά δε συνιστά μια προ-αποφασισμένη πορεία μάθησης
- Καθιστά φανερές τις διαφορές μάθησης μεταξύ μαθητών αλλά δεν περιγράφει μια ατομική πορεία μάθησης
- Συνιστά μια πηγή έμπνευσης για διδακτική δράση αλλά όχι έναν διδακτικό οδηγό

- Μπορεί να αποβεί εκπαιδευτικά ωφέλιμη αλλά δεν αποτελεί το μοναδικό τρόπο αναβάθμισης της ποιότητας της διδασκαλίας.

Ο διδάσκων πρέπει να έχει καλή γνώση των στόχων, του δρόμου που μπορεί να οδηγήσει σ' αυτούς τους στόχους και των οροσήμων που θα περάσουν οι μαθητές σ' ένα στάδιο ή ένα άλλο αυτού του δρόμου. Χωρίς αυτό το περίγραμμα στο μυαλό, είναι δύσκολο για τον διδάσκοντα ν' αξιολογήσει τις στρατηγικές των μαθητών και να προβλέψει που και πότε μπορεί κανείς να προβλέψει τις δεξιότητες και του τι αντιλαμβάνονται οι μαθητές τα οποία μόλις φαίνονται από απόσταση Χωρίς αυτή την μακροπρόθεσμη προοπτική, γίνεται πολύ δύσκολη η καθοδήγηση της εκμάθησης από τους μαθητές.

Οι περιγραφές των διαδρομών είναι σχεδιασμένες για εφοδιάσουν τους διδάσκοντες με μιαν ακριβή επισκόπηση του πώς μπορεί ν' αναπτυχθεί η μαθηματική κατανόηση των παιδιών , δίδοντας έτσι μια λαβή στη λήψη εκπαιδευτικών αποφάσεων. Αν και μία διαδρομή μάθησης – διδασκαλίας φέρνει στο προσκήνιο τη διαδικασία μάθησης, δεν θα έπρεπε να ιδωθεί ως μία γραμμική και απλή βήμα με βήμα κατάσταση στην οποία κάθε βήμα ακολουθείται αναγκαία και απαρέγκλιτα από το επόμενο. Αντιθέτως μία διαδρομή μάθησης – διδασκαλίας θα πρέπει να αντιμετωπίζεται ως ένας δρόμος με φαρδιές λωρίδες (MarjavandenHeuvel—Panhuizen , 2005; Clements, D. H. &Sarama, J., 2009)

Αν μέσω των τροχιών μάθησης περιγράφεται μια πορεία ανάπτυξης της μαθηματικής κατανόησης των μαθητών, και ως εκ τούτου μια ακολουθία ενδιάμεσων στόχων, η «μεταφορά» αυτής της ακολουθίας σε ένα Πρόγραμμα Σπουδών θα πρέπει να ισορροπήσει την επίδραση τριών σημαντικών διαστάσεων στην εξέλιξη της προόδου του μαθητή;

- Της γνωστικής ανάπτυξης
- Της μαθηματική συνοχής και
- Της πραγματολογίας των εκπαιδευτικών συστημάτων.

Η κατάσταση προσεγγίζεται με διαφορετικό τρόπο σε κάθε βαθμίδα. Εν συντομία: στο Δημοτικό τα περιεχόμενα προσδιορίζονται και καθοδηγούνται περισσότερο από την έρευνα στο πεδίο της γνωστικής ανάπτυξης , στο Λύκειο από την λογική ανάπτυξη των Μαθηματικών καθόσον σε αυτή τη βαθμίδα εκφράζεται καλύτερα η επιστημολογική δομή της διδακτέας ύλης του μαθήματος, ενώ στη βαθμίδα του Γυμνασίου θα πρέπει να γεφυρώνονται αυτές οι δύο προσεγγίσεις. Πρόκειται για έναν δύσκολο ρόλο που η ως η βαθμίδα της εκπαίδευσης αναλαμβάνει να επιτελέσει (Wittmann, 2004; Daro, P., 2010).

Οι αλλαγές αυτές έχουν να κάνουν είτε με συγγραφή νέων διδακτικών εγχειριδίων (περίπτωση υποχρεωτικής εκπαίδευσης) είτε με παρεμβάσεις μέσω οδηγιών για την διαχείριση της διδακτέας ύλης. Ενδεικτικά, και χωρίς χρονολογική σειρά αναφέρω κάποιες από αυτές:

Προβληματισμοι και επιλογες

Στη χώρα μας συνέβησαν τα τελευταία χρόνια κάποιες αλλαγές στη μαθηματική εκπαίδευση. Ειδικότερα:

Α. Στην υποχρεωτική εκπαίδευση , με την εκπόνηση του ΔΕΠΠΣ—ΑΠΣ των Μαθηματικών , γράφτηκαν νέα διδακτικά εγχειρίδια. Κάθε βιβλίο Μαθηματικών Γυμνασίου αποτελείται από δύο μέρη (*Α΄ Μέρος: Άλγεβρα και Β΄ Μέρος: Γεωμετρία*) και γίνεται παράλληλη διδασκαλία, και *από τον ίδιο διδάσκοντα*, των δύο μερών του. Το σκεπτικό της ως άνω επιλογής ήταν ότι καταυτόν τον τρόπο οι μαθητές και των τριών τάξεων του Γυμνασίου θα βρίσκονται σε επαφή και με τις δύο αυτές θεματικές περιοχές σε όλη τη διάρκεια του έτους, για να μπορούν, έτσι, να αφομοιώνουν αλλά και να συγκρατούν-σταθεροποιούν , καλύτερα τις έννοιες των περιοχών αυτών. Εξαλείφεται έτσι το φαινόμενο ομοειδείς ενότητες να απέχουν χρονικά μεταξύ τους αρκετούς μήνες. Παράλληλα, ελήφθη μέριμνα, τόσο κατά την σύνταξη των Α.Π.Σ., όσο και κατά την συγγραφή των διδακτικών εγχειριδίων των Μαθηματικών του Γυμνασίου, ώστε να εξασφαλίζεται:

- Η αλληλεπίδραση, η αλληλοτροφοδότηση και η μέγιστη δυνατή διασύνδεση των εννοιών των δύο αυτών θεματικών περιοχών και
- Η εναρμόνιση της έκθεσης της ύλης των δύο μερών (π.χ. διδασκαλία των αρρήτων μετά το Πυθαγόρειο Θεώρημα κτλ.), ώστε να έχουν διδαχτεί οι προαπαιτούμενες γνώσεις από τη μια θεματική περιοχή για τη διδασκαλία ενοτήτων της άλλης θεματικής περιοχής.

Παρεμβάσεις που αποτυπώνουν την εμπειρία της κάθε σχολικής χρονιάς γίνονται μέσω οδηγιών. Ενδεικτικά αναφέρω Την απάλειψη της ομοιοθεσίας από τα Μαθηματικά της Γ Γυμνασίου. Είχε χρησιμοποιηθεί για τον ορισμό των όμοιων σχημάτων για να εγκαταλειφτεί στη συνέχειαγια το λόγο ότι είναι μία έννοια που δεν ξαναεμφανίζεται στα Μαθηματικά του Λυκείου και ότι η ομοιότητα σχημάτων μπορεί να οριστεί και διαφορετικά.

<u>Β.</u> Στο Λύκειο έγινε αναμόρφωση του βιβλίου της Άλγεβρας της Ά Λυκείου. Με αφορμή τη θέση του κεφαλαίου των εξισώσεων-ανισώσεων πριν από το κεφάλαιο των συναρτήσεων αναπτύχθηκε ένας έντονος διάλογος. Ενδεικτικά: Η ιστορική εξέλιξη των μαθηματικών εννοιών εμφανίζει πρώτα τις εξισώσεις και μετά τις συναρτήσεις. Η μελέτη των εξισώσεων – ανισώσεων (αρχικά) μέσα από την μελέτη των συναρτήσεων εγείρει και επιφυλάξεις για το λόγο ότι η έννοια της συνάρτησης δεν είναι από τις ευκολότερες στα Μαθηματικά, η δε εξέλιξή της παρουσιάζει ιδιαίτερη μεταβλητότητα καθώς ανεβαίνουμε τάξη και βαθμίδα. Σε κάθε περίπτωση ωστόσο θα πρέπει να επιδιώκεται η μέγιστη δυνατή σύνδεση ανεξάρτητα από το «τι θα προηγηθεί» καθόσον μέσα από την κάθε προσέγγιση διδάσκουμε πολλές φορές και διαφορετικά μαθηματικά Για παράδειγμα η λύση μιας ανίσωσης μέσω συναρτήσεων στηρίζεται στην ερμηνεία της γραφικής παράστασης, ενώ η αλγεβρική της επίλυση στην κατοχή του αλγεβρικού λογισμού (αναφέρουμε και σχετικό παράδειγμα στο μέρος για τη διαχείριση των περιεχομένων). Άλλες παρεμβάσεις έγιναν μέσω οδηγιών με χαρακτηριστικότερες τις παρακάτω:

- Απάλειψη του αόριστου ολοκληρώματος στη Γ τάξη στα Μαθηματικά θετικής και Τεχνολογικής κατεύθυνσης. Παρά το ότι διευκολύνει στον υπολογισμό των ορισμένων ολοκληρωμάτων, όμως δημιουργεί σύγχυση στους μαθητές σε περιπτώσεις για παράδειγμα ισότητας αόριστων ολοκληρωμάτων ή πρόσθεσης (τι ακριβώς σημαίνει πρόσθεση οικογένειας συναρτήσεων και τι άθροισμα οικογένειας συναρτήσεων). Άλλωστε στόχος του προγράμματος δεν είναι τόσο η πλήρης παρουσίαση των τεχνικών υπολογισμού ολοκληρωμάτων, όσο η ανάδειξη της δύναμης του διαφορικού λογισμού στη μελέτη προβλημάτων.
- Απάλειψη της διδασκαλίας ασκήσεων που αναφέρονται στη συνάρτηση ολοκλήρωμα. Η «παρουσία» της στο Π.Σ. εξυπηρετεί έναν πολύ συγκεκριμένο στόχο: αυτόν της απόδειξης του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού. Εν τούτοις το συγκεκριμένο μαθηματικό αντικείμενο «αυτονομήθηκε» στη συνέχεια με αποτέλεσμα να αφιερώνεται διδακτικός χρόνος σε επίλυση ασκήσεων έξω από τους στόχους της διδασκαλίας του μαθήματος.

Β. Για την διαχείριση των περιεχόμενων

Τα Μαθηματικά αποτελούν ένα ιδιαίτερο αντικείμενο μάθησης. Η ευρέως αναγνωρισμένη ισχύς και αξία τους ως ένας τομέας του ανθρώπινου πολιτισμού, με σημαντική συνεισφορά στην ανάπτυξη της ατομικής και της συλλογικής σκέψης, καθιστά την επιτυχημένη μαθητεία σε αυτά καθοριστικό παράγοντα της γνωστικής και, κατ’ επέκταση, της ακαδημαϊκής ανάπτυξης και της επαγγελματικής ανέλιξης κάθε πολίτη.

Ποια είναι, όμως, εκείνα τα στοιχεία τα οποία καθιστούν τα μαθηματικά ένα τόσο ξεχωριστό αντικείμενο μάθησης αλλά και διδασκαλίας; Από τη βιβλιογραφία (Sweller , J., 1994; Dubinsky, E., 2000; Dorfler, W., 2002; Duval, R., 2006; MorenoL. A., &Sriraman, . B. 2010) αντλούμε μερικά από αυτά τα στοιχεία :

- η ιδιαίτερη (φυσική και συμβολική) γλώσσα έκφρασης της μαθηματικής νοητικής δράσης.

- Η μεγάλη ποικιλία σημειωτικών αναπαραστάσεων στα Μαθηματικά
- Τα «υλικά» από τα οποία αποτελούνται τα Μαθηματικά ενσωματώνουν ένα υψηλό επίπεδο διαδραστικότητας μεταξύ τους
- Τα Μαθηματικά εμφανίζουν υψηλό βαθμό αφαίρεσης και τυποποίησης.
- Ο τρόπος τεκμηρίωσης των μαθηματικών συλλογισμών.

Μέσω της αξιοποίησης των παραπάνω χαρακτηριστικών κατά την διαχείριση των μαθηματικών περιεχομένων, αναδεικνύεται ένας ιδιαίτερος τρόπος σκέψης και συλλογισμού με ζητούμενο πάντα την κατανόηση. Ο όρος «κατανόηση» χρησιμοποιείται σε πάρα πολλούς τύπους και εκφράσεις στον καθημερινό λόγο. Στο πλαίσιο των Μαθηματικών, συχνά μιλάμε για κατανόηση μαθηματικών εννοιών γενικά ή για κατανόηση συγκεκριμένων μαθηματικών εννοιών όπως αριθμοί, συνάρτηση, όριο μιας ακολουθίας ,γραμμική ανεξαρτησία διανυσμάτων κ.τ.λ. ‘’Καταλαβαίνω’’ κάτι σημαίνει ότι μπορώ να το εξηγήσω σε σχέση με την προηγούμενη γνώση μου, με άλλα λόγια ξανακατασκευάζω αυτό στο μυαλό μου. Για παράδειγμα πριν ο μαθητής κάνει χρήση ενός τύπου θα πρέπει να έχει ‘’καταλάβει’’ αυτόν δηλαδή να μπορεί να κρίνει ποιοί όροι είναι σταθερές και ποιοί μεταβλητές. Η κατανόηση εξαρτάται από τις σχέσεις που το άτομο σχηματίζει μεταξύ τμημάτων της γνώσης του. Αυτές οι σχέσεις μπορεί να είναι μεταξύ νέας και υπάρχουσας γνώσης καθώς επίσης και μεταξύ τμημάτων της υπάρχουσας. Μάλιστα όσο περισσότερες είναι αυτές οι συνδέσεις τόσο ενισχύεται και η ποιότητα της κατανόησης. Και η μάθηση των Μαθηματικών εντάσσεται σε ένα δίκτυο. γνώσης (Davis 1984; Hatano, G.,1996; SkourasA., 2006) . Στο πνεύμα αυτό η μάθηση ενός περιεχομένου δεν είναι κάτι το «ξεχωριστό» αλλά μέρος ενός δικτύου, μέσα στο οποίο θα πρέπει να αναδειχθεί η θέση του, ώστε να αποκτήσει «νόημα» για το μαθητευόμενο. Ένα δίκτυο μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών δημιουργείται γύρω από μια «θεμελιώδη ιδέα». Για παράδειγμα στην περίπτωση της πρόσθεσης ετερώνυμων κλασμάτων, η «θεμελιώδης ιδέα» είναι η έννοια των ισοδύναμων κλασμάτων, η οποία στηρίζεται σε μια άλλη «θεμελιώδη ιδέα», δηλαδή, ότι, οι αριθμοί, διατηρώντας την αξία τους, μπορούν να αναπαρασταθούν με διάφορους τρόπους, ως κλάσματα, ως δεκαδικοί, ως ποσοστά κ.ά. Με πολύ χαρακτηριστικό τρόπο ο Hardy (1990, σελ. 69) αναφέρεται σε αυτό το δίκτυο : « Το σκακιστικό πρόβλημα είναι το προϊόν ενός ιδιοφυούς αλλά πολύ περιορισμένου πλέγματος ιδεών, οι οποίες δεν διαφέρουν ουσιαστικά από το ένα πρόβλημα στο άλλο και ούτε έχουν εξωτερικές επιπτώσεις. Θα σκεφτόμασταν με τον ίδιο ακριβώς τρόπο ακόμα και αν το σκάκι δεν είχε εφευρεθεί ποτέ , ενώ τα θεωρήματα του Ευκλείδη και του Πυθαγόρα έχουν επηρεάσει βαθειά τη σκέψη, και μάλιστα έξω από τον κύκλο των Μαθηματικών ».

Μερικά από τα παρακάτω παραδείγματα δείχνουν πως προβάλλεται η θεωρία στην καθημερινότητα της εκπαιδευτικής διαδικασίας.

Παράδειγμα 1^{ο}. Από μια απλή ρητοποίηση παρονομαστή μπορεί να «πυροδοτηθεί» ένας διάλογος στην τάξη. Η «εικόνα» που έχουμε για τον αριθμό $\frac{1}{\sqrt{2}}$ αλλάζει μέσα από την «ρητοποίηση» του παρονομαστή του, $\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, αφού τώρα θα μπορούμε να τον παραστήσουμε στον άξονα των πραγματικών αριθμών. Με αυτή τη σύντομη διαδικασία διατρέχουμε ωστόσο ένα δίκτυο γνώσης.

Παράδειγμα 2^{ο}. Τα Μαθηματικά είναι το πεδίο μέσα στο οποίο συναντάμε το μεγαλύτερο εύρος συστημάτων σημειωτικών αναπαραστάσεων, τόσο εκείνων που είναι κοινά σε κάθε είδος σκέψης, όπως η φυσική γλώσσα, όσο και εκείνων που είναι ειδικά για τα Μαθηματικά, όπως οι αλγεβρικοί και οι τυπικοί συμβολισμοί Τα μαθηματικά αντικείμενα (αριθμοί, συναρτήσεις, διανύσματα, κλπ), σε αντίθεση με φαινόμενα της Αστρονομίας, της Φυσικής, της Χημείας, της Βιολογίας, κλπ., δεν είναι ποτέ προσβάσιμα μέσω των αισθήσεων ή των οργάνων

(μικροσκόπια, τηλεσκόπια, διατάξεις μετρήσεων Κανένα είδος μαθηματικής διαδικασίας δεν μπορεί να εκτελεσθεί χωρίς τη χρήση ενός σημειωτικού συστήματος αναπαράστασης Οι διαδικασίες για να γίνει μία αριθμητική πράξη εξαρτάται τόσο από το σύστημα αναπαράστασης που χρησιμοποιείται για τους αριθμούς, όσο και από τις μαθηματικές ιδιότητες των πράξεων. Έτσι, οι αλγόριθμοι είναι διαφορετικοί για ένα δεκαδικό και για ένα κλασματικό συμβολισμό των ίδιων αριθμών. Ενδεικτικά:

0,20 + 0,25 = ... 1/5 + 1/4 = ... *0,999...=1*

0,20 : 0,25 = ... 1/5 : 1/4 = ...

Στην καθημερινότητα της εκπαιδευτικής διαδικασίας θα πρέπει να καλλιεργείται η ικανότητα του μαθητή να κινείται και να χρησιμοποιεί μια ποικιλία από αναπαραστάσεις στις οποίες θα αναγνωρίζει τα αναπαριστώμενα μαθηματικά. Ταυτόχρονα η αναγνώριση του ίδιου αναπαριστώμενου μαθηματικού αντικειμένου σε διαφορετικά πλαίσια διευκολύνει και την επίλυση προβλημάτων. Μάλιστα η ικανότητα μετάβασης από ένα σύστημα αναπαραστάσεων σε ένα άλλο είναι πολύ συχνά το κρίσιμο κατώφλι για την πρόοδο στη μάθηση και στην επίλυση προβλημάτων (Duval, R., 2006).

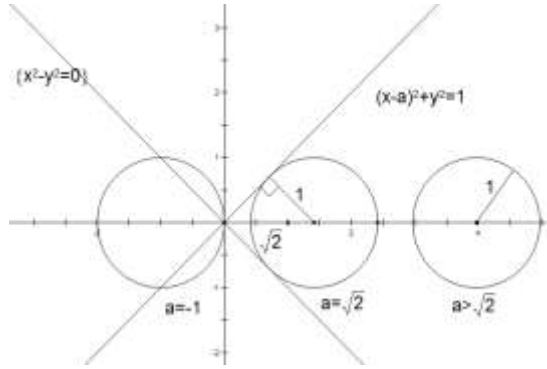
Στο πρόβλημα : για ποιες τιμές του α το σύστημα των εξισώσεων

$x^2 - y^2 = 0$

$(x-\alpha)^2 + y^2 = 1$

Έχει 0,1,2,3,4, ή 5 λύσεις

Είναι πολύ εύκολο να «βαλτώσουμε» σε αλγεβρικούς υπολογισμούς. Εν τούτοις η υπόδειξη προς το μαθητή «*να σχεδιασει ένα διάγραμμα αν τούτο είναι δυνατόν*» καθιστά το πρόβλημα προσιτό.



Πράγματι όταν θεωρήσουμε ότι η εξίσωση $(x-\alpha)^2 + y^2 = 1$ παριστάνει έναν κύκλο κέντρου (α,0) τότε το κέντρο του θα κινείται –άρα και ο κύκλος –κατά μήκος του άξονα χ΄χ. Αυτή η κίνηση του κύκλου διευκολύνει να δούμε ότι ή δεν υπάρχουν καθόλου λύσεις , ή υπάρχουν δύο λύσεις (στα σημεία με τετμημένες $\pm\sqrt{2}$) ή τρεις λύσεις ($|\alpha| = 1$), ή τέσσερις λύσεις (όταν $|\alpha| < \sqrt{2}$ και ο α διάφορος του 0 , 1, -1). (Schoenfeld , A. 1980. p. 11)

Η πολυσημία των διαφορετικών αναπαραστάσεων της ίδιας έννοιας, επιβάλλει ό,τι διδάσκεται και αναδεικνύεται σε ένα πλαίσιο αναπαράστασης θα πρέπει να ερμηνεύεται, επεξηγείται και εν τέλει συμπληρώνεται μέσα από ένα άλλο πλαίσιο.

Για παράδειγμα :

Η λύση της ανίσωσης $x^2 - \frac{1}{x} > 0$ αλγεβρικά, ακολουθεί τον παρακάτω αλγόριθμο:

$$x^2 - \frac{1}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

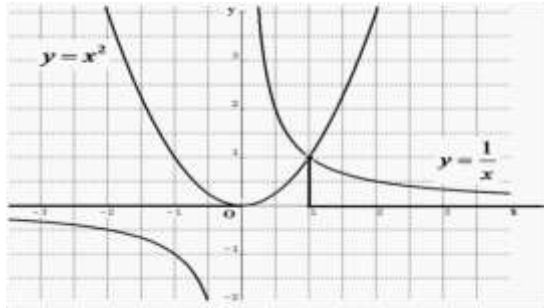
$$\frac{x^2 - 1}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{(x-1)(x^3 + x + 1)}{x} > 0 \quad \Leftrightarrow$$

$$x(x-1)(x^2 + x + 1) > 0 \quad \Leftrightarrow$$

Η γραφική λύση της ανίσωσης $x^2 - \frac{1}{x} > 0$ θα προκύψει μέσα από τον παρακάτω συλλογισμό:

Αν f(x)= x^2 και g(x)= 1/x, ζητάμε τις τιμές του x για τις οποίεςf(x)-g(x)>0, δηλαδή f(x)>g(x), δηλαδή ζητάμε τις τιμές του x για τις οποίες η γραφική παράσταση της φ είναι «πάνω» από την γραφική παράσταση της g , κάτι το οποίο φαίνεται και στο παρακάτω σχήμα:



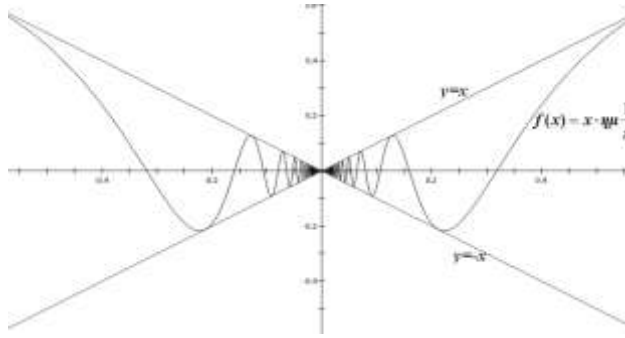
- Η αλγεβρική λύση προυποθέτει γνώση του αλγεβρικού λογισμού (πρόσθεση κλασμάτων, απαλοιφή παρονομαστών, πρόσημο γινομένου). Δηλαδή η αλγεβρική λύση δίδει τον αλγόριθμο επίλυσης της ανίσωσης.
- Η γραφική λύση ερμηνεύει και επεξηγεί τι σημαίνει $x^2 > \frac{1}{x}$ στο γραφικό επίπεδο και πως η λύση προβάλλεται στον χ΄χ, ενώ σε καμμιά περίπτωση δεν μπορεί να εξηγήσει τον τρόπο απαλοιφής των παρονομαστών
- Δεν θα πρέπει να θεωρείται δεδομένο ότι όταν οι μαθητές λύνουν γραφικά μια ανίσωση μαθαίνουν τα ίδια Μαθηματικά όπως όταν λύνουν την ίδια ανίσωση αλγεβρικά

Παράδειγμα 3^{ο}. Σχετικά τώρα με τον τρόπο τεκμηρίωσης των μαθηματικών ισχυρισμών. Αν μέσω της απόδειξης «επισημοποιείται» η αλήθεια μιας μαθηματικής δήλωσης, με τη χρήση ενός παραδείγματος είναι δυνατόν να αποκαλυφθεί το λάθος ενός ισχυρισμού (Συνηθίζουμε να το ονομάζουμε τότε Αντιπαράδειγμα). Και στην κοινωνία της πληροφορίας αποτελεί σπουδαία ικανότητα η λήψη αποφάσεων για την αξιοπιστία ενός ισχυρισμού. Γενικότερα ο κεντρικός ρόλος των «παραδειγμάτων» στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών αναγνωρίζεται στη βιβλιογραφία (Zazkis,R&Chernoff, J, E., (2008).

Παραθέτω από τη Διαχείριση της Διδακτέας-Εξεταστέας ύλης των Μαθηματικών της Γ΄ τάξης ΓΕΛ για το σχ. έτος 2016-2017 ένα, σχετικό με τα παραπάνω, απόσπασμα που αφορά στην παράγραφο 1.4

Να τονιστεί, επίσης, ότι η ύπαρξη του ορίου δεν συνεπάγεται μονοτονία, κάτι που όπως προκύπτει από τη βιβλιογραφία είναι συνηθισμένη παρανόηση των μαθητών, ούτε όμως και τοπική μονοτονία δεξιά και αριστερά του , δηλαδή μονοτονία σε ένα διάστημα αριστερά του και σε ένα διάστημα δεξιά του . Για το σκοπό αυτό μπορεί να χρησιμοποιηθούν γραφικές

παραστάσεις κατάλληλων συναρτήσεων, που θα σχεδιαστούν με τη βοήθεια λογισμικού, όπως είναι για παράδειγμα η συνάρτηση $f(x) = x \cdot \eta\mu \frac{1}{x}$



ΑΝΤΙ ΕΠΙΛΟΓΟΥ

Η μεγάλη επίδραση της διαχείρισης των περιεχομένων στη διδασκαλία και μάθηση των μαθηματικών επιβεβαιώνεται και από διεθνείς συγκριτικές μελέτες. Σύμφωνα με τον διεθνή διαγωνισμό ΤΙΜΣΣ, συγκριτική μελέτη των αποτελεσμάτων δείχνει ότι μεταξύ των χωρών που έχουν τις υψηλότερες επιδόσεις υπάρχει ένα ευρύ πεδίο διαφορετικών πρακτικών που εφαρμόζονται στην τάξη. Υπάρχει όμως ένα κοινό χαρακτηριστικό που διατηρείται και αυτό είναι ο τρόπος με τον οποίο παρουσιάζονται οι μαθηματικές έννοιες (Watson, A., andGeest, E., 2005). Και μια μαθηματική εκπαίδευσης που θα απελευθερώνει και θα φωτίζει το κρυμμένο δυναμικό των Μαθηματικών έχει ανάγκη από τέτοιες προσεγγίσεις των δασκάλων των Μαθηματικών.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

Clements, D. H. &Sarama, J. (2009). *Learning and teaching early math: the learning trajectory approach*. New York & London: Routledge.

Consortium for Policy Research in Education (2011). *Learning Tranjectories in Mathematics A Foundation for Standards, Curriculum, Assessment, and Instruction / CPRE.*

Daro, P., (2010). *Standards, what's the difference?: A view from inside the development of the Common Core State Standards in the occasionally United States.* Research Conference 2010

Davis, R. B., (1984*) Learning Mathematics: The cognitive science to mathematics Education*, Ablex, Norwood, NJ.

Dorfler, W. (2003) Mathematics and Mathematics Education: Content and People, Relation and Difference. *EducationalStudiesinMathematics*, 54, 147-170.

Dorfler, W. (2002). Formation of Mathematical Objects as Decision Making. MATHEMATICAL THINKING AND LEARNING, *4*(4), 337–350, Lawrence Erlbaum Associates, Inc.

Dubinsky, E, (2000). Meaning and Formalism in Mathematics, . *InternationalJournalofComputersforMathematicalLearning, 5, 211-240, Kluver Academic Publishers*.

Duval, R., (2006): ACognitiveAnalysisof Problems of Comprehension in a Learning of Mathematics. *EducationalStudiesinMathematics* 61: 103-131.

Hardy , G,. H. (1990) Η Απολογία ενός μαθηματικού , Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης

Hatano, G.: 1996, 'A Conception of Knowledge Acquisition and its Implications for Mathematics Education', in Steffe L. and Nesher P. (eds.), *Theories of Mathematical Learning,* LEA, pp.197-217.

Hiebert, J. (2003) What research says about the NCTM Standards, in: J. Kilpatrick, W. G. Martin & D. Schifter (Eds) *A research companion to principles and standards for school mathematics* Reston, VA, NCTM), 5–23.

Kilpatrick, J., Swafford, J. & Findell, B. (Eds) (2001) Adding it up: helping children learn mathematics(Washington, DC, National Academy Press).

Kleine , M. (1990) Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης . Ηαποτυχία τωνμοντέρνωνΜαθηματικών. Εκδόσεις Βάνιας, Θεσσαλονίκη.

Lerman, (2004) Learninghowtobeinthemathematicsclassroom, in: B. Clarke, D. M. Clarke, G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby&K. Wallby (Eds). *International perspectives on learning and teaching mathematics* (Go¨teborg, National Center for Mathematics Education), 339–350.

LuisMorenoArmellaandBharathSriraman. (2010), . Symbols and Mediation in Mathematics Education . In Shiraman , B. & English , L. (Eds). *Theories of Mathematics Education*, 213-232, Springer.

Marja van den Heuvel—Panhuizen (2005). Can scientigfic research answer the ‘’what;; question of mathematicw education? *Cambridge Journal of Education*, Vol. 35, No 1, March 2005, pp. 35-53.

Heuvel – Panhuizen, M. (2001). *Children learn mathematics: a learning – teaching trajectory with intermediate attainment targets for calculation with whole numbers in primary school*. Utrecht: Freudenthal Institute & National Institute for Curriculum Development.

Mullis, V.S. Ina, Martin, O. & Foy, P. (2005). IEA’s TIMSS 2003 International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domain. Findings from a Developmental Project. *International Association for the Evaluation of Educational Achievement* (IEA).

N.A.E.P. (2003). Mathematics Framework for 2005, National Assessment of Educational Progress, N.A.G.B.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *“Principles and Standards for School Mathematics”.*

Schoenfeld , A.(1980) .Heuristics in the Classroom. In Krulik, S. & Reys, R. E. (Eds.) *Problem Solving in School Mathematics* (pp. 9—22). 1980 Yearbook, NCTM,

Schoenfeld, A., (2000). *Purposes and Methods of Research in mathematics education*, Notices of the A.M.S, Vol.47, Number 6, 641-649.

Schoenfeld, A., (2004)).The math wars. EducationalPolicy , 18(1), 253-286

Skouras A. (2006). Coordinating formal and informal aspects of mathematics in a computer based learning environment. Int J Math Educ Sci Technol. 2006;37(8):947–964.

Sriraman , B. & English , L. (2010) Surveing Theories and Philosophies of Mathematics Education, in B. Sriraman & L. English (Eds). *Theories of Mathematics Education , Seeking New Frontiers* (7-32). Springer

Sweller , J., (1994). Cognitive Load Theory , Learning Difficulty ,and Instructional Design. *Learning and Instruction*, Vol. 4, pp. 293-312.

Watson, A., and Geest, E., (2005). Principled Teaching for Deep Progress: Improving Mathematical Learning Beyond Methods and Materials, *EducationalStudiesinMathematics* Vol. 58, Issue 2, pp. 209-234

Valverde, G. A., Bianchi, L. J., Wolfe, R. G., Schmidt, W. H. & Houang, R. T. (2002) According to the book. Using TIMSS to investigate the translation of policy into practice through the world of textbooks (Dordrecht, Kluwer Academic Publishers).

Wittmann, E. (2004) Assessing preschoolers’ geometric knowledge, in: B. Clarke, D. M. Clarke,G. Emanuelsson, B. Johansson, D. V. Lambdin, F. K. Lester, A. Wallby & K. Wallby (Eds). *International perspectives on learning and teaching mathematics* (Goteborg, National Center forMathematics Education), 113–126.

Zazkis,R&Chernoff, J, E., (2008). What makes a counterexample exemplary?. Educ Stud Math 68:195–208

Usiskin, Z. (1999). Is there a worldwide mathematics curriculum? In Z. Usiskin (Ed.), *Developments in mathematics educationaround the world, Volume 4* (pp. 213–227). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

ΛάθηΟφειλόμεναστουςΟρισμούςκαιταΘεωρήματατηςΑνάλυσης

ΝίκοςΙωσηφίδης, Μαθηματικός

Εισαγωγή

Σήμερα όλες οι μαθηματικές θεωρίες είναι θεμελιωμένες με την βοήθεια αρχικών εννοιών, αξιωμάτων και ορισμών και δεν μπορεί να υπάρξει διαφωνία σε κανένα θέμα. Κάθε διαφωνία μπορεί να αναχθεί στα αξιώματα και τους ορισμούς της εκάστοτε θεωρίας. Με τον τρόπο αυτό σίγουρα η διαφωνία θα εκλείψει.

Εδώ θα υιοθετήσουμε πλήρως τους ορισμούς του σχολικού βιβλίου της Ανάλυσης και με βάση αυτούς θα επισημάνουμε τα σημαντικότερα λάθη και παραλείψεις.

Τα περισσότερα λάθη στην Ανάλυση οφείλονται

- Στην παράβλεψη ή την λάθος χρήση των ορισμών και των θεωρημάτων, στην παρανόησή τους ή στην αυθαίρετη επέκτασή τους που δεν είναι πάντοτε αληθής.
- Στην λάθος χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$
- Στην χρήση του αντιστρόφου θεωρήματος που δεν ισχύει πάντοτε ή στην λάθος χρήση της άρνησης του θεωρήματος.

Θα αναλύσουμε μερικά αντιπροσωπευτικά λάθη από την $1^{η}$ και $3^{η}$ κατηγορία.

Για να αποφύγουμε τις πολλές επαναλήψεις και επεξηγήσεις, στο εξής, όταν αναφερόμαστε σε σύνολο με την ονομασία Δ θα εννοούμε ότι το Δ είναι διάστημα και στην περίπτωση αυτή με Δ_0 θα εννοούμε το εσωτερικό του διαστήματος.

Α) Λάθη οφειλόμενα στους ορισμούς

Στην κατηγορία αυτή οφείλονται τα περισσότερα λάθη και είναι διαφόρων ειδών.

1) Σύγχυση ορισμού και θεωρήματος:

Μια κατηγορία λαθών οφείλεται στο ότι όλοι οι συγγραφείς δεν δίνουν ακριβώς τους ίδιους ορισμούς για κάθε έννοια.

Π.χ. Στο σχολικό βιβλίο λοιπόν της Ανάλυσης, ο ορισμός της συνάρτησης 1-1 είναι ο εξής:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ **λέγεται συνάρτηση 1-1, όταν για οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in A$**, ισχύει η συνεπαγωγή: αν** $x_1 \neq x_2$**, τότε** $f(x_1) \neq f(x_2)$

Με την βοήθεια του ορισμού αυτού αποδεικνύεται το εξής θεώρημα:

Μια συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ **είναι συνάρτηση 1-1, αν και μόνο αν για οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in A$ **ισχύει η συνεπαγωγή: αν** $f(x_1) = f(x_2)$**, τότε** $x_1 = x_2$

Επειδή για την λύση των ασκήσεων χρησιμοποιείται συνήθως το θεώρημα, αλλά και σε πολλά βιβλία (μη σχολικά βοηθήματα) ως ορισμός δίνεται το θεώρημα του σχολικού βιβλίου, συχνό λάθος γίνεται στο ερώτημα:

Πότε μια συνάρτηση λέγεται 1-1;

Κάποιοι μαθητές δεν θα δώσουν ως απάντηση τον ορισμό, αλλά το θεώρημα.

Η διάκριση μεταξύ ορισμού και θεωρήματος είναι απαραίτητη για την αποφυγή τέτοιων λαθών.

Σχετικό είναι και το επόμενο λάθος:

Η συνάρτηση $f: A \to \mathbb{R}$ **λέγεται 1-1 αν και μόνο αν για κάθε** $x_1, x_2 \in A$ **ισχύει** $x_1 \neq x_2 \Leftrightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$

Η ισοδυναμία δεν είναι λάθος, όμως ο ορισμός έχει συνεπαγωγή και όχι ισοδυναμία.

Το ίδιο λάθος γίνεται και με τον ορισμό της γνησίως αύξουσας συνάρτησης.

Ο ορισμός του σχολικού βιβλίου είναι:

Μια συνάρτηση f λέγεται γν. αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ **με** $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Είναι λάθος να δώσουμε ως ορισμό τον παρακάτω:

Μια συνάρτηση f λέγεται γν. αύξουσα σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της αν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ **ισχύει:** $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$

Η αντίστροφη συνεπαγωγή είναι συμπέρασμα που μπορεί να αποδειχθεί, επομένως η παραπάνω πρόταση (με την σημασία της γραμματικής) είναι θεώρημα και όχι ορισμός.

2) Μη ισοδύναμοι ορισμοί

Συνήθως, οι διαφορετικοί ορισμοί για την ίδια έννοια είναι ισοδύναμοι, δηλαδή από τον κάθε ορισμό προκύπτει ο άλλος ως συμπέρασμα (θεώρημα).

Αυτό όμως δεν συμβαίνει πάντοτε. Η μη ισοδυναμία των ορισμών για την ίδια έννοια δημιουργεί λάθη όπως το παρακάτω:

Ο ορισμός της μονοτονίας στο τωρινό σχολικό βιβλίο είναι ο εξής:

Μια συνάρτηση f λέγεται

- **Γνησίως αύξουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in \Delta$ **με** $x_1 < x_2$ **ισχύει** $f(x_1) < f(x_2)$
- **Γνησίως φθίνουσα σ' ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε** $x_1, x_2 \in \Delta$ **με** $x_1 < x_2$ **ισχύει** $f(x_1) > f(x_2)$

Ο ορισμός της μονότονης συνάρτησης λοιπόν στο ισχύον σχολικό βιβλίο δίνεται μόνο σε διάστημα. Έτσι δεν έχει νόημα η έκφραση "η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο $A = (1,2) \cup (2,3)$" αφού το A δεν είναι διάστημα.

Στο προηγούμενο σχολικό βιβλίο (επί Δεσμών) ο ορισμός της μονοτονίας δίνονταν σε οποιοδήποτε σύνολο. Έτσι σε λυμένο παράδειγμα του σχολικού βιβλίου για να μελετηθεί η μονοτονία της $f(x) = \frac{\alpha}{x}$, με $\alpha > 0$, αποδεικνύεται ότι η f είναι γν. φθίνουσα σε καθένα από τα διαστήματα $(-\infty, 0)$ και $(0, +\infty)$ και κατόπιν αποδεικνύεται ότι η f δεν είναι γν. φθίνουσα στην ένωση $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ παρατηρώντας ότι $f(-1) < f(1)$.

Σύμφωνα με τον ορισμό αυτό (βιβλίο Δεσμών) αποδεικνύεται ότι αν η f είναι γν. μονότονη (οπότε υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}), η f^{-1} είναι γν. μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας. Η πεποίθηση αυτή παρέμεινε ως σήμερα και πολύ συχνά βλέπουμε την χρήση του θεωρήματος αυτού. Τι ακριβώς ισχύει όμως με το τωρινό σχολικό βιβλίο;

Ισχύει τώρα το εξής:

Αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στο διάστημα Δ (οπότε υπάρχει η αντίστροφή της f^{-1}**), η** f^{-1} **έχει την ιδιότητα:**

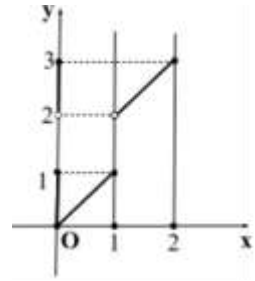
Για κάθε $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ **με** $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$

Αυτό όμως δεν αρκεί για να πούμε ότι η f^{-1} είναι γν. αύξουσα. Για να πούμε ότι η f^{-1} είναι γν. αύξουσα στο $f(\Delta)$ πρέπει το $f(\Delta)$ να είναι διάστημα. Το $f(\Delta)$ είναι σίγουρα διάστημα αν η f είναι συνεχής. Αν όμως η f δεν είναι συνεχής τότε το $f(\Delta)$ μπορεί να μην είναι διάστημα όπως φαίνεται στο παρακάτω παράδειγμα.

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x & \text{αν } x \in [0,1] \\ x+1 & \text{αν } x \in (1,2] \end{cases}$

Ονομάζουμε $\Delta_1 = [0,1]$, $\Delta_2 = (1,2]$

Το πεδίο ορισμού της f είναι το κλειστό διάστημα $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = [0,2]$ και εύκολα αποδεικνύεται ότι η f είναι γν. αύξουσα στο Δ. Το σύνολο τιμών της είναι το σύνολο $f(\Delta) = f(\Delta_1) \cup f(\Delta_2) = [0,1] \cup (2,3]$ το οποίο δεν είναι διάστημα. Έτσι δεν μπορούμε να ομιλούμε για μονοτονία της f^{-1}. Μπορούμε όμως να πούμε ότι για κάθε $y_1, y_2 \in f(\Delta)$ με $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$.



Μετά από το παράδειγμα αυτό δημιουργείται η υποψία για το τι γίνεται με την μονοτονία της σύνθεσης δύο συναρτήσεων. Η υποψία δημιουργείται για το πεδίο ορισμού της σύνθεσης, αν δηλαδή είναι υποχρεωτικά διάστημα ή όχι.

Ισχύει το εξής:

Αν οι συναρτήσεις $f: A \to \mathbb{R}$ και $g: B \to \mathbb{R}$ είναι γν. μονότονες και ορίζεται η σύνθεση $g \circ f: \Gamma \to \mathbb{R}$ και το Γ δεν είναι μονοσύνολο, τότε η $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα αν οι συναρτήσεις f και g έχουν το ίδιο είδος μονοτονίας, ενώ η $g \circ f$ είναι γν. φθίνουσα αν οι συναρτήσεις f και g έχουν διαφορετικό είδος μονοτονίας.

Στην αιτιολόγηση που βλέπουμε συχνά (μονίμως θα έλεγα) παραλείπεται η απόδειξη ότι το πεδίο ορισμού της σύνθεσης είναι διάστημα. Η απόδειξη αυτή είναι η εξής:

Είναι: $\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$

Έστω $x_1, x_2 \in \Gamma$ με $x_1 < x_2 \overset{f\uparrow}{\Rightarrow} f(x_1) < f(x_2) \overset{g\uparrow}{\Rightarrow} g(f(x_1)) < g(f(x_2)) \Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$

Άρα η $g \circ f$ είναι γν. αύξουσα.

Όμοια γίνεται η απόδειξη και στις άλλες περιπτώσεις

Είναι όμως πράγματι το Γ διάστημα; Η απάντηση είναι καταφατική.

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι το Γ είναι διάστημα, οπότε η πρόταση ισχύει.

Για να αποδείξουμε ότι το Γ είναι διάστημα, αρκεί να αποδείξουμε ότι αν $\alpha, \beta \in \Gamma$, τότε για κάθε x με $\alpha < x < \beta$ ισχύει $x \in \Gamma$.

Πράγματι, επειδή οι f και g είναι γν. αύξουσες στα A και B, τα A και B είναι διαστήματα.

Επειδή $\alpha, \beta \in \Gamma \Rightarrow \alpha, \beta \in A$ και επειδή το A είναι διάστημα και $\alpha < x < \beta \Rightarrow x \in A$

Επίσης $\alpha < x < \beta \overset{f\uparrow A}{\Rightarrow} f(\alpha) < f(x) < f(\beta)$

Επειδή το B είναι διάστημα, $f(\alpha), f(\beta) \in B$ και $f(\alpha) < f(x) < f(\beta) \Rightarrow f(x) \in B$

Τέλος, επειδή $x \in A$ και $f(x) \in B \Rightarrow x \in \Gamma$, άρα το Γ είναι διάστημα και μπορούμε πλέον να ομιλούμε για μονοτονία της $g \circ f$.

<u>Παρατήρηση</u>

Στη διατύπωση του παραπάνω θεωρήματος προσθέσαμε τη φράση ότι το Γ δεν είναι μονοσύνολο.

Στο σχολικό βιβλίο σε δύο σημεία της παραγράφου 1.2 (το ένα σημείο στη σύνθεση συναρτήσεων) αναφέρεται κατά λέξη ότι:

"σε όλη την έκταση του βιβλίου θα ασχοληθούμε μόνο με συναρτήσεις που οι συνθέσεις τους έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων"

Η σημείωση αυτή δεν αρκεί όμως για να αγνοήσουμε την παραπάνω εξαίρεση και πρέπει να προστεθεί στην εκφώνηση του θεωρήματος. Η ίδια παρατήρηση ισχύει και για άλλα θεωρήματα (συνέχεια και παράγωγος).

3) Ελλιπείς ορισμοί

Οι ορισμοί στην Ανάλυση είναι πολύ ακριβείς και λεπτομερείς και οποιαδήποτε παρέκκλιση η διαφοροποίηση οδηγεί σε παραλείψεις ή λάθη.

Συχνά είναι τα λάθη κατά τα οποία παραλείπονται ουσιώδη μέρη του ορισμού.

Π.χ ορισμός άρτιας συνάρτησης:

Μια συνάρτηση $f : A \to \mathbb{R}$ **λέγεται άρτια, αν για κάθε** $x \in A$ **ισχύει** $f(-x) = f(x)$

Εδώ έχει ξεχαστεί η προϋπόθεση: Για κάθε $x \in A \Rightarrow -x \in A$

4) Αγνόηση των ορισμών

Συνηθισμένο είναι το φαινόμενο κατά το οποίο αγνοούνται οι ορισμοί και υιοθετούνται αυθαίρετοι ορισμοί.

Χαρακτηριστικό παράδειγμα η εύρεση του πεδίου ορισμού μιας συνάρτησης που είναι αποτέλεσμα πράξεων.

Π.χ. Πεδίο ορισμού της σύνθεσης δύο συναρτήσεων

Αν $f : A \to \mathbb{R}$ και $g : B \to \mathbb{R}$ είναι δύο συναρτήσεις, η σύνθεσή τους $g \circ f$ ορίζεται όταν το σύνολο $\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$ δεν είναι κενό. Τότε η συνάρτηση $g \circ f$ ορίζεται ως εξής:

$g \circ f : \Gamma \to \mathbb{R}$ με $(g \circ f)(x) = g(f(x))$

Το πεδίο ορισμού της $g \circ f$ δεν μπορεί να βρεθεί από τον τελικό της τύπο $g(f(x))$, αλλά σύμφωνα με τον ορισμό πρέπει να βρεθεί ως $\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\}$.

Το σύνολο αυτό δεν είναι πάντοτε ίσο με αυτό που θα προέκυπτε από τον τύπο της $g \circ f$ όπως φαίνεται και από το παρακάτω

<u>Παράδειγμα</u>

Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται ως εξής:

$$f(x) = \frac{3}{x} \text{ και } g(x) = \frac{1}{x-1}$$

Τα πεδία ορισμού των f και g είναι αντίστοιχα $A = \mathbb{R} - \{0\}$ και $B = \mathbb{R} - \{1\}$

Το πεδίο ορισμού της σύνθεσης $g \circ f$ είναι το

$$\Gamma = \{x \in A \text{ και } f(x) \in B\} = \{x \neq 0 \text{ και } \frac{3}{x} \neq 1\} = \mathbb{R} - \{0, 3\}$$

Ο τύπος της $g \circ f$ είναι $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = \dfrac{1}{\frac{3}{x} - 1} = \dfrac{x}{3-x}$

Η παράσταση $\dfrac{x}{3-x}$ ορίζεται για κάθε $x \neq 3$, δηλαδή ορίζεται και για $x = 0$

Έτσι τα πεδία ορισμού των $g \circ f$ και $h(x) = \dfrac{x}{3-x}$ δεν είναι ίσα.

Τονίζουμε ότι για το πεδίο ορισμού της $g \circ f$, ο ορισμός απαιτεί να ορίζεται και το $f(x)$ και το $g(f(x))$ και δεν αρκεί να ορίζεται το $g(f(x))$.

5) Μη ορισμένες έννοιες

Όσο και αν φαίνεται παράξενο, υπάρχουν έννοιες στα μαθηματικά που δεν έχουν οριστεί και χρησιμοποιούνται ως αυτονόητες. Τέτοιες έννοιες είναι π.χ οι

- **Λάθος πρόβλημα**
- **Αριθμός ριζών εξίσωσης**
- **Επαλήθευση προβλήματος (πότε και γιατί την κάνουμε)**
- **Εμβαδόν χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις τριών ή περισσοτέρων συναρτήσεων.**

Ο μη ορισμός των παραπάνω εννοιών πολλές φορές έχει δημιουργήσει ερωτηματικά στη λύση των ασκήσεων και κάποτε οι έννοιες αυτές πρέπει να διευκρινιστούν.

Αναλύουμε ξεχωριστά κάθε περίπτωση

Λάθος πρόβλημα

Τον ορισμό αυτό (Λάθος πρόβλημα) δεν τον συναντούμε πουθενά.

Ένας ορισμός τον οποίο υιοθετήσαμε στο [5] είναι ο εξής:

Λάθος πρόβλημα ονομάζεται ένα πρόβλημα του οποίου τα δεδομένα είναι ασυμβίβαστα.

Υπάρχει τελευταία μια τάση εδώ στην Ελλάδα, να απαλειφθεί ο όρος αυτός από τα μαθηματικά και να μην δεχόμαστε την έννοια λάθος πρόβλημα. Οι οπαδοί αυτής της τάσης ισχυρίζονται ότι δεν ενδιαφέρει αν τα δεδομένα ενός προβλήματος είναι σωστά (συμβιβαστά) ή όχι. Μας ενδιαφέρει μόνο αν από τα δεδομένα μπορούμε με συνεπαγωγές να καταλήξουμε στο συμπέρασμα. Αυτό το στηρίζουν στην λογική ότι αν η πρόταση p είναι ψευδής, τότε η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι αληθής ανεξαρτήτως του αν η q είναι αληθής ή ψευδής. Όμως κανείς από τους οπαδούς της άποψης αυτής δεν προτείνει ασκήσεις με λάθος δεδομένα. Μόνο αν συμβεί να προτείνει μια άσκηση με λάθος δεδομένα (από λάθος του βέβαια), τότε προβάλλει τον ισχυρισμό αυτό.

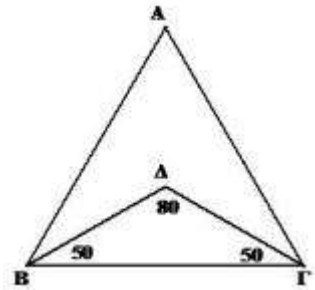
Στο [5] αναλύουμε διεξοδικά το πρόβλημα και καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι **σε ένα λάθος πρόβλημα δεν έχει νόημα καμιά απόδειξη**, επειδή μπορούμε με σωστές συνεπαγωγές να αποδείξουμε και το ζητούμενο, αλλά και το αντίθετο (άρνηση) του ζητουμένου.

Το λάθος αυτής της λογικής (ότι δηλ. δεν ενδιαφέρει η ορθότητα των δεδομένων) οφείλεται στη σύγχυση δύο διαφορετικών εννοιών: **"Λάθος πρόβλημα"** και **"Λάθος απόδειξη".**

Δίνουμε δύο παραδείγματα για απόδειξη των παραπάνω ισχυρισμών

<u>Παράδειγμα 1^{ο}</u>

Στο τρίγωνο ΑΒΓ είναι Α = Β = Γ = 100^{ο}. Να βρεθεί η γωνία των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ.



<u>Λύση 1^{η}</u>

Έστω Δ το σημείο τομής των διχοτόμων των γωνιών Β και Γ. Τότε $\hat{\Gamma B\Delta} = 50^{o}$ και $\hat{B\Gamma\Delta} = 50^{o}$, άρα από το τρίγωνο ΒΔΓ έχουμε: $B\Delta\Gamma = 180^{o} - 50^{o} - 50^{o} = 100^{o}$

<u>Λύση 2^{η}</u>

Είναι: $B\Delta\Gamma = 90^o + \frac{A^\mu}{2} = 90^o + 50^0 = 140^o$

Η διαφορά στα αποτελέσματα των δύο λύσεων αποδεικνύει ότι απόδειξη με λάθος δεδομένα είναι χωρίς νόημα.

<u>Παράδειγμα 2ο (ΘΕΜΑ 3Β, 1η ΔΕΣΜΗ, 1997)</u>

Υποθέτουμε ότι υπάρχει πραγματική συνάρτηση g παραγωγίσιμη στο R τέτοια, ώστε, υπάρχει πραγματικός αριθμός α, ώστε να ισχύει:

$g(x+y) = e^y g(x) + e^x g(y) + xy + \alpha$

Να αποδείξετε ότι:

i) $g(0) = -\alpha$

ii) $g'(x) = g(x) + g'(0)e^x + x \quad \forall x \in \mathbb{R}$

Μπορεί να αποδειχθεί ότι δεν υπάρχει τέτοια συνάρτηση (βλ. πλήρη απόδ. στο [4]). Η μη ύπαρξη συνάρτησης g με την ιδιότητα που δόθηκε μπορεί να οδηγήσει σε οποιοδήποτε παράλογο συμπέρασμα. Έτσι, με σωστές συνεπαγωγές, αποδεικνύεται με τα παραπάνω δεδομένα ότι $e = 1$.

Παρόμοια διαφωνία προέκυψε και σε θέμα που τέθηκε το 1947 στις εισαγωγικές εξετάσεις της (λεγόμενης τότε) Μαθηματικής Σχολής Αθηνών[2] όπου τα δεδομένα του προβλήματος Τριγωνομετρίας δεν ήταν συμβιβαστά.

Αριθμός ριζών εξίσωσης

Σε πολλές ασκήσεις ζητείται το πλήθος των ριζών μιας πολυωνυμικής εξίσωσης.

Π.χ. Πόσες ρίζες έχει η εξίσωση $x^3 - 3x + 2 = 0 \Leftrightarrow (x-1)^2(x+2) = 0$;

Σύμφωνα με το βασικό θεώρημα της Άλγεβρας η εξίσωση αυτή ως πολυωνυμική 3ου βαθμού έχει 3 ρίζες. Στις λύσεις όμως των προβλημάτων βλέπουμε συνήθως ότι σε τέτοιες περιπτώσεις ως αριθμός ριζών εννοείται ο 2 (δηλ. το πλήθος των διαφορετικών ριζών).

Αν δεχθούμε ότι στον αριθμό των ριζών προσμετράται και η πολλαπλότητά τους, δηλ η παραπάνω εξίσωση έχει 3 ρίζες, τότε πρέπει να αναθεωρήσουμε ή να διαφοροποιήσουμε κάποια γνωστά θεωρήματα της Ανάλυσης όπως:

Αν η συνάρτηση f είναι γν. μονότονη στο διάστημα Δ, τότε η f δεν μπορεί να έχει περισσότερες από μια ρίζα στο Δ.

Η συνάρτηση όμως $f(x) = x^3$ είναι γν. αύξουσα στο $\mathbb{R}$ αλλά έχει τρεις ρίζες στο $\mathbb{R}$, τις $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ (βλ. πλήρη ανάλυση στο [4])

Επαλήθευση μιας λύσης

Για την επαλήθευση μιας λύσης δεν βλέπουμε πουθενά κάποιον κανόνα. Πότε δηλαδή χρειάζεται επαλήθευση και γιατί. Εξαιτίας αυτού δημιουργούνται πολλά ερωτηματικά για την πληρότητα ή μη μιας λύσης. Τα ερωτήματα αυτά δεν μπορούν να απαντηθούν χωρίς κάποιον κανόνα ή συμφωνία.

Εντελώς αυθαίρετα, χωρίς καμιά μαθηματική αιτιολόγηση, υιοθετήθηκε μια "γραμμή" την οποία ακολουθούν πολλοί συγγραφείς. Εδώ θα κάνουμε επαλήθευση, εκεί όχι. Συμβαίνει πολλές φορές **για το ίδιο πρόβλημα**, άλλοτε να γίνεται επαλήθευση και άλλοτε όχι, **ανάλογα με το αποτέλεσμα της λύσης.**

Στην ανάγκη της επαλήθευσης οδηγεί συνήθως το ότι ενώ ισχύουν κάποιες συνεπαγωγές, δεν ισχύουν οι ίδιες ως ισοδυναμίες με αποτέλεσμα να μην εξασφαλίζεται η αλήθεια των δεδομένων.

---

[2] Γιάννης Θωμαΐδης: ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΓΕΝΙΚΩΝ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ, Η ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΑΠΟΔΕΙΞΗ ΚΑΙ Η ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ, περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, τεύχος 4, σελ. 28-48

Η επαλήθευση συνήθως γίνεται χωρίς κάποια αιτιολόγηση. Π.χ λύνεται μια εξίσωση με συνεπαγωγές και χωρίς καμιά εξήγηση απλά αναφέρεται ότι η λύση αυτή επαληθεύει την αρχική εξίσωση.

Ως παράδειγμα αναφέρουμε μια άσκηση του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου:

Να λυθεί η εξίσωση: $\sqrt{2x+7}-x=2$

Η λύση του σχολικού βιβλίου (έκδοση 2012, σελ. 151) είναι ακριβώς η παρακάτω:

Η εξίσωση ορίζεται για κάθε $x \in \mathbb{R}$ *με* $x \geq -\frac{7}{2}$ *. Γι αυτά τα x διαδοχικά έχουμε:*

$\sqrt{2x+7}=x+2$ *(απομονώνουμε το ριζικό)*

$(\sqrt{2x+7})^2=(x+2)^2$ *(υψώνουμε στο τετράγωνο)*

$2x+7=x^2+4x+4$

$x^2+2x-3=0$

Η τελευταία εξίσωση έχει ως ρίζες τους αριθμούς -3 και 1. Από τις ρίζες αυτές διαπιστώνουμε με επαλήθευση ότι μόνο η $x=1$ *είναι ρίζα της αρχικής.*

Στην επόμενη σελ. 152 λύνεται ακόμη μια παρόμοια άσκηση (άρρητη εξίσωση) όπου πάλι με επαλήθευση γίνεται δεκτή μια από τις δύο ρίζες που βρέθηκαν κατά την λύση.

Δεν γίνεται καμιά αναφορά γιατί τώρα χρειάζεται η επαλήθευση, ενώ μέχρι τώρα οι μαθητές δεν έβλεπαν επαλήθευση στις λύσεις των εξισώσεων.

Για τους μαθητές η παρατήρηση ότι δεκτή είναι μόνο μια ρίζα δεν έχει καμιά λογική εξήγηση.

Το πρόβλημα προέρχεται από το γεγονός ότι τα σύμβολα $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$ τώρα τελευταία εισήχθησαν στην ύλη της Α΄ Λυκείου. Το βιβλίο της Άλγεβρας της Β΄ Λυκείου δεν προσαρμόστηκε στα νέα δεδομένα, αλλά έγινε copypaste από τις προηγούμενες εκδόσεις.

Για την συντριπτική πλειονότητα των μαθητών είναι άγνωστο ότι η λύση μιας εξίσωσης απαιτεί την χρήση ισοδυναμιών και όχι συνεπαγωγών και το ότι αν γίνει χρήση συνεπαγωγών τότε η επαλήθευση είναι αναγκαία.

Άλλο σχετικό παράδειγμα είναι το εξής:

Από μια συναρτησιακή σχέση με κατάλληλες τιμές των μεταβλητών βρίσκεται μια άγνωστη συνάρτηση και απλά αναφέρεται ότι η συνάρτηση αυτή επαληθεύει τις αρχικές συνθήκες του προβλήματος, χωρίς να εξηγείται ποια ήταν η ανάγκη για την αναφορά αυτή.

Στην εισήγησή μας [5] δίνουμε έναν κανόνα που είναι ο εξής:

Η επαλήθευση ενός προβλήματος είναι αναγκαιότητα της διαδικασίας της λύσης και όχι του αποτελέσματος. Αν δηλαδή μια λύση δεν εξασφαλίζει ότι όλα τα δεδομένα του προβλήματος θα ισχύουν, τότε η επαλήθευση είναι υποχρεωτική, ενώ αν η λύση εξασφαλίζει ότι θα ισχύουν όλα τα δεδομένα, δεν χρειάζεται επαλήθευση.

Στην ανάγκη αυτή μας οδήγησε ένα θέμα Πανελλαδικών στο οποίο γίνονταν χρήση του θεωρήματος του Fermat. Για την πληρότητα της λύσης αυτής έγινε μια συζήτηση στο mathematica στην οποία υπήρχαν και οι δύο απόψεις, ότι δηλ. η επαλήθευση είναι αναγκαία και ότι η επαλήθευση δεν είναι αναγκαία.

Με βάση τον παραπάνω κανόνα επιλύεται το ερώτημα πότε χρειάζεται επαλήθευση και πότε όχι, αλλά ο κανόνας αυτός δεν είναι αποδεκτός από όλους τους συναδέλφους μας. Κάποτε όμως πρέπει να συμφωνήσουμε ώστε να εξαλειφθούν όλες οι διαφωνίες.

Για να κάνουμε πιο κατανοητό το πρόβλημα δίνουμε ένα απλό παράδειγμα σε τρεις μορφές:

1η μορφή: Να προσδιοριστεί ο α∈Ρ ώστε να ισχύει: $\alpha^x \geq x+1$ **για κάθε x∈Ρ**

2η μορφή: Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ **για κάθε x∈Ρ αποδείξτε ότι α = e**

3η μορφή: Αν ισχύει $\alpha^x \geq x+1$ **για κάθε x∈Ρ βρείτε τον α**

Η λύση του προβλήματος αυτού και στις τρεις περιπτώσεις είναι ακριβώς η ίδια και γίνεται με το θεώρημα του Fermat από το οποίο βρίσκουμε $\alpha=e$

Για όλους τους συναδέλφους χρειάζεται επαλήθευση στην 1η μορφή του προβλήματος, ενώ για τους περισσότερους συναδέλφους δεν χρειάζεται επαλήθευση στην 2η και 3η μορφή. (Για λεπτομέρειες βλ. [5])

Δική μας άποψη είναι ότι και στις 3 περιπτώσεις η επαλήθευση είναι απαραίτητη για να εξασφαλιστεί ότι για $\alpha = e$ ισχύουν τα δεδομένα του προβλήματος, δηλ. $\alpha^x \geq x+1$ για κάθε $x \in P$.

Δίνουμε και άλλο παράδειγμα από το κεφάλαιο των ορίων όπου η επαλήθευση είναι απαραίτητη. Εδώ δεν υπάρχει καμία διαφωνία. Αναφέρουμε το παράδειγμα αυτό για να δείξουμε ότι μια λύση χωρίς επαλήθευση είναι ελλιπής.

Να προσδιοριστεί ο $\alpha \in \mathbb{R}$ **ώστε** $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-4}{x-2}=6$

<u>Λύση</u>

Θέτουμε $\dfrac{\alpha x^2-4}{x-2}=f(x) \Leftrightarrow \alpha x^2-4=(x-2)f(x) \Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 2}\left(\alpha x^2-4\right)=\lim\limits_{x\to 2}\left((x-2)f(x)\right) \Leftrightarrow$
$4\alpha-4=0\cdot 6 \Leftrightarrow \alpha=1$

Στην άσκηση αυτή λύσαμε εξίσωση για την εύρεση του α χρησιμοποιώντας λάθος το σύμβολο $\Leftrightarrow$ (το 2°) (βλ. λεπτομέρειες και αναλύσεις στο [6]).

Η σωστή λύση πρέπει να γίνει με $\Rightarrow$, αλλά επειδή η λύση εξισώσεων απαιτεί ισοδυναμίες, πρέπει **<u>οπωσδήποτε</u>** να γίνει επαλήθευση.

Για $\alpha=1$ έχουμε: $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(x+2)}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2}(x+2)=4\neq 6$

Η λύση λοιπόν $\alpha=1$ απορρίπτεται.

Η απάντηση είναι ότι δεν υπάρχει τιμή του $\alpha \in \mathbb{R}$ ώστε $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-4}{x-2}=6$.

Η τιμή του α θα ήταν δεκτή μόνο αν δίνονταν ότι $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\alpha x^2-4}{x-2}=4$

Εμβαδόν μικτόγραμμου ή καμπυλόγραμμου χωρίου

Είναι το εμβαδόν που περικλείεται από 3 ή περισσότερες γραμμές (Βλ. [7] και [8]).

Πρέπει να αποσαφηνιστεί η παραπάνω έκφραση, αν δηλαδή με τον όρο αυτό εννοούμε το εμβαδόν που περικλείεται ταυτόχρονα μεταξύ όλων των γραμμών ή έστω και μεταξύ μερικών από αυτές. Αν δεν αποσαφηνιστεί πλήρως η έκφραση αυτή τα λάθη και οι διαφωνίες είναι αναμενόμενα.

Αυτό που βλέπουμε να εννοείται ως εμβαδόν το άθροισμα όλων των εμβαδών των χωρίων που περιέχονται μεταξύ δύο ή και περισσοτέρων γραμμών. Αυτό όμως δεν τηρείται πάντοτε.

Στις Πανελλαδικές εξετάσεις των ομογενών του 2008 τέθηκε το εξής:

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση f με $f(x)=\eta\mu x$ **, όπου** $x \in \mathbb{R}$

α) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης ευθείας στο σημείο $(0, f(0))$ **της γραφικής παράστασης της f.**

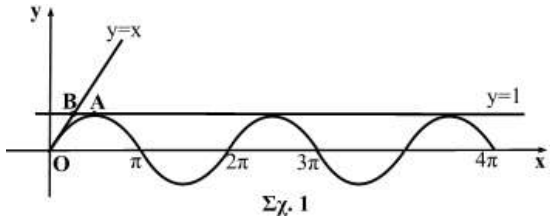
β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της f και τις ευθείες $y=x$ **και** $y=1$

γ) …

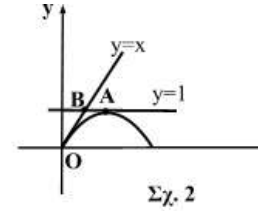
Η εξίσωση της εφαπτομένης της c_f στο σημείο της $(0, f(0))$ είναι η $y=x$

Η ευθεία $y=1$ εφάπτεται με την c_f σε άπειρα σημεία δημιουργώντας άπειρα χωρία με άπειρο συνολικά εμβαδόν (σχ. 1)

Εδώ, αντίθετα με ότι συνηθίζεται, εννοούνταν το εμβαδόν που περικλείονταν ταυτοχρόνως μεταξύ και των τριών γραμμών $y = \eta\mu x$, $y = x$ και y=1, δηλαδή μόνο το εμβαδόν ΟΑΒ (σχ. 2).



Σχ. 1



Σχ. 2

Ένας πολύ εύκολος τρόπος για την αποσαφήνιση της έκφρασης αυτής είναι να διατυπώνεται το πρόβλημα με μια από τις εξής δύο μορφές:

1η μορφή: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται ταυτόχρονα και από τις 3 γραφικές παραστάσεις των f, g, h

2η μορφή: Να υπολογιστεί το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από 2 ή περισσότερες από τις γραφικές παραστάσεις των f, g, h

Β) Λάθη οφειλόμενα στη λάθος χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$

Η Ανάλυση ως μάθημα ακρίβειας και λεπτομερειών απαιτεί τη σωστή χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$.

Δυστυχώς δεν διδάσκεται στα σχολεία. Ελάχιστες αναφορές γίνονται τα τελευταία χρόνια στο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου που όμως δεν αρκούν για την κατανόηση και ειδικά για τη χρήση των συμβόλων αυτών.

Στην εισήγησή μας [6] εξηγούμε λεπτομερώς τη σωστή χρήση τους. Εδώ θα θεωρήσουμε γνωστή τη χρήση τους και θα αναφερθούμε μόνο στα λάθη που γίνονται από την κακή ή λάθος χρήση τους.

Η μη σωστή χρήση των συμβόλων αυτών οδηγεί σε λάθη ή παραλείψεις. Τα λάθη συνήθως γίνονται στη λύση εξισώσεων (όπου απαιτούνται ισοδυναμίες) ή στη χρήση των αντιστρόφων κάποιων θεωρημάτων τα οποία δεν ισχύουν πάντοτε.

Με τη σωστή χρήση των συμβόλων αυτών αποσαφηνίζεται και το σε ποιες περιπτώσεις είναι απαραίτητη η επαλήθευση και σε ποιες όχι.

Δεν δίνουμε εδώ παραδείγματα, επειδή πολλά από τα λάθη της Α΄ κατηγορίας που δώσαμε και τα λάθη της Γ΄ κατηγορίας που δίνουμε παρακάτω οφείλονται στη λάθος χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$

Γ) Λάθη οφειλόμενα στη λάθος χρήση των θεωρημάτων ή στην παρανόησή τους

Τα θεωρήματα των μαθηματικών είναι συνήθως της μορφής:

Αν ισχύουν οι εξής προϋποθέσεις … τότε…

Αυτές οι προϋποθέσεις πολλές φορές αγνοούνται και εφαρμόζονται τα θεωρήματα και σε περιπτώσεις που δεν ισχύουν. Πολλά ερωτήματα τύπου Σωστό – Λάθος στηρίζονται στις εξαιρέσεις όπου δεν ισχύει κάποιο θεώρημα.

Μεταξύ των προϋποθέσεων (και αυτό είναι πολύ συχνό στην Ανάλυση) είναι το ότι κάποια από αυτές **ισχύει σε ένα διάστημα**. Συχνό είναι το λάθος να παραβλέπεται το γεγονός αυτό και να εφαρμόζεται το θεώρημα σε σύνολο που δεν είναι διάστημα.

Πολλά άλλα λάθη οφείλονται επίσης στην αγνόηση του πεδίου ορισμού των συναρτήσεων ή στην αυθαίρετη επέκταση της ισχύος ή στην παρανόηση των θεωρημάτων.

Αναφέρουμε μερικά από αυτά.

1) Ύπαρξη ορίου αθροίσματος, διαφοράς κ.λ.π

Να χαρακτηρίσετε τις παρακάτω προτάσεις ως Σωστό ή Λάθος

α) Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell_1$ **και** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \ell_2$**, τότε** $\lim\limits_{x\to x_0}(f(x)\cdot g(x)) = \ell_1 \cdot \ell_2$

Επαναλ. εξετάσεις Γεν. Παιδείας 2004

Θεωρούμε τις συναρτήσεις:

$$f(x) = \sqrt{x-2}$$
$$g(x) = \sqrt{4-2x}$$

Τα πεδία ορισμού τους είναι $A_f = [2, +\infty)$, $A_g = (-\infty, 2]$

Και είναι εξ ορισμού

$\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \lim\limits_{x\to 2^+} \sqrt{x-2} = 0$ και

$\lim\limits_{x\to 2} g(x) = \lim\limits_{x\to 2^-} \sqrt{4-2x} = 0$

δηλαδή υπάρχουν τα όρια των f και g στο 2 (θυμίζουμε ότι αν η συνάρτηση f ορίζεται μόνο από τη μία πλευρά του x_0, το όριό της στο x_0 είναι το αντίστοιχο πλευρικό της όριο στο x_0).

Η συνάρτηση $f\cdot g$ ορίζεται στο $A_f \cap A_g = \{2\}$ και έχει τύπο $(f\cdot g)(x) = f(2)\cdot g(2) = 0$

Όμως το όριό της στο $x_0 = 2$ δεν έχει νόημα αφού, για να ορίζεται (σύμφωνα με το σχολικό βιβλίο) πρέπει η συνάρτηση f να ορίζεται απαραίτητα σε διάστημα της μορφής (α, x_0) ή (x_0, β) και δεν αρκεί (ούτε μας ενδιαφέρει) να ορίζεται στο x_0.

Έτσι η πρόταση $\lim\limits_{x\to 2}(f(x)\cdot g(x)) = \lim\limits_{x\to 2} f(x) \cdot \lim\limits_{x\to 2} g(x)$ χωρίς τις κατάλληλες προϋποθέσεις είναι ψευδής.

Για να ισχύει δηλαδή η παραπάνω πρόταση πρέπει οι συναρτήσεις f και g να ορίζονται στην ίδια περιοχή του x_0. **Αν η f ορίζεται μόνο αριστερά του** x_0 **και η g ορίζεται μόνο δεξιά του** x_0**, η παραπάνω ισότητα δεν έχει νόημα.**

Για τον ίδιο λόγο ψευδείς είναι και οι προτάσεις:

Αν υπάρχουν στο R τα όρια των f και g στο $x_0 \in$ **R, τότε υπάρχουν και τα όρια των** $f+g$**,** $f-g$**, και** $\frac{f}{g}$ **(με την πρόσθετη προϋπόθεση** $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) \neq 0$**)**

Τα ίδια λάθη επαναλαμβάνονται και στη συνέχεια των συναρτήσεων.

Αν δηλ. οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο x_0**, αυτό δεν εξασφαλίζει ότι και οι** $f+g$**,** $f\cdot g$**,** $g\circ f$ **κ.λ.π είναι συνεχείς στο** x_0**.**

Τα ίδια λάθη επαναλαμβάνονται και στην παραγώγιση των συναρτήσεων.

Αν δηλ. οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0**, αυτό δεν εξασφαλίζει ότι και οι** $f+g$**,** $f\cdot g$**,** $g\circ f$ **κ.λ.π είναι παραγωγίσιμες στο** x_0**.**

2) Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}\sqrt{x^4 - x^2}$

Η συνηθισμένη απάντηση είναι ότι το όριο αυτό είναι ίσο με 0.

Όμως η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x^4 - x^2}$ έχει πεδίο ορισμού το $A = (-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$, δηλαδή το σημείο 0 δεν είναι σημείο συσσώρευσης (δεν υπάρχει δηλ. σύνολο της μορφής $(\alpha, 0)$ ή $(0, \beta)$ στο οποίο η f είναι ορισμένη) και **δενμπορούμε να ομιλούμε για όριο της f στο 0**.

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Δεν πρέπει να συγχέονται οι έννοιες "<u>δεν έχει νόημα το όριο</u>" και "<u>δεν υπάρχει το όριο</u>" που είναι εντελώς διαφορετικές.

3) Ίδιο λάθος στην προσπάθεια εύρεσης του $\lim\limits_{x\to 0} \varepsilon\varphi\frac{1}{x}$ όπου το πεδίο ορισμού είναι το σύνολο $A=\{x\neq \frac{1}{\kappa\pi+\frac{\pi}{2}},\ \kappa\in Ά\}$ και δεν περιέχει κανένα διάστημα της μορφής $(\alpha,0)$ ή $(0,\beta)$, δηλαδή σε κάθε διάστημα της μορφής αυτής, υπάρχουν σημεία στα οποία η συνάρτηση $f(x)=\varepsilon\varphi\frac{1}{x}$ δεν ορίζεται.

Και εδώ δηλ. **δεν μπορούμε να ομιλούμε για όριο της f στο 0**.

4) Γινόμενο συναρτήσεων =0

Δίνουμε εδώ τον ορισμό της μηδενικής συνάρτησης:

Μια συνάρτηση $f:A\to ^{\prime\prime}$ **λέγεται μηδενική και συμβολίζεται με** $f=0$ **αν για κάθε** $x\in A$ **ισχύει:** $f(x)=0$

Επομένως: Η συνάρτηση $f:A\to ^{\prime\prime}$ **λέγεται μη μηδενική και συμβολίζεται με** $f\neq 0$ **αν υπάρχει** $x\in A$ **με** $f(x)\neq 0$

ΠΡΟΣΟΧΗ:

Ο ορισμός **δεν αποκλείει η f να μηδενίζεται** για κάποιες τιμές του x, ακόμη και άπειρες. Π.χ

- Η συνάρτηση $f:^{\prime\prime}\to ^{\prime\prime}$ με $f(x)=x^2-4$ δεν είναι μηδενική, αν και μηδενίζεται για $x=2$ και $x=-2$ δηλαδή είναι $f\neq 0$.
- Το ίδιο και η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} x^2 & \text{αν } x\le 0\\ 0 & \text{αν } x>0\end{cases}$ είναι μη μηδενική αν και μηδενίζεται για άπειρες τιμές του x.
- Το ίδιο και η συνάρτηση f με $f(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x\neq 0\\ 1 & \text{αν } x=0\end{cases}$ είναι μη μηδενική, αν και υπάρχει μόνο μια τιμή για την οποία η f δε μηδενίζεται.

Αν τώρα για τις συναρτήσεις $f,g: A\to ^{\prime\prime}$ **ισχύει** $f\cdot g=0$**, αυτό δε σημαίνει ότι** $f=0$ **ή** $g=0$ **όπως φαίνεται από το παρακάτω παράδειγμα όπου** $f\neq 0$ **και** $g\neq 0$

<u>Παράδειγμα</u>

Οι συναρτήσεις f και g ορίζονται ως εξής:

$$f(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x\le 3\\ 2x & \text{αν } x>3\end{cases}\ ,\quad g(x)=\begin{cases} 3x & \text{αν } x\le 3\\ 0 & \text{αν } x>3\end{cases}$$

Είναι $f\neq 0$ και $g\neq 0$

Όμως: $f(x).g(x)=\begin{cases} 0 & \text{αν } x\le 3\\ 0 & \text{αν } x>3\end{cases}$ δηλαδή $f(x).g(x)=0$ για κάθε $x\in ^{\prime\prime}$, άρα $f.g=0$

Με τη βοήθεια της παραπάνω ιδιότητας μπορούμε να αποδείξουμε ότι:

Αν $f,g: A\to ^{\prime\prime}$ **και** $f^2=g^2$**, δηλαδή** $f^2(x)=g^2(x)$ **για κάθε** $x\in A$ **τότε δεν ισχύει σίγουρα ότι** $f=g$ **ή** $f=-g$**, δηλαδή** $f(x)=g(x)$ **για κάθε** $x\in A$ **ή** $f(x)=-g(x)$ **για κάθε** $x\in A$**.**

Αυτό που ισχύει είναι ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει ότι: $f(x)=g(x)$ ή $f(x)=-g(x)$

Προσοχή στη χρήση των ποσοδεικτών (η αλλαγή της θέσης του $\forall$)

Μπορεί όμως να είναι $f\neq g$ και $f\neq -g$ όπως φαίνεται στο παρακάτω

<u>Παράδειγμα</u>

Οι συναρτήσεις $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **ορίζονται ως εξής:**

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 3 \\ -2x, & \text{αν } x \geq 3 \end{cases} \quad \textbf{και } g(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } x < 1 \\ -2x, & \text{αν } x \geq 1 \end{cases}$$

Ισχύει προφανώς ότι $f^2(x) = 4x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $g^2(x) = 4x^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

Επομένως $f^2 = g^2$. Όμως προφανώς είναι $f \neq g$ και $f \neq -g$.

Η απόδειξη της πρότασης αυτής γίνεται ως εξής:

$f^2 = g^2 \Leftrightarrow f^2 - g^2 = 0 \Leftrightarrow (f + g)(f - g) = 0$

Από την τελευταία σχέση δεν προκύπτει υποχρεωτικά ότι $f + g = 0$ ή $f - g = 0$

Οι συναρτήσεις f και g μπορεί να είναι οι παραπάνω.

Σαν εφαρμογή του παραπάνω δίνουμε το εξής

<u>Παράδειγμα</u>

Να βρεθούν όλες οι συναρτήσεις $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ **με την ιδιότητα:** $f^2(x) = x^2$

<u>Λύση</u>

Σύμφωνα με τα όσα γράψαμε παραπάνω, για κάθε $x \in \mathbb{R}$ θα είναι: $f(x) = x$ ή $f(x) = -x$

Αυτό δίνει ως λύσεις άπειρες συναρτήσεις που ορίζονται ως εξής:

$f(x) = \begin{cases} x, & \text{αν } x \in A \\ -x, & \text{αν } x \notin A \end{cases}$ όπου A οποιοδήποτε υποσύνολο του $\mathbb{R}$.

Δύο από τις συναρτήσεις αυτές είναι βέβαια και οι $f(x) = x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ και $f(x) = -x$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

5) Αν οι συναρτήσεις f και g δεν έχουν όριο στο L ($L = x_0 \in \mathbb{R}$, ή $L = +\infty$ ή $L = -\infty$) **είναι δυνατό κάποιες από τις συναρτήσεις** $f + g$, $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$ **και άλλοι συνδυασμοί των f και g να έχουν όριο στο L.**

π.χ αν $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ και $g(x) = x - \frac{1}{x}$, $x \in \mathbb{R}^*$ τότε οι f και g δεν έχουν όριο στο 0, αφού $\lim\limits_{x \to 0^-} f(x) = -\infty$, ενώ $\lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty$ καθώς επίσης και

$\lim\limits_{x \to 0^-} g(x) = +\infty$, ενώ $\lim\limits_{x \to 0^+} g(x) = -\infty$

Όμως $\lim\limits_{x \to 0} [f(x) + g(x)] = \lim\limits_{x \to 0} x = 0$

Ανάλογα παραδείγματα μπορούν να δοθούν και για τις $f - g$, $f \cdot g$, $\frac{f}{g}$.

Το λάθος εδώ είναι να νομίζει κάποιος ότι επειδή δεν υπάρχει το όριο της f δεν υπάρχει και το όριο μιας παράστασης που περιέχει την f.

(Παρανόηση του σχετικού θεωρήματος)

6) Λάθος χρήση των ιδιοτήτων των ορίων

Συνηθισμένο λάθος είναι να εφαρμόζονται οι ιδιότητες των ορίων αρχικά μόνο σε τμήμα της συνάρτησης και κατόπιν στο υπόλοιπο τμήμα της συνάρτησης.

Κάτι τέτοιο δεν είναι σωστό όπως φαίνεται στο παρακάτω

<u>Παράδειγμα</u>

Είναι: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{x(x-1)}{x-1}=\lim\limits_{x\to 1}x=1$ (σωστή εφαρμογή των ιδιοτήτων)

Αν εφαρμόσουμε τις ιδιότητες των ορίων μόνο στον όρο x^2 του αριθμητή, δηλ. πάρουμε αρχικά $\lim\limits_{x\to 1}x^2=1$ και μετά εφαρμόσουμε τις ιδιότητες στο υπόλοιπο τμήμα της συνάρτησης θα έχουμε διαδοχικά:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{1-x}{x-1}=-1$$

Αν τώρα πάρουμε το όριο μόνο στον όρο x του αριθμητή, δηλαδή πάρουμε $\lim\limits_{x\to 1}x=1$ θα έχουμε:

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^2-x}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(x+1)}{x-1}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$$

7) Χρήση ορίου όταν δεν γνωρίζουμε ότι υπάρχει

Άλλο λάθος είναι η χρησιμοποίηση των ιδιοτήτων των ορίων σε συναρτήσεις που δε γνωρίζουμε ότι υπάρχουν τα όριά τους όπως δείχνουμε στο παρακάτω

<u>Παράδειγμα</u>

Αν $\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+2x-3)=2$ **, να βρεθεί το** $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$

Το λάθος που γίνεται εδώ είναι ότι, ενώ δε γνωρίζουμε αν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}f(x)$ να γράψουμε:

$\lim\limits_{x\to 1}(f(x)+2x-3)=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)+\lim\limits_{x\to 1}(2x)-\lim\limits_{x\to 1}3=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)+2-3=2\Leftrightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=3$

Η σωστή λύση γίνεται ως εξής:

Θέτουμε: $g(x)=f(x)+2x-3\Rightarrow f(x)=g(x)-2x+3\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1}f(x)=\lim\limits_{x\to 1}\left(g(x)-2x+3\right)=$

$\lim\limits_{x\to 1}g(x)-\lim\limits_{x\to 1}\left(2x\right)+\lim\limits_{x\to 1}3=2-2+3=3$

Εδώ μπορούν να εφαρμοστούν οι ιδιότητες των ορίων επειδή υπάρχει το $\lim\limits_{x\to 1}g(x)=2$

Σχετικό και πολύ συνηθισμένο είναι και το λάθος να θεωρούμε ότι $\lim\limits_{x\to x_0}f(x)=f(x_0)$ χωρίς να γνωρίζουμε ότι η f είναι συνεχής στο x_0.

8) Λάθος παρανόησης στα όρια

Άλλο λάθος γίνεται συχνά στις εγκλωβισμένες συναρτήσεις όπως δείχνουμε στο παρακάτω

<u>Παράδειγμα</u>

Αν για κάθε $x\in\mathbb{R}$ **ισχύει** $\eta\mu x-x^2\le f(x)\le \eta\mu x+x^2$ **(1)**

να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to 0}f(x)$

Σε τέτοιες ασκήσεις συχνά βλέπουμε λάθος λύσεις ως εξής:

Επειδή $\lim\limits_{x\to 0^-}(\eta\mu x-x^2)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(\eta\mu x+x^2)=0$, σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής από την (1) προκύπτει $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$

Για να πούμε όμως ότι $\lim\limits_{x\to 0}f(x)=0$ σύμφωνα με το κριτήριο της παρεμβολής, πρέπει να βρούμε τα $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x-x^2)=0$ και $\lim\limits_{x\to 0}(\eta\mu x+x^2)=0$ και όχι τα πλευρικά όρια των συναρτήσεων αυτών.

Το λάθος αυτό μπορεί να γίνει πιο εύκολα αν η άσκηση είναι της παρακάτω μορφής:

Αν για κάθε $x \in \mathbb{R}$ **ισχύει** $x^3 - x^2 \le xf(x) \le x^3 + x^2$ **(1) να βρεθεί το** $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$

Η σωστή λύση γίνεται ως εξής:

- Για $x > 0$ η (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - x \le f(x) \le x^2 + x$ (2)

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 - x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^2 + x) = 0$ οπότε από την (1) προκύπτει και $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$ (3)

- Για $x < 0$ η (1) $\Leftrightarrow$ $x^2 - x \ge f(x) \ge x^2 + x$ (4)

Όμως $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2 - x) = 0$ και $\lim\limits_{x\to 0^-}(x^2 + x) = 0$ οπότε από την (4) προκύπτει και $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = 0$ (5)

Από τις (3) και (5) προκύπτει ότι $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0$

Όταν δηλαδή θεωρούμε $x > 0$, τα όρια και των τριών μελών της (1) τα παίρνουμε στο 0^+, ενώ όταν θεωρούμε $x < 0$, τα όρια και των τριών μελών της (1) τα παίρνουμε στο 0^-.

9) Λάθος παρανόησης

Στο θεώρημα: Αν $f(x) \ge g(x)$ **κοντά στο** L $(L = x_0 \in \mathbb{R}$ **,** ή $L = +\infty$ ή $L = -\infty)$ **και υπάρχουν στο** $\mathbb{R}$ **τα όρια των f και g, τότε:** $\lim\limits_{x\to L} f(x) \ge \lim\limits_{x\to L} g(x)$

γίνεται μια παρανόηση: Κάποιοι μαθητές θεωρούν ότι η παραπάνω πρόταση αναλύεται στις εξής δύο προτάσεις:

- **Αν** $f(x) > g(x)$ **τότε:** $\lim\limits_{x\to L} f(x) > \lim\limits_{x\to L} g(x)$ **και**
- **Αν** $f(x) = g(x)$ **τότε:** $\lim\limits_{x\to L} f(x) = \lim\limits_{x\to L} g(x)$

Δεν είναι όμως έτσι.

Είναι φανερό ότι αν $f(x) = g(x)$ τότε: $\lim\limits_{x\to L} f(x) = \lim\limits_{x\to L} g(x)$

Όμως αν $f(x) > g(x)$ τότε: $\lim\limits_{x\to L} f(x) \ge \lim\limits_{x\to L} g(x)$, δηλαδή μπορεί να ισχύει το = και όχι το > .

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει την αλήθεια των παραπάνω.

Για τις συναρτήσεις $f(x) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$ και $g(x) = x^4$, $x \in \mathbb{R}$ ισχύει:

$f(x) - g(x) = x^2 - x^4 = x^2(1 - x^2) = x^2(1 - x)(1 + x) > 0$ για κάθε $x \in (-1,0) \cup (0,1)$

δηλαδή κοντά στο 0. Όμως $\lim\limits_{x\to 0} f(x) = 0 = \lim\limits_{x\to 0} g(x)$

10) Ορισμός συνέχειας μόνο σε διάστημα

Η συνέχεια μιας συνάρτησης $f : A \to \mathbb{R}$ ορίστηκε στο σχολικό βιβλίο ως εξής:

- **Η f λέγεται συνεχής στο σημείο** $x_0 \in A$ **αν** $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$
- **Η f λέγεται συνεχής στο ανοιχτό διάστημα** (α,β)**, αν η f είναι συνεχής σε κάθε σημείο του** (α,β)
- **Η f λέγεται συνεχής στο κλειστό διάστημα** $[\alpha,\beta]$**, αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό διάστημα** (α,β) **και επιπλέον** $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$ **και** $\lim\limits_{x\to \beta^-} f(x) = f(\beta)$
- **Η f λέγεται συνεχής διάστημα** $[\alpha,\beta)$ **, αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό διάστημα** (α,β) **και επιπλέον** $\lim\limits_{x\to \alpha^+} f(x) = f(\alpha)$

- **Η f λέγεται συνεχής στο διάστημα** $(\alpha,\beta]$**, αν η f είναι συνεχής στο ανοιχτό διάστημα** (α,β) **και επιπλέον** $\lim\limits_{x\to\beta^-} f(x) = f(\beta)$
- **Η f λέγεται συνεχής, αν είναι συνεχής σε κάθε σημείο του Α.**

Σύμφωνα με τους παραπάνω ορισμούς, δε νοείται συνέχεια της f σε σύνολο που δεν είναι διάστημα, π.χ στο $(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$ πράγμα που βλέπουμε συχνά εξαιτίας παλαιότερων ορισμών που δεν ταυτίζονται με αυτόν του τωρινού σχολικού βιβλίου.

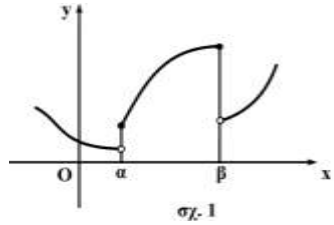
Συνηθισμένο λάθος είναι να βλέπουμε την έκφραση: Η f είναι συνεχής στο $(\alpha,\beta)\cup(\beta,\gamma)$ **ως…**

Εξετάζουμε τη συνέχεια της f στο β.

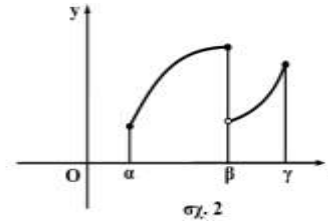
Οι ορισμοί όπως δόθηκαν οδηγούν μερικές φορές σε συμπεράσματα που δεν ακούγονται σωστά, δεν έχουν όμως κανένα λάθος. Τα παρακάτω σχήματα επεξηγούν τις περιπτώσεις αυτές.

Στο παρακάτω σχήμα 1, η f είναι συνεχής στο $[\alpha,\beta]$, όμως δεν είναι συνεχής ούτε στο α, ούτε στο β.

Στο σχήμα 2, η f είναι συνεχής στα διαστήματα $\Delta_1 = [\alpha,\beta]$ και $\Delta_2 = (\beta,\gamma]$, δεν είναι όμως συνεχής στο διάστημα $\Delta = \Delta_1 \cup \Delta_2 = [\alpha,\gamma]$



σχ. 1



σχ. 2

Π.χ η συνάρτηση $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{αν } x \in [0,2] \\ 3x & \text{αν } x \in (2,3] \end{cases}$ αποδεικνύεται εύκολα ότι είναι συνεχής στα $[0,2]$ και $(2,3]$, δεν είναι συνεχής όμως στο σημείο $x_0 = 2$, αφού $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) = 4$ ενώ $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x) = 6$, δηλαδή είναι $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$

11) Λάθος παρανόησης θεωρήματος

Η εικόνα ενός κλειστού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης είναι κλειστό διάστημα.

Ένα λάθος είναι να θεωρεί κάποιος ότι η εικόνα ενός ανοιχτού διαστήματος μέσω μιας συνεχούς μη σταθερής συνάρτησης είναι ανοιχτό διάστημα. Αυτό δεν είναι πάντοτε αληθές.

Π.χ για τη συνάρτηση: $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = \dfrac{2x}{1+x^2}$ αποδεικνύεται ότι το σύνολο τιμών της, δηλαδή η εικόνα του ανοιχτού διαστήματος $(-\infty,+\infty)$ είναι το κλειστό διάστημα $[-1,1]$.

12) Πεδίο ορισμού της (gοf)′

Είναι γνωστό ότι αν η $f: A \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και η $g: B \to \mathbb{R}$ είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$, τότε η σύνθεση $g\circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0 με

$$(g\circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$$

(και αυτή η ιδιότητα βέβαια με την εξαίρεση που αναφέραμε νωρίτερα, εφόσον δηλ. το πεδίο ορισμού της $g\circ f$ είναι κατάλληλο)

Τι γίνεται όμως αν η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή η g δεν είναι παραγωγίσιμη στο $f(x_0)$;

Στο σχολικό βιβλίο δεν αναφέρεται κάτι σχετικό. Συνηθισμένο λάθος είναι να νομίζεται ότι αν δεν ισχύουν οι παραπάνω προϋποθέσεις, τότε η $g \circ f$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Αυτό που ισχύει είναι ότι:

Η σύνθεση $g \circ f$ μπορεί να είναι παραγωγίσιμη στο x_0 και αν ακόμη δεν ισχύει καμία από τις παραπάνω προϋποθέσεις. Μπορεί φυσικά και να μην είναι.

Βλέπε 4 παραδείγματα στο [2]

ΠΡΟΣΟΧΗ: Αν η $g \circ f$ είναι παραγωγίσιμη στο x_0, δεν ισχύουν όμως οι παραπάνω προϋποθέσεις, δεν μπορούμε να γράψουμε $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0)$ αφού δεν ορίζεται κάποιος όρος του 2ο μέλους.

Αντίστοιχα λάθη γίνονται και όταν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις στα θεωρήματα Bolzano, Rolle και Μέσης Τιμής.

13) Παραγώγιση πράξεων συναρτήσεων

Είναι γνωστές οι προτάσεις:

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο x_0, τότε και οι συναρτήσεις $f+g$, $f-g$, $f \cdot g$ κ.λ.π είναι παραγωγίσιμες στο x_0 (αν και αυτό δεν ισχύει ακριβώς έτσι όπως αναγράφεται στο σχολικό βιβλίο. Βλ. [2]).

Αντίστοιχα με τα όρια (καθόσον και η παράγωγος όριο είναι):

Αν μια ή και οι δύο συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες σε κάποιο σημείο x_0, αυτό δε σημαίνει ότι κάθε συνάρτηση που περιέχει την f ή την g ή και τις δύο δεν είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

Δίνουμε δύο παραδείγματα.

Στο 1ο παράδειγμα ούτε η f και g ούτε η g είναι παραγωγίσιμες στο 0, η $f+g$ όμως είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Στο 2ο παράδειγμα η f δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0, η g είναι παραγωγίσιμη στο 0 και η $f \cdot g$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Είναι γνωστό ότι η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Επομένως και η συνάρτηση $g(x) = x - \sqrt{x}$, $x \in [0, +\infty)$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Διότι αν ήταν η g παραγωγίσιμη στο 0, τότε η συνάρτηση $\sqrt{x} = x - g(x)$ θα ήταν παραγωγίσιμη στο 0, πράγμα άτοπο.

Ενώ λοιπόν οι συναρτήσεις f και g δεν είναι παραγωγίσιμες στο 0, η συνάρτηση $(f+g)(x) = x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Η συνάρτηση $f(x) = \sqrt{x}$ δεν είναι παραγωγίσιμη στο 0. Η συνάρτηση $g(x) = \eta\mu x$ είναι παραγωγίσιμη στο 0.

Το γινόμενό τους $h(x) = \sqrt{x}\,\eta\mu x$ είναι συνάρτηση παραγωγίσιμη στο 0.

Πράγματι:

$$\lim_{x \to 0} \frac{h(x) - h(0)}{x - 0} = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{x}\,\eta\mu x}{x} = \lim_{x \to 0} \left(\sqrt{x} \cdot \frac{\eta\mu x}{x} \right) = 0 \cdot 1 = 0 = h'(0)$$

14) Παραγώγιση εξίσωσης.

Η παράγωγος της f στο x_0 ως όριο της συνάρτησης $\lambda(x)=\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ όταν $x \to x_0$ για να ορίζεται πρέπει, η $\lambda(x)$, άρα και η $f(x)$ να ορίζεται και στο x_0 και κοντά στο x_0, δηλαδή σε ένα τουλάχιστον διάστημα της μορφής (α, x_0) ή (x_0, β).

Κατά τη μελέτη εξισώσεων, γίνεται το **σοβαρό λάθος να παραγωγίζονται τα δύο μέλη**.

Δίνονται π.χ κάποιες συναρτήσεις f και g (μπορεί να δοθούν οι τύποι τους ή κάποιες ιδιότητές τους) και ζητείται να αποδείξουμε ότι η εξίσωση $f(x)=g(x)$ έχει μια ρίζα στο διάστημα (α,β).

Στην περίπτωση αυτή, η σχέση $f(x)=g(x)$ αληθεύει για κάποιες μόνο τιμές του x που δεν αποτελούν διάστημα. **Έτσι η παραγώγιση $f'(x)=g'(x)$ δεν έχει νόημα.**

15) Παραγώγιση συνάρτησης με πεδίο ορισμού το ¥

<u>Παράδειγμα</u> (άσκηση σχολικού βιβλίου)

Ένα πρακτορείο ταξιδιών διοργανώνει μια εκδρομή. Αν στην εκδρομή συμμετάσχουν 100 άτομα, καθένα θα πληρώσει 1000 €. Για κάθε επιπλέον άτομο, η τιμή μειώνεται κατά 5 €. Πόσα άτομα επιπλέον πρέπει να συμμετάσχουν ώστε το πρακτορείο να έχει τα περισσότερα έσοδα;

<u>Λύση</u>

Αν x είναι ο αριθμός των επιπλέον ατόμων, θα συμμετάσχουν $100+x$ άτομα και καθένα θα πληρώσει (1000-5x) €. Επομένως τα συνολικά έσοδα του πρακτορείου θα είναι

$$E(x) = (100 + x)(1000 - 5x) = -5x^2 + 500x + 100\,000$$

Πρέπει να βρούμε το μέγιστο της συνάρτησης

$$E: ¥ \to \text{´´} \quad \text{με} \quad E(x) = -5x^2 + 500x + 100\,000$$

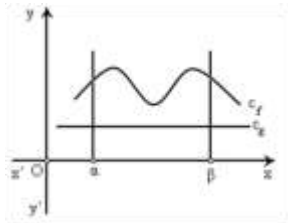
Εδώ πρέπει να τονίσουμε ότι η παραγώγιση της E(x) **δεν έχει νόημα**, αφού η συνάρτηση E ορίζεται μόνο στο ¥ .

Αναλυτική λύση και παρατηρήσεις του προβλήματος δίνεται στο [2]

6) Παραγώγιση ανισοτήτων

Οι ανισότητες δεν μπορούν να παραγωγιστούν.

Αν δηλαδή για τις συναρτήσεις f και g ισχύει π.χ η σχέση $f(x) > g(x)$, δεν προκύπτει καμία διάταξη για τις $f'(x)$ και $g'(x)$



Στο παραπάνω σχήμα, είναι $f(x) > g(x)$ για κάθε $x \in \Delta = [\alpha,\beta]$

Επίσης $g'(x)=0$ για κάθε $x \in \Delta$ (αφού η g είναι σταθερή), ενώ για την f' αλλού ισχύει $f'(x) > 0$, αλλού $f'(x) < 0$ και αλλού $f'(x) = 0$

17) Ιδιότητες σε διάστημα

Οι περισσότερες ιδιότητες των παραγώγων (όπως και της συνέχειας) ισχύουν σε διάστημα.

Παραθέτουμε δύο προτάσεις (η $2^η$ είναι συνέπεια της $1^{ης}$).

<u>Πρόταση 1</u>

Αν η συνάρτηση f είναι συνεχής στο Δ και παραγωγίσιμη στο Δ_0 με $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta_0$ τότε η f είναι σταθερή στο Δ.

<u>Πρόταση 2</u>

Αν οι συναρτήσεις f και g είναι συνεχείς στο Δ και ισχύει $f'(x) = g'(x)$ για κάθε $x \in \Delta_0$ τότε υπάρχει $c \in \mathbb{R}$ ώστε $f = g + c$ δηλαδή $f(x) = g(x) + c$ για κάθε $x \in \Delta$.

Χρειάζεται ιδιαίτερη προσοχή στη χρήση των παραπάνω θεωρημάτων.

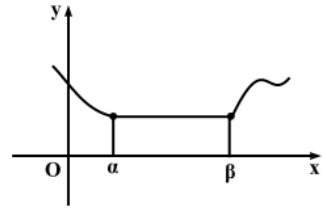
Αν π.χ $f'(x) = 0 \ \forall x \in \mathbb{R}^* = (-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$ δεν προκύπτει ότι $f(x) = c \ \forall x \in \mathbb{R}^*$, αλλά

$$f(x) = \begin{cases} c_1 & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ c_2 & \text{αν } x \in (0, +\infty) \end{cases}$$

Δείτε σχετικό παράδειγμα στο [2]

Στο αντίστροφο του θεωρήματος αυτού μπορεί επίσης να γίνει το εξής σοβαρό λάθος:

Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο διάστημα Δ, τότε $f'(x) = 0$ για κάθε $x \in \Delta$



Η παραπάνω πρόταση είναι αληθής μόνο αν το Δ είναι ανοιχτό. Έτσι στο διπλανό σχήμα, ενώ η συνάρτηση f είναι σταθερή στο κλειστό διάστημα $[\alpha, \beta]$, στα σημεία α και β δεν είναι παραγωγίσιμη.

18) Καμπυλότητα – Σημεία καμπής

Οι ορισμοί του σχολικού βιβλίου για την καμπυλότητα είναι οι εξής:

Α) Έστω συνάρτηση f συνεχής στο διάστημα Δ και παραγωγίσιμη στο Δ_0

Λέμε ότι

- **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο Δ, αν η f' είναι γν. αύξουσα στο Δ_0.**

- **Η f στρέφει τα κοίλα προς τα κάτω ή είναι κοίλη στο Δ, αν η f' είναι γν. φθίνουσα στο Δ_0.**

Β) Έστω συνάρτηση f παραγωγίσιμη στο διάστημα (α, β) με εξαίρεση ίσως το σημείο $x_0 \in (\alpha, \beta)$. Αν

- **η f είναι κυρτή στο (α, x_0) και κοίλη στο (x_0, β) ή αντίστροφα**
- **η c_f έχει εφαπτομένη στο x_0**

τότε το σημείο $(x_0, f(x_0))$ λέγεται σημείο καμπής της c_f.

Σύμφωνα με τους ορισμούς αυτούς:

α) Η καμπυλότητα μιας συνάρτησης ορίστηκε μόνο σε διάστημα και όχι σε οποιοδήποτε σύνολο. Π.χ δεν μπορούμε να μιλάμε για καμπυλότητα στο σύνολο $(1, 2) \cup (2, 3)$.

β) Για να είναι το x_0 σημείο καμπής, πρέπει στο x_0 να υπάρχει εφαπτομένη. Εδώ υπάρχει μια σύγχυση.

Επειδή η κατακόρυφη εφαπτομένη είναι εκτός διδακτέας ύλης, για τους μαθητές οι εκφράσεις **"η f είναι παραγωγίσιμη στο** x_0 **"** και **"η** c_f **έχει εφαπτομένη στο** x_0 **"** είναι ταυτόσημες. Έτσι, το ότι η f δεν είναι απαραίτητα παραγωγίσιμη στο x_0, η c_f όμως έχει εφαπτομένη στο x_0 φαίνονται αντιφατικά. Όμως ο ορισμός εδώ θέλει να συμπεριλάβει και την περίπτωση της κατακόρυφης εφαπτομένης και για τον λόγο αυτό δεν απαιτεί η f να είναι παραγωγίσιμη στο x_0. Δηλαδή αντίφαση δεν υπάρχει.

γ) Για να είναι το x_0 σημείο καμπής, ο ορισμός απαιτεί η c_f να είναι κυρτή σε διάστημα (α, x_0) και κοίλη σε διάστημα (x_0, β) ή αντίστροφα. Προς τούτο αρκεί $f''(x) > 0$ στο (α, x_0) και $f''(x) < 0$ στο (x_0, β) ή αντίστροφα. Επομένως δεν αρκεί η f'' να είναι θετική σε κάποιο σημείο του (α, x_0) και αρνητική σε κάποιο σημείο του (x_0, β).

Η παρανόηση αυτή οδήγησε στο λάθος θέμα των Πανελλαδικών του 2003[3]

δ) Για να είναι το σημείο x_0 σημείο καμπής δεν είναι απαραίτητο η f να είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο x_0. Αρκεί στο x_0 η c_f να δέχεται εφαπτομένη. Αυτό συμβαίνει όταν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0 ή ακόμη και όταν δεν είναι, επειδή το $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = +\infty$ ή $-\infty$ οπότε δέχεται κατακόρυφη εφαπτομένη.

ε) Αντίθετα με τη μονοτονία κατά την οποία αν η συνάρτηση f είναι γν. αύξουσα στα $(\alpha, x_0]$ και $[x_0, \beta)$ τότε η f είναι γν. αύξουσα και στην ένωση $(\alpha, x_0] \cup [x_0, \beta) = (\alpha, \beta)$, για την καμπυλότητα δεν ισχύει η αντίστοιχη πρόταση. Δηλαδή:

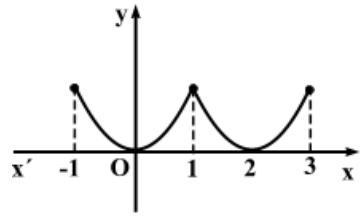
Αν η f στρέφει τα κοίλα πάνω στα $(\alpha, x_0]$ **και** $[x_0, \beta)$**, δεν προκύπτει συμπέρασμα για την καμπυλότητα στην ένωση** $(\alpha, x_0] \cup [x_0, \beta) = (\alpha, \beta)$

Αυτό προκύπτει εύκολα με τη βοήθεια ενός διαγράμματος στο οποίο καταφαίνεται η αλήθεια της πρότασης. Από το ίδιο το διάγραμμα κατασκευάσαμε και την αντίστοιχη συνάρτηση που στρέφει τα κοίλα πάνω σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,1]$ και $[1,3]$, ενώ δε στρέφει τα κοίλα πάνω στην ένωση $[-1,1] \cup [1,3] = [-1,3]$.

Η συνάρτηση f ορίζεται ως εξής: $f(x) = \begin{cases} x^2, & \text{αν } -1 \le x \le 1 \\ (x-2)^2, & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$

Η f είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της

Είναι: $f'(x) = \begin{cases} 2x, & \text{αν } -1 \le x < 1 \\ 2(x-2), & \text{αν } 1 < x \le 3 \end{cases}$



[3] Για όλες τις λεπτομέρειες του θέματος, βλέπε άρθρο μας
α) Στο περιοδικό ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ της Ε.Μ.Ε Ημαθίας, τεύχος 2, σελ. 119-123
β) Εφημερίδα ΛΑΟΣ της Ημαθίας της 30-5-2003 στη διεύθυνση www.laosver.gr
γ) Εκπαιδευτική ιστοσελίδα www.teach.gr

Η f' είναι γν. αύξουσα στα $(-1,1)$ και $(1,3)$, άρα
η f στρέφει τα κοίλα πάνω σε καθένα από τα διαστήματα $[-1,1]$ και $[1,3]$, όμως η f δε στρέφει τα κοίλα πάνω στην ένωση $[-1,1]\cup[1,3]=[-1,3]$, αφού η f' δεν είναι γν. αύξουσα στο $(-1,3)$.

Πράγματι, $f'(\frac{1}{2})=1$ και $f'(\frac{3}{2})=-1$, δηλαδή $f'(\frac{1}{2})>f'(\frac{3}{2})$

19) Κανόνας του Del' Hospital

Σύμφωνα με αυτόν (αντιγράφουμε τον κανόνα από το σχολικό βιβλίο):

Θεώρημα 1ο (μορφή $\frac{0}{0}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=0$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ **και υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Θεώρημα 2ο (μορφή $\frac{+\infty}{+\infty}$)

Αν $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=+\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=+\infty$, $x_0\in R\cup\{-\infty,+\infty\}$ **και υπάρχει το** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **(πεπερασμένο ή άπειρο), τότε:** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

<u>Παρατηρήσεις</u>

α) Το θεώρημα ισχύει και για τις μορφές $\frac{+\infty}{-\infty},\frac{-\infty}{+\infty},\frac{-\infty}{-\infty}$

β) Τα παραπάνω θεωρήματα ισχύουν και για πλευρικά όρια και μπορούμε, αν χρειάζεται, να τα εφαρμόσουμε περισσότερες φορές, αρκεί να πληρούνται οι προϋποθέσεις τους.

Κατά την εφαρμογή του κανόνα De l' Hospital γίνονται πολλά λάθη και που οφείλονται κυρίως στη μη ύπαρξη των προϋποθέσεων.

Για τη σωστή εφαρμογή πρέπει να γνωρίζουμε ότι:

α) Για να ορίζεται το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ **πρέπει οι** f' **και** g' **να ορίζονται σε μια περιοχή του** x_0 **και δεν αρκεί να ορίζονται στο** x_0**.**

β) Πρέπει να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$

Αναφέρουμε σχετικά το

<u>Παράδειγμα</u>

Έστω η συνάρτηση f η οποία είναι ορισμένη σε ένα διάστημα Δ και παραγωγίζεται στο $x_0\in\Delta$**. Να αποδείξετε ότι:** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=f(x_0)-x_0f'(x_0)$

(4η ΔΕΣΜΗ 1991)

Το λάθος που μπορεί να γίνει εδώ, είναι να γίνει εφαρμογή του κανόνα De l' Hospital ενώ για τη συνάρτηση f δόθηκε ότι παραγωγίζεται μόνο στο x_0 και δεν είναι γνωστό αν

παραγωγίζεται σε περιοχή του x_0 (για να έχει νόημα το $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x)$, η f' πρέπει να ορίζεται σε περιοχή του x_0).

Η λύση λοιπόν δεν μπορεί να γίνει με τον κανόνα De l' Hospital και πρέπει να γίνει ως εξής:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x_0)+x_0f(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\left[\frac{(x-x_0)f(x_0)}{x-x_0}-x_0\cdot\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}\right]=f(x_0)-x_0f'(x_0)$$

Αν εφαρμοστεί ο κανόνας De l' Hospital θα δώσει το ίδιο αποτέλεσμα, αφού η άγνωστη συνάρτηση f θα μπορούσε να είναι παραγωγίσιμη σε περιοχή του x_0 και όχι μόνο στο x_0. Όμως κάτι τέτοιο δεν μπορεί να χρησιμοποιηθεί κατά τη λύση.

Κατά την εφαρμογή του κανόνα Del' Hospital γίνονται δύο σημαντικά λάθη όπως φαίνεται στη λύση που ακολουθεί:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{xf(x_0)-x_0f(x)}{x-x_0}=\lim_{x\to x_0}\frac{\left(xf(x_0)-x_0f(x)\right)'}{\left(x-x_0\right)'}=\lim_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-x_0f'(x)}{1}=x_0-x_0f'(x_0)$$

Το 1ο λάθος είναι ότι θεωρούμε ότι η f είναι παραγωγίσιμη όχι μόνο στο x_0, αλλά και σε περιοχή του x_0 ώστε να μπορούμε να γράψουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-x_0f'(x)}{1}$.

Το 2ο λάθος είναι να θεωρούμε ότι η f' είναι συνεχής στο x_0 ώστε να γράφουμε $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x_0)-x_0f'(x)}{1}=x_0-x_0f'(x_0)$

<u>Μια άλλη σημαντική παρατήρηση στην εφαρμογή του κανόνα του Del' Hospital</u>

Για να εφαρμοστεί ο κανόνας του Del' Hospital, πρέπει να υπάρχει το όριο του πηλίκου των παραγώγων. Ο κανόνας λέει ότι:

<u>εφόσον υπάρχει το</u> $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}=\alpha\in\mathbb{R}\cup\{-\infty,+\infty\}$**, τότε υπάρχει και το** $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\alpha$

Στην περίπτωση που δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$, είναι δυνατό να υπάρχει το $\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}$ όπως δείχνουμε στο παρακάτω παράδειγμα.

Να βρεθεί το $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{x-\eta\mu x}{2x+\sigma\upsilon\nu x}$

Μπορεί εύκολα να αποδειχθεί ότι και το όριο του αριθμητή και το όριο του παρονομαστή είναι $+\infty$

Πράγματι, για κάθε $x\neq 0$, είναι:

$\left|\frac{\eta\mu x}{x}\right|=|\eta\mu x|\cdot\left|\frac{1}{x}\right|\le\left|\frac{1}{x}\right|\Rightarrow -\left|\frac{1}{x}\right|\le\frac{\eta\mu x}{x}\le\left|\frac{1}{x}\right|$ και επειδή $\lim\limits_{x\to+\infty}(-\left|\frac{1}{x}\right|)=\lim\limits_{x\to+\infty}\left|\frac{1}{x}\right|=0$, προκύπτει ότι είναι και $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{\eta\mu x}{x}=0$

Επομένως: $\lim\limits_{x\to+\infty}(x-\eta\mu x)=\lim\limits_{x\to+\infty}[x(1-\frac{\eta\mu x}{x})]=(+\infty)\cdot 1=+\infty$

Με τον ίδιο τρόπο βρίσκουμε ότι είναι και $\lim_{x\to+\infty}(2x+\text{συν}x)=+\infty$, δηλαδή ισχύει η πρώτη προϋπόθεση του κανόνα De l' Hospital. Όμως ο κανόνας De l' Hospital δεν μπορεί να εφαρμοστεί. Για να εφαρμοστεί ο κανόνας πρέπει να υπάρχει το

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(x-\text{ημ}x)'}{(2x+\text{συν}x)'}=\lim_{x\to+\infty}\frac{1-\text{συν}x}{2-\text{ημ}x}$$

Όμως το όριο αυτό δεν υπάρχει, όπως αποδεικνύουμε αμέσως:

Θεωρούμε τη συνάρτηση: $f(x)=\dfrac{1-\text{συν}x}{2-\text{ημ}x}$ και τις ακολουθίες:

$$x_\nu=2\nu\pi\to+\infty \text{ και } x_\nu'=2\nu\pi+\frac{\pi}{2}\to+\infty$$

Οι αντίστοιχες ακολουθίες τιμών της συνάρτησης είναι:

$$f(x_\nu)=\frac{1-\text{συν}(2\nu\pi)}{2-\text{ημ}(2\nu\pi)}=0\to0 \text{ και } f(x_\nu')=\frac{1-\text{συν}(2\nu\pi+\frac{\pi}{2})}{2-\text{ημ}(2\nu\pi+\frac{\pi}{2})}=1\to1$$

Επειδή οι ακολουθίες $f(x_\nu)$ και $f(x_\nu')$ έχουν διαφορετικά όρια, δεν υπάρχει το $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-\text{συν}x}{2-\text{ημ}x}$

Έτσι δεν μπορούμε να εφαρμόσουμε τον κανόνα De l' Hospital.
Παρόλα αυτά το όριο υπάρχει και μπορεί να βρεθεί χωρίς τον κανόνα De l' Hospital ως εξής:

$\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x-\text{ημ}x}{2x+\text{συν}x}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{x(1-\frac{\text{ημ}x}{x})}{x(2+\frac{\text{συν}x}{x})}=\lim_{x\to+\infty}\dfrac{1-\frac{\text{ημ}x}{x}}{2+\frac{\text{συν}x}{x}}=\dfrac{1}{2}$ διότι όπως βρήκαμε πριν είναι $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\text{ημ}x}{x}=0$ και για τον ίδιο λόγο είναι $\lim_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}x}{x}=0$

Βιβλιογραφικές παραπομπές

Σχετικές εισηγήσεις μου από τις οποίες αντλήθηκε το υλικό της παρούσας εισήγησης:

1. Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου. Σημεία που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή
2. Παράγωγοι. Σημεία που χρειάζονται ιδιαίτερη προσοχή
3. Ανάλυση Γ΄ Λυκείου. Συνηθισμένα και ασυνήθιστα λάθη
4. Ανάλυση Γ΄ Λυκείου. Επισημάνσεις και διευκρινίσεις με αφορμή θέματα Πανελλαδικών εξετάσεων
5. Σημεία διαφωνιών
6. Η σωστή χρήση των συμβόλων $\Rightarrow$ και $\Leftrightarrow$
7. Ολοκληρώματα. Α΄ μέρος
8. Ολοκληρώματα. Β΄ μέρος

Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου: Είναι δυνατό να συνδυάσουμε θεωρητική εμβάθυνση και «μεθοδολογία»; Ανάλυση του προβλήματος και προτάσεις για τη λύση του[4]

Γιάννης Θωμαΐδης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Δημήτρης Μπαρούτης, Μαθηματικός 3ου ΓΕ.Λ. Σταυρούπολης
Γιάννης Σαράφης, Μαθηματικός Ιδιωτικού ΓΕ.Λ. Καλαμαρί
Αλέξανδρος Συγκελάκης, Μαθηματικός Πειραματικού ΓΕ.Λ. Ηρακλείου

Εισαγωγή

Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου βρίσκεται εδώ και πολλές δεκαετίες εγκλωβισμένη ανάμεσα στις εγγενείς δυσκολίες κατανόησης των λεπτών θεωρητικών εννοιών που μελετά αυτός ο κλάδος των Μαθηματικών και στις ιδιαίτερες απαιτήσεις της προετοιμασίας των μαθητών ώστε να καταστούν ικανοί να αντιμετωπίσουν τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων.

Υπάρχουν πολλοί και σημαντικοί λόγοι που οδηγούν τους διδάσκοντες να υιοθετήσουν ένα μοντέλο διδασκαλίας το οποίο εξυπηρετεί σχεδόν αποκλειστικά την προετοιμασία για τις πανελλαδικές εξετάσεις. Η μάθηση της θεωρίας γίνεται για τους μαθητές ένα ζήτημα απομνημόνευσης ορισμών και αποδείξεων που θα αναπαραχθούν την ημέρα των εξετάσεων, ενώ το κύριο βάρος της διδασκαλίας μετατοπίζεται στην ανάπτυξη μιας εκτεταμένης «μεθοδολογίας» επίλυσης ασκήσεων που ακολουθούν πιστά και επαυξάνουν τη εξεταστική θεματολογία.

Ο εκφυλισμός της διδασκαλίας της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου στο δίπτυχο «μεθοδολογία + ασκησιολογία» έχει πολλές αρνητικές, μακροχρόνιες συνέπειες, τις οποίες δεν αναδεικνύει η δημοσιογραφικού τύπου συζήτηση για το ρόλο των Μαθηματικών στις πανελλαδικές εξετάσεις. Η συζήτηση αυτή ανακυκλώνεται με καταγγελτικό λόγο γύρω από ορισμένα στερεότυπα και ιδεολογήματα, χωρίς να λαμβάνονται υπόψη εμπειρικά και ποιοτικά δεδομένα της επίδοσης των μαθητών στις εξετάσεις. Είναι χαρακτηριστικό ότι τις ελάχιστες φορές που μελετήθηκαν αυτά τα δεδομένα, κυρίως από εκπροσώπους της τριτοβάθμιας εκπαίδευσης, αναδείχθηκε η μεγάλη αναντιστοιχία ανάμεσα στις υψηλές βαθμολογίες των πανελλαδικών εξετάσεων και στις χαμηλές επιδόσεις των πρωτοετών φοιτητών στις Σχολές Θετικών Επιστημών και τα Πολυτεχνεία (για μια ενδιαφέρουσα σχετική μελέτη βλ. την εργασία [1] στη βιβλιογραφία).

Τα τελευταία χρόνια όμως, έχει αρχίσει να διεξάγεται και μια άλλου τύπου συζήτηση, που επιχειρεί να αξιοποιήσει με ορθολογικό τρόπο ποσοτικά και ποιοτικά δεδομένα από τη διόρθωση των γραπτών στα Βαθμολογικά Κέντρα και να τα συσχετίσει με τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Η συζήτηση αυτή έχει ήδη συνεισφέρει έναν αξιόλογο αριθμό δημοσιευμένων ερευνών και αναλύσεων, που επιτρέπουν να διατυπώσουμε ορισμένες ρεαλιστικές εκτιμήσεις

---

[4] Η εργασία αυτή αποτελεί τμήμα ευρύτερης έρευνας των συγγραφέων για τη διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου η οποία βρίσκεται σε εξέλιξη και τα αποτελέσματα ανακοινώνονται τμηματικά. Μέρος της έρευνας παρουσιάστηκε σε δύο διαδοχικές εισηγήσεις στο 33ο Πανελλήνιο Συνέδριο της Ε.Μ.Ε. (Χανιά, 4–11–2016) και δημοσιεύτηκε στα Πρακτικά (σσ.261-281). Στην εκδήλωση της Σχολής Καλαμαρί (Θεσσαλονίκη, 3–12–2016), η εργασία παρουσιάζεται εμπλουτισμένη με πολλά επιπλέον στοιχεία που δεν ανακοινώθηκαν στο Συνέδριο λόγω έλλειψης χώρου και χρόνου.

για τα αρνητικά αποτελέσματα της σύνδεσης των εξετάσεων με τη διδασκαλία των Μαθηματικών στη Γ΄ Λυκείου.[5]

Οι εργασίες αυτές αναδεικνύουν ορισμένες βασικές όψεις του προβλήματος τις οποίες μπορούμε να συνοψίσουμε στα εξής σημεία:

- Χαμηλό αλγεβρικό υπόβαθρο της μεγάλης πλειοψηφίας των μαθητών.
- Σημαντικές παρανοήσεις για βασικές μαθηματικές έννοιες (αδυναμία διάκρισης μεταξύ αγνώστων, μεταβλητών και παραμέτρων, μεταξύ αριθμών και συναρτήσεων)
- Έλλειψη ουσιαστικής κατανόησης της αποδεικτικής διαδικασίας.
- Υπερβολική εξάρτηση των μαθητών από τις διαδικασίες που επιβάλει η «μεθοδολογία» σε βάρος της εννοιολογικής κατανόησης και της εφαρμογής βασικών μαθηματικών γνώσεων.

Θα προσκομίσουμε στη συνέχεια πολλά τεκμήρια που επιβεβαιώνουν αυτές τις όψεις του προβλήματος, αξιοποιώντας ποσοτικά αλλά κυρίως ποιοτικά δεδομένα από τη διόρθωση ενός μεγάλου αριθμού γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων. Μπορούμε όμως να διατυπώσουμε προκαταρκτικά και με βεβαιότητα την ακόλουθη γενική εκτίμηση σχετικά με τα αποτελέσματα της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Γ΄ Λυκείου:

Οι περισσότεροι μαθητές φαίνεται να γνωρίζουν «μεθοδολογικούς» κανόνες και να επιλύουν μέσω αυτών διάφορες ασκήσεις, επιδεικνύοντας όμως ταυτόχρονα σε άλλες παρόμοιες ασκήσεις κραυγαλέα άγνοια βασικών εννοιών της Άλγεβρας και της Ανάλυσης. Η διαπίστωση αυτή αποτελεί ρουτίνα σε όσους έχουν διορθώσει γραπτά στα βαθμολογικά κέντρα ή έχουν διδάξει Μαθηματικά σε πρωτοετείς φοιτητές.

Ο κύριος σκοπός αυτής της εργασίας δεν είναι η επανάληψη διαπιστώσεων ρουτίνας ούτε η άσκηση ανέξοδης κριτικής, αλλά η κατάθεση συγκεκριμένων διδακτικών προτάσεων που θεωρούμε ότι μπορούν να συμβάλουν στην αντιμετώπιση του προβλήματος. Εν συντομία, τονίζουμε τη μεγάλη ανάγκη διδακτικών παρεμβάσεων που αναβαθμίζουν τη διδασκαλία της θεωρίας και συμβάλουν στην ουσιαστική κατανόηση των βασικών εννοιών της Ανάλυσης, αναδεικνύοντας παράλληλα τις βασικές και ιδιαίτερες μεθοδολογικές αρχές αυτού του κλάδου των Μαθηματικών.

Η πρόταση που θα αναπτύξουμε στη συνέχεια στηρίζεται σε μακρά διδακτική εμπειρία και στην αξιοποίηση του υλικού όλων των σχολικών βιβλίων που έχουν χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία της Ανάλυσης στην Ελλάδα τις τελευταίες δεκαετίες. Από θεωρητική άποψη, η πρόταση αυτή θα μπορούσε να ενταχθεί μέσα στο γενικότερο πλαίσιο των ερευνών και συζητήσεων για τη διδασκαλία της Ανάλυσης που διεξάγονται διεθνώς σε ευρεία κλίμακα, λαμβάνοντας σοβαρά υπόψη τις ιδιαιτερότητες του μαθήματος σε κάθε χώρα (για ορισμένες γενικές επισκοπήσεις ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης παραπέμπεται στις εργασίες [3], [4], [5], [6] και [7] της βιβλιογραφίας).

1. Χαρακτηριστικά παραδείγματα που αναδεικνύουν την έκταση του προβλήματος

Εδώ και χρόνια, κατά τη διόρθωση των γραπτών δοκιμίων των πανελλαδικών εξετάσεων στα βαθμολογικά κέντρα, παρατηρείται ένα γεγονός που δεν είναι εύκολο να εξηγηθεί: Σχεδόν οι μισοί μαθητές κάθε χρόνο αδυνατούν να επωφεληθούν από τη μεγάλη «προσφορά» που γίνεται στο θέμα Α (5 βαθμοί της 20βαθμης κλίμακας), στο οποίο ζητείται παγίως από την Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων η αναπαραγωγή μιας απόδειξης και ενός ή δύο ορισμών από το σχολικό βιβλίο. Οι μισοί περίπου μαθητές δεν γράφουν απολύτως τίποτε όσον αφορά την απόδειξη ή τους ορισμούς και παίρνουν ελάχιστες μονάδες από τις ερωτήσεις «Σωστό –

[5]Στο [2] έχουμε καταγράψει ένα σημαντικό αριθμό σχετικών ερευνών που δημοσιεύτηκαν μέχρι το 2015, ενώ αρκετές ακόμη θα αναφέρουμε στη συνέχεια αυτής της εργασίας. Αξίζει επίσης να σημειωθεί ότι οι περισσότερες από αυτές τις έρευνες έχουν ανακοινωθεί στα Πανελλήνια Συνέδρια της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας.

Λάθος». Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι οι ίδιοι αυτοί μαθητές λύνουν στα υπόλοιπα θέματα αρκετές ασκήσεις, κυρίως εκείνες που αντιμετωπίζονται με συγκεκριμένες διαδικασίες (π.χ. εύρεση των ακροτάτων μιας συνάρτησης με χρήση των ριζών και του προσήμου της πρώτης παραγώγου).

Αυτή η παρατήρηση φαίνεται να επιβεβαιώνεται από πρόσφατες έρευνες, ορισμένες μάλιστα από τις οποίες μελέτησαν την επίδοση των μαθητών στο θέμα Α της θεωρίας επί σειρά ετών (βλ. τις εργασίες [8] και [9] της βιβλιογραφίας).

Προφανώς η επίδοση των μαθητών στις πανελλαδικές εξετάσεις εξαρτάται από πολλούς παράγοντες. Η μεγάλη αποτυχία όμως στο θέμα της θεωρίας, το οποίο ανταμείβει πλουσιοπάροχα από βαθμολογική άποψη την απλή αναπαραγωγή γνωστικών στοιχείων (δηλαδή την απομνημόνευση), στέλνει ανησυχητικά μηνύματα για την επίδραση της διδασκαλίας στη σχέση που αναπτύσσουν οι μαθητές με τη μελέτη του σχολικού βιβλίου. Είναι γνωστό ότι οι περισσότεροι διδάσκοντες, ιδιαίτερα στην Γ΄ Λυκείου,χρησιμοποιούν στην τάξη και συστήνουν στους μαθητές διάφορα βοηθήματα τα οποία εκ των πραγμάτων δεν είναι τίποτε άλλο από συλλογές ασκήσεων «μετά συνοπτικής θεωρίας». Επίσης από τα μηνιαία δελτία παρακολούθησης της ύλης είναι φανερό ότι η πλειοψηφία των διδασκόντων «καλπάζει» για να ολοκληρώσει τάχιστα την «ύλη», ώστε ο υπόλοιπος χρόνος να αφιερωθεί στη διδασκαλία «συνδυαστικών» ασκήσεων οι οποίες ακολουθούν πιστά τη δομή αντίστοιχων θεμάτων που έχουν τεθεί στις πανελλαδικές εξετάσεις. Όπως έχουμε επισημάνει, αυτό το μοντέλο διδασκαλίας αναβαθμίζει σε πρώτιστα εκπαιδευτικά αγαθά την «ασκησιολογία» και τη «μεθοδολογία» και οδηγεί σε μια ραγδαία απαξίωση του σχολικού βιβλίου.

Η αποτυχία στο θέμα θεωρίας των εξετάσεων επιβεβαιώνει απλά ότι η εξίσωση «διδασκαλία = ασκησιολογία + μεθοδολογία» αφαιρεί από πάρα πολλούς μαθητές ακόμη και την ικανότητα αυτόνομης μελέτης του σχολικού βιβλίου. Έχει όμως και άλλες χειρότερες παρενέργειες, όπως π.χ. την ουσιαστική ακύρωση βασικών γνώσεων που έχουν διδαχθεί οι μαθητές σε προηγούμενες τάξεις.

Στα βαθμολογικά κέντρα έχει παρατηρηθεί, ότι η πλειοψηφία των μαθητών της Γ΄ Λυκείου που προσέρχεται στις πανελλαδικές εξετάσεις έχει μεγάλες ελλείψεις σε βασικές μαθηματικές γνώσεις από την ύλη προηγούμενων τάξεων, ιδιαίτερα στον αλγεβρικό λογισμό. Και αυτή η παρατήρηση έχει επιβεβαιωθεί τα τελευταία χρόνια από έρευνες που κατέγραψαν και μελέτησαν τα σχετικά λάθη (βλ. π.χ. τις εργασίες [2], [10] και [11] της βιβλιογραφίας). Αν και στις έρευνες αυτές υπάρχουν χαρακτηριστικά παραδείγματα, θεωρούμε ότι παρουσιάζει ξεχωριστό ενδιαφέρον η περίπτωση του θέματος Β των εξετάσεων του Μαΐου 2016:

ΘΕΜΑ Β

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2+1}$, $x\in\mathbb{R}$

Β1. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως αύξουσα, τα διαστήματα στα οποία η f είναι γνησίως φθίνουσα και τα ακρότατα της f.

Μονάδες 6

Β2. Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η f είναι κυρτή, τα διαστήματα στα οποία η f είναι κοίλη και να προσδιορίσετε τα σημεία καμπής της γραφικής της παράστασης.

Μονάδες 9

Β3. Να βρεθούν οι ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της f.

Μονάδες 7

Β4. Με βάση τις απαντήσεις σας στα ερωτήματα Β1, Β2, Β3 να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f. Μονάδες 3

Όλοι θα συμφωνήσουν προφανώς ότι αυτό το θέμα αξιολογεί τις εντελώς απαραίτητες γνώσεις ενός μαθητή που έχει διδαχθεί στοιχεία του Διαφορικού Λογισμού στην Γ΄ Λυκείου και

φιλοδοξεί να συνεχίσει σπουδές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Η διασταύρωση όμως δεδομένων από διάφορα βαθμολογικά κέντρα έδειξε ότι ένα ποσοστό που κυμαίνεται από 60% έως 65% των μαθητών (δηλαδή περίπου τα δύο τρίτα) έλαβε στο συγκεκριμένο θέμα λιγότερα από 12 μόρια, δηλαδή κάτω από τη βάση! Που οφείλεται αυτή η μεγάλη αποτυχία;
Η λεπτομερής μελέτη των λύσεων που έδωσαν οι μαθητές έδειξε ότι η αποτυχία δεν οφείλεται σε άγνοια των μεθόδων του Διαφορικού Λογισμού, αλλά στην ανικανότητα να χρησιμοποιηθούν βασικές αλγεβρικές γνώσεις που έχουν διδαχθεί στις προηγούμενες τάξεις. Για παράδειγμα, προσπαθώντας να υπολογίσουν τη δεύτερη παράγωγο

$$f''(x)=\left(\frac{2x}{(x^2+1)^2}\right)'=\ldots=\frac{2(x^2+1)^2-8x^2(x^2+1)}{(x^2+1)^4}=\ldots=\frac{2\left(1-3x^2\right)}{\left(x^2+1\right)^3} \qquad (1)$$

οι περισσότεροι μαθητές εκτελούν με ορθό τρόπο τη διαδικασία της πρώτης και δεύτερης παραγώγισης, αλλά επιδεικνύουν απίστευτη άγνοια της διαδικασίας «απλοποίηση ρητής αλγεβρικής παράστασης» (που διδάσκεται στο Γυμνάσιο) και καταλήγουν, αντί για την (1), στην

$$f''(x)=\frac{-6x^4-4x^2+2}{\left(x^2+1\right)^4}.$$

Εύλογα θα παρατηρούσε κανείς ότι αυτή η «παράλειψη» δεν συνιστά ουσιαστικό πρόβλημα, αφού όλοι οι μαθητές είχαν διδαχθεί διτετράγωνες και πολυωνυμικές εξισώσεις στην Α΄ και Β΄ Λυκείου. Αντί όμως να αξιοποιήσουν αυτές τις βασικές αλγεβρικές γνώσεις, οι περισσότεροι μαθητές ακολούθησαν στο σημείο αυτόμε θρησκευτική ευλάβεια τη «μεθοδολογία εισαγωγής βοηθητικών συναρτήσεων» που είχαν κατά κόρον διδαχθεί στην Γ΄ Λυκείου: Έθεσαν μαζικά τον αριθμητή ίσο με

$$h(x)=-6x^4-4x^2+2$$

και άρχισαν να μελετούν με παραγώγους τη νέα βοηθητική συνάρτηση! Μάλιστα ορισμένοι «ταλαντούχοι» ολοκλήρωσαν επιτυχώς αυτή τη «μέθοδο», έγραψαν ακόμη και το σύνολο τιμών της h που δεν είναι απαραίτητο για την επίλυση της άσκησης. Το ουσιώδες όμως είναι ότι με τον τρόπο αυτό δεν βρήκαν τις ρίζες της δεύτερης παραγώγου (δηλαδή της διτετράγωνης εξίσωσης που είναι στην προκειμένη περίπτωση οι τετμημένες των σημείων καμπής), αλλά απέδειξαν την ύπαρξή τους με χρήση του θεωρήματος Bolzano! Αντιλαμβάνεται λοιπόν ο καθένας ποιο ήταν το αποτέλεσμα, όταν επιχείρησαν να σχεδιάσουν τη ζητούμενη γραφική παράσταση της συνάρτησης.
Από την άλλη μεριά, πολλοί μαθητές που είχαν την τεχνική ικανότητα της απλοποίησης υπολόγισαν μεν τη δεύτερη παράγωγο στη μορφή (1), αλλά η μελέτη του προσήμου που ακολούθησε συνοδεύτηκε από καταστροφικά αλγεβρικά λάθη του είδους:

$$1-3x^2>0 \Leftrightarrow x^2<\frac{1}{3} \Leftrightarrow x<\pm\frac{1}{\sqrt{3}} \qquad (2)$$

Τα προηγούμενα παραδείγματα από τη διόρθωση των γραπτών στα βαθμολογικά κέντρα, τα οποία επαναλαμβάνονται στην ίδια ή σε παρόμοια μορφή και σε μεγάλη έκταση κάθε χρόνο, είναι νομίζουμε αρκετά για να μας οδηγήσουν σε ένα όχι ευχάριστο συμπέρασμα:
Ο εκφυλισμός της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο μοντέλο «ασκησιολογία + μεθοδολογία», που οφείλεται σε μεγάλο βαθμό στην επίδραση των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων και καθιστά τη μάθηση της θεωρίας ζήτημα απομνημόνευσης, αφαιρεί ταυτόχρονα από τους περισσότερους μαθητές όλες εκείνες τις ικανότητες που είναι προϋποθέσεις για την ανάπτυξη μαθηματικής σκέψης. Εκτός από άγνοια βασικών προαπαιτούμενων γνώσεων, τα παραδείγματα που αναφέραμε δείχνουν ότι οι μαθητές αγνοούν ακόμη και στοιχειώδεις αρχές κριτικής σκέψης και μεταγνωστικού ελέγχου. Πόσοι άραγε από

αυτούς έχουν εξοικειωθεί να ελέγχουν την εγκυρότητα των αποτελεσμάτων που βρίσκουν (όπως π.χ. την προηγούμενη «λύση» (2)), χρησιμοποιώντας μια απλή αριθμητική αντικατάσταση στην αρχική ανισότητα;

Όσα αναφέρθηκαν παραπάνω προδικάζουν ασφαλώς για τις επιδόσεις των μαθητών σε θέματα τα οποία απαιτούν βαθύτερη εννοιολογική κατανόηση της Ανάλυσης, όπως είναι π.χ. η διαφορετική δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών και του συνόλου των πραγματικών συναρτήσεων. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίστηκε στο θέμα Γ των εξετάσεων του Μαΐου 2016:

ΘΕΜΑ Γ

Γ1. Να λύσετε την εξίσωση $e^{x^2} - x^2 - 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$. Μονάδες 4

Γ2. Να βρείτε όλες τις συνεχείς συναρτήσεις $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, που ικανοποιούν τη σχέση $f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, και να αιτιολογήσετε την απάντησή σας.

Μονάδες 8

Γ3. Αν $f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 = 0,\ x \in \mathbb{R}$ να αποδειχθεί ότι η f είναι κυρτή.

Μονάδες 4

Γ4. Αν f είναι η συνάρτηση του ερωτήματος Γ3 να λυθεί η εξίσωση

$$f\left(|\eta\mu x| + 3\right) - f\left(|\eta\mu x|\right) = f(x+3) - f(x) \text{ όταν } x \in [0, +\infty]$$ Μονάδες 9

Το «σημείο αιχμής» σε αυτό το θέμα είναι το ερώτημα Γ2 (παραλλαγή μιας άσκησης του σχολικού βιβλίου), το οποίο απαιτεί βαθειά κατανόηση της διαφορετικής φύσης των εννοιών του αριθμού και της συνάρτησης. Μια τέτοια κατανόηση βεβαίως είναι αδύνατο να επιτευχθεί στο διδακτικό περιβάλλον που έχουμε περιγράψει με την εξίσωση «διδασκαλία = ασκησιολογία + μεθοδολογία».

Για να κατανοηθεί η έκταση του διδακτικού προβλήματος θα παρουσιάσουμε τον τρόπο με τον οποίο αντιμετώπισαν το ερώτημα αυτό οι περισσότεροι μαθητές.

Οι μαθητές ξεκινούν μετασχηματίζοντας τη δοθείσα σχέση ως εξής:

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \Leftrightarrow f^2(x) - \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow$$

$$\left[f(x) - \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\right] \cdot \left[f(x) + \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\right] = 0$$

Από την τελευταία ισότητα, εφαρμόζοντας μια γνωστή ιδιότητα των πραγματικών αριθμών, συμπεραίνουν ότι θα ισχύει

$$f(x) - \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) = 0 \quad \text{ή} \quad f(x) + \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right) = 0$$

και άρα οι ζητούμενες συναρτήσεις είναι

$$f(x) = e^{x^2} - x^2 - 1 \quad \text{ή} \quad f(x) = -e^{x^2} + x^2 + 1$$

Είναι πραγματικά δύσκολο να εξηγηθεί το λάθος της προηγούμενης λύσης σε μαθητές οι οποίοι ουδέποτε διδάχθηκαν τη σημασία των ποσοδεικτών για την ορθή διατύπωση των προτάσεων που αναφέρονται σε συναρτήσεις. Οι μαθητές αυτοί δικαιολογημένα εκπλήσσονται όταν τους εξηγεί κάποιος ότι το πρόβλημα βρίσκεται στην παράλειψη της φράσης «για κάθε $x \in \mathbb{R}$» που συνοδεύει την υπόθεση του ερωτήματος Γ2:

$$f^2(x) = \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)^2 \quad \text{για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

Γράφοντας αυτή τη φράση σε κάθε βήμα της προηγούμενης λύσης, θα έχουμε

$$\left[f(x) - \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\right] \cdot \left[f(x) + \left(e^{x^2} - x^2 - 1\right)\right] = 0 \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

από την οποία «εύλογα» συμπεραίνει κανείς ότι

$$f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R} \text{ ή } f(x)=e^{x^2}-x^2-1 \text{ για κάθε } x\in\mathbb{R}$$

Χρειάζεται προφανώς αρκετή προεργασία, κατάλληλα παραδείγματα και μεγάλη διδακτική ικανότητα για να κατανοήσουν οι μαθητές το λεπτό σημείο, το οποίο στην ειδική ορολογία της μαθηματικής λογικής εκφράζεται με την πρόταση:

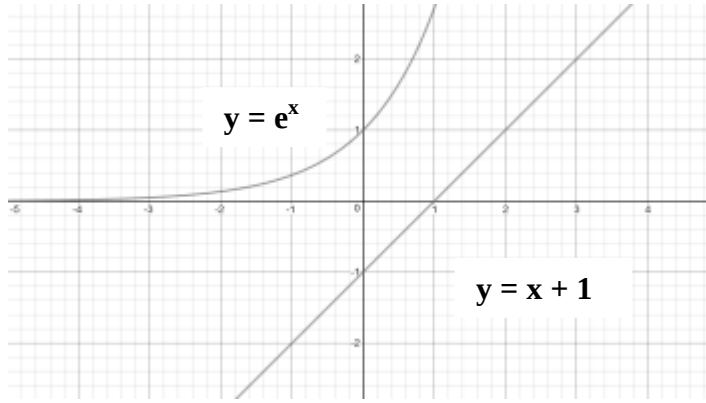
«Ο καθολικός ποσοδείκτης δεν επιμερίζεται ως προς διάζευξη».[6]

Ακόμη μεγαλύτερες δυσκολίες στη διαπραγμάτευση θεμάτων αυτού του είδους αντιμετωπίζουν φυσικά οι μαθητές που βρίσκονται υπό την απόλυτη επήρεια της «μεθοδολογίας». Μια ιδιαίτερη αλλά πολύ χαρακτηριστική περίπτωση αποτελεί η επόμενη «λύση» του ερωτήματος Γ2 που έγραψε ένας μαθητής στις πανελλαδικές εξετάσεις:[7]

$$f^2(x)=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Rightarrow (f(x))^2=\left(e^{x^2}-x^2-1\right)^2 \Rightarrow f(x)=\left|e^{x^2}-x^2-1\right|.$$

Θεωρώ $u = x^2$, τότε $f(x)=\left|e^u-u-1\right|$.

$e^u - u - 1 \geq 0 \Rightarrow e^u \geq u + 1$ ισχύει. Διότι είναι παγκοσμίως γνωστή και η απόδειξή της αποδίδεται μέσα από τις γραφικές τους παραστάσεις, δηλαδή



Επομένως $f(x)=e^{x^2}-x^2-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Είναι πολύ χαρακτηριστικός ο τρόπος με τον οποίο ο συγκεκριμένος μαθητής εφαρμόζει τις «μεθοδολογικές υποδείξεις» σχετικά με την απομάκρυνση του συμβόλου της απόλυτης τιμής και τη γεωμετρική αιτιολόγηση μιας βασικής ανισότητας που δεν ανήκει στη διδακτέα ύλη. Ειδικά στη γραφική παράσταση είναι ολοφάνερο ότι επαναλαμβάνει με εντελώς μηχανιστικό τρόπο, και χωρίς να κατανοεί περί τίνος πρόκειται, αυτά που άκουγε ή αντέγραφε από τον πίνακα.

---

[6] Εννοείται ότι με τα παραπάνω δεν υπονοούμε μια τυπική διδασκαλία στοιχείων της μαθηματικής λογικής ή της δομής του συνόλου των πραγματικών συναρτήσεων στο Λύκειο. Το συγκεκριμένο διδακτικό πρόβλημα δεν λύνεται με την ένταξη των σχετικών θεωρητικών ενοτήτων στα σχολικά βιβλία (κάτι που δοκιμάστηκε χωρίς επιτυχίαaρκετές φορές στο παρελθόν), αλλά με την δημιουργία κατάλληλων δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν τη σημασία ορισμένων λεπτών σημείων της αποδεικτικής διαδικασίας για την ορθή διαπραγμάτευση των εννοιών της Ανάλυσης.

[7] Η λύση παρουσιάζεται όπως ακριβώς δόθηκε στο γραπτό δοκίμιο του μαθητή, εκτός από τη γραφική παράσταση που ήταν ένα βιαστικό σκαρίφημα.

Όλα τα προηγούμενα επιβάλουν προφανώς μια αλλαγή του διδακτικού μοντέλου που έχει επιβληθεί εδώ και χρόνια στη διδασκαλία των Μαθηματικών στην Γ΄ Λυκείου, η αναποτελεσματικότητα του οποίου είναι οφθαλμοφανής ακόμη και με τα πιο «αγοραία» κριτήρια.

Το γεγονός ότι, σύμφωνα με τα επίσημα στατιστικά στοιχεία του Υπουργείου Παιδείας, στις πανελλαδικές εξετάσεις Μαθηματικών Θετικού Προσανατολισμού υπήρξαν 1285 αριστούχοι (δηλαδή γραπτά που ανήκουν στη βαθμολογική κλάση [18–20]), ή ποσοστό της τάξης του 6,6%, δεν μπορεί ασφαλώς να προβάλλεται ως «επιτυχία» της διδασκαλίας που προηγήθηκε. Δυστυχώς δεν διαθέτουμε κάποια ανάλυση της σχολικής και κοινωνικής προέλευσης αυτών των μαθητών (η οποία θα είχε πολύ μεγάλο ενδιαφέρον), αλλά η έλλειψη στοιχείων δεν αναιρεί το επόμενο συμπέρασμα (που μάλλον αποτελεί υπερεκτίμηση της πραγματικότητας): Μόλις και μετά βίας αντιστοιχεί ένας αριστούχος μαθητής ανά δημόσιο Λύκειο πανελλαδικά! [8]

Η αλλαγή του διδακτικού μοντέλου δεν είναι εύκολη υπόθεση, με δεδομένη την απόλυτη εξάρτηση της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην Γ΄ Λυκείου από τα θέματα των πανελλαδικών και την ασκησιολογία που αναπτύσσεται γύρω από αυτά. Αν όμως λάβουμε υπόψη όσα αναφέρθηκαν παραπάνω για τις επιδόσεις των μαθητών στο θέμα Α της θεωρίας και στα θέματα Β και Γ των εξετάσεων του 2016, μπορούμε να δώσουμε ένα βασικό περίγραμμα της κατεύθυνσης που πρέπει να έχει αυτή η αλλαγή.

Προφανώς απαιτείται αρχικά μια ριζική αλλαγή των αντιλήψεων σχετικά με τη διδασκαλία της θεωρίας. Οι αποδείξεις των ελάχιστων θεωρητικών προτάσεων που έχουν απομείνει στην εξεταστέα ύλη δεν είναι δυνατόν να διεκπεραιώνονται ως ζητήματα ρουτίνας, και να θεωρείται αποκλειστική ευθύνη των μαθητών η απομνημόνευσή τους λίγες μέρες πριν από τις εξετάσεις. Στο θεωρητικό κορμό της Ανάλυσης υπάρχει ένα πλήθος προτάσεων (πολλές από τις οποίες περιέχονταν στα σχολικά βιβλία και την εξεταστέα ύλη κατά το παρελθόν), η μελέτη των οποίων μπορεί να οδηγήσει όχι μόνο σε θεωρητική εμβάθυνση, αλλά και σε ουσιαστική κατανόηση της μεθοδολογίας.

Προτείνουμε λοιπόν να ενταχθούν συστηματικά στη διδασκαλία (προσοχή: όχι στην εξεταστέα ύλη!) οι αποδείξεις ενός ικανού αριθμού θεωρητικών προτάσεων της Ανάλυσης που αναδεικνύουν τις βασικές μεθόδους αυτού του κλάδου. Στις επόμενες ενότητες της εργασίας θα αναπτύξουμε το περιεχόμενο αυτής της πρότασης αναφέροντας χαρακτηριστικά παραδείγματα και αξιοποιώντας κυρίως το υλικό των διδακτικών βιβλίων που χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία του μαθήματος τις τελευταίες δεκαετίες.[9]

Θεωρούμε ότι η επισήμανση των προβλημάτων και η πρότασή μας αποτελούν ένα πρώτο, μικρό βήμα για την ομαλή έξοδο της διδασκαλίας των Μαθηματικών από το «εξετασιοκεντρικό» αδιέξοδο στο οποίο έχει περιέλθει, αλλά και αφορμή για συζήτηση και προβληματισμό. Το πρόβλημα που αναδεικνύουν οι εξετάσεις αποτελεί την κορυφή του παγόβουνου, και για να μετουσιωθούν όλα τα προηγούμενα σε καθημερινές διδακτικές πρακτικές απαιτούνται εξαιρετικά καταρτισμένοι διδάσκοντες δηλαδή, με άλλα λόγια, βαθιές τομές στη βασική κατάρτιση και την επιμόρφωση όσων εμπλέκονται στο ευρύ φάσμα της μαθηματικής εκπαίδευσης.

2. Περιγραφή της διδακτικής πρότασης

Η διδακτική πρόταση εστιάζει στη διδασκαλία θεωρητικών ενοτήτων που δεν περιέχονται στην τρέχουσα διδακτέα και εξεταστέα ύλη, αλλά η συστηματική παρουσίαση και μελέτη τους παρέχει ουσιαστική εμβάθυνση στις έννοιες και μεθόδους της Ανάλυσης. Με δεδομένο λοιπόν

---

[8]Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης μπορεί να βρει μια ανάλυση της μεταβολής του ποσοστού των αριστούχων στις πανελλαδικές εξετάσεις Μαθηματικών Θετικής Κατεύθυνσης της τελευταίας 15ετίας στο [2].

[9]Μια πρώτη παρουσίαση της πρότασης έγινε από τον Α. Συγκελάκη τον Απρίλιο του 2016 στην 8η Μαθηματική Εβδομάδα (βλ. [12]).

το υπάρχον πρόγραμμα σπουδών και σχολικό βιβλίο, οι ενότητες αυτές δεν θα χαρακτηριστούν ως πρόσθετη θεωρητική ύλη, αλλά ως υλικό δραστηριοτήτων υψηλού μαθησιακού επιπέδου. Αυτό το στοιχείο διευκολύνει τον προγραμματισμό της διδασκαλίας, επειδή δεν είναι αναγκαίο να διδαχθούν με τη λογική σειρά που θα εμφανίζονταν σε μια συστηματική παρουσίαση της Ανάλυσης αλλά να ενταχθούν, για παράδειγμα, σε μια σειρά επαναληπτικών μαθημάτων μετά την ολοκλήρωση της ύλης.

Βασικοί στόχοι αυτών των δραστηριοτήτων είναι να εξοικειωθούν οι μαθητές με τη χρήση αποδεικτικών μεθόδων και τεχνικών που χρησιμοποιούνται στην Ανάλυση, και να εκτιμήσουν τη σημασία των διάφορων τεχνασμάτων όχι μόνο στην επίλυση επιτηδευμένων και ασύνδετων ασκήσεων, αλλά μέσα από την εφαρμογή τους στις αποδείξεις γενικών προτάσεων. Εξάλλου τα περισσότερα από τα τεχνάσματα που χρησιμοποιούνται, με «ταχυδακτυλουργικό» συνήθως τρόπο, σε σύνθετες ασκήσεις προέρχονται από τις αποδείξεις προτάσεων της θεωρίας.

Στην επιλογή του υλικού ακολουθήσαμε ορισμένα κριτήρια, τα οποία λαμβάνουν σοβαρά υπόψη το δεδομένο πρόγραμμα σπουδών και βιβλίο αλλά και την ανάγκη άμεσης αντιμετώπισης των διδακτικών προβλημάτων που επισημάνθηκαν στην προηγούμενη ενότητα.

Επειδή, για παράδειγμα, στο επίπεδο του Λυκείου δεν είναι δυνατόν να αποδειχθούν με αυστηρότητα όλες οι θεωρητικές προτάσεις της Ανάλυσης, η διδασκαλία καταφεύγει πολύ συχνά (και ορθά!) στη γεωμετρική εποπτεία. Αυτή η πρακτική όμως εξελίσσεται βαθμιαία σε εμπόδιο για την κατανόηση της σκοπιμότητας των ειδικών αποδεικτικών μεθόδων και αλγεβρικών εργαλείων (π.χ. απαγωγή σε άτοπο, ανισότητες κ.α.) που χρησιμοποιούνται στην Ανάλυση. Επομένως παρουσιάζει ενδιαφέρον η επιλογή ορισμένων προτάσεων που έχουν ισχυρή γεωμετρική προφάνεια, για να δείξουμε ακριβώς τη θεμελιώδη διαφορά μεταξύ γεωμετρικής ερμηνείας και μαθηματικής απόδειξης και την αναγκαιότητα των ειδικών τεχνικών που απαιτεί η τελευταία.

Ένα άλλο παράδειγμα αποτελούν οι αποδείξεις προτάσεων οι οποίες αφαιρούνται από τη διδακτέα/εξεταστέα ύλη για λόγους που δεν έχουν καμιά σχέση με τη μαθηματική και διδακτική τους αξία. Ειδικές περιπτώσεις αυτών των προτάσεων που έχουν ισχυρή γεωμετρική προφάνεια μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως λήμματα για να αποδειχθούν με αυστηρότητα οι γενικότερες και λιγότερο προφανείς εκδοχές τους.

Για να αποσαφηνιστούν όλα τα παραπάνω θα περιγράψουμε αναλυτικά ορισμένα χαρακτηριστικά παραδείγματα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 1

Διδακτικές παρατηρήσεις

Αν η συνάρτηση f είναι αντιστρέψιμη, τότε οι εξισώσεις

$$y = f(x) \text{ και } x = f^{-1}(y)$$

παριστάνονται στο καρτεσιανό επίπεδο xOy από την ίδια καμπύλη, γεγονός που καθιστά προφανές από γεωμετρική άποψη ότι ορισμένες ιδιότητες της f όπως η μονοτονία και η συνέχεια «μεταβιβάζονται» στην αντίστροφη συνάρτηση f^{-1}. Αυτή η παρατήρηση[10] αποτελεί εξαιρετική αφετηρία εισαγωγής σε ένα ιδιαίτερο στοιχείο που χαρακτηρίζει τις αυστηρές, «αριθμητικοποιημένες» αποδείξεις των προτάσεων της Ανάλυσης. Δηλαδή, οι αποδείξεις ιδιοτήτων που είναι γεωμετρικά προφανείς απαιτούν εξειδικευμένα λογικά και αλγεβρικά εργαλεία. Η απόδειξη της επόμενης πρότασης αποτελεί ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα.

Μονοτονία αντίστροφης συνάρτησης

Πρόταση: Η αντίστροφη μιας γνησίως μονότονης συνάρτησης είναι γνησίως μονότονη με το ίδιο είδος μονοτονίας.

Απόδειξη (με απαγωγή σε άτοπο)

---

[10] Η οποία αξιοποιείται διδακτικά σε πολλά κλασικά εγχειρίδια Ανάλυσης, όπως π.χ. στο [13] σ.135 και στο [14] σ.229.

Γνωρίζουμε ότι αν μια συνάρτηση $f : A \to \mathbf{R}$ είναι γνησίως μονότονη στο Α, τότε ορίζεται η αντίστροφη συνάρτηση $f^{-1} : f(A) \to A$. Υποθέτουμε ότι η f είναι γνησίως αύξουσα στο Α, δηλαδή για κάθε $x_1, x_2 \in A$ ισχύει η συνεπαγωγή

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

Θα αποδείξουμε ότι η f^{-1} είναι επίσης γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της f(A), δηλαδή για κάθε $y_1, y_2 \in f(A)$ ισχύει η συνεπαγωγή:

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2) \quad (1)$$

Ας υποθέσουμε ότι η (1) δεν αληθεύει. Αυτό σημαίνει ότι υπάρχουν $y_1, y_2 \in f(A)$ τέτοια, ώστε να ισχύει: $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) \geq f^{-1}(y_2)$.

Επειδή $f^{-1}(y_1), f^{-1}(y_2) \in A$ και η f είναι γνησίως αύξουσα, θα ισχύει:

$$f^{-1}(y_2) \leq f^{-1}(y_1) \Rightarrow f\left(f^{-1}(y_2)\right) \leq f\left(f^{-1}(y_1)\right) \Rightarrow y_2 \leq y_1$$

Αυτό όμως είναι άτοπο επειδή $y_1 < y_2$. Άρα η (1) αληθεύει πάντοτε και επομένως η συνάρτηση f^{-1} είναι γνησίως αύξουσα. (Όμοια εργαζόμαστε στην περίπτωση της γνησίως φθίνουσας συνάρτησης.)[11]

Μετά από τη διδασκαλία μιας θεωρητικής πρότασης είναι σκόπιμο βέβαια να ακολουθήσουν εφαρμογές και για το σκοπό αυτό μπορούν να αξιοποιηθούν ορισμένα ενδιαφέροντα θέματα από τη μεγάλη «δεξαμενή» των πανελλαδικών εξετάσεων προηγουμένων ετών.

Εφαρμογή

Επαναληπτικές Εξετάσεις Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2005

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι "1–1". Μονάδες 7

Διδακτικές παρατηρήσεις

Το βασικό λάθος που κάνουν οι περισσότεροι μαθητές στο συγκεκριμένο θέμα είναι ότι μεταφέρουν αυθαίρετα το «νόμο της τριχοτομίας» των πραγματικών αριθμών στη συνάρτηση f': Ισχυρίζονται δηλαδή ότι επειδή ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$, θα είναι $f'(x) > 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ ή $f'(x) < 0$ κάθε $x \in \mathbb{R}$, οπότε η συνάρτηση θα είναι γνησίως μονότονη και άρα συνάρτηση "1–1". Ουσιαστικά χρησιμοποιούν τη «μεθοδολογία» της διατήρησης του προσήμου μιας συνεχούς συνάρτησης σε ένα διάστημα στο οποίο δεν μηδενίζεται καθώς και τη σχέση παραγώγου-μονοτονίας, παραλείποντας βέβαια και στις δύο περιπτώσεις την ουσιώδη προϋπόθεση της συνέχειας η οποία δεν ισχύει απαραίτητα για την f'.[12]

Ένας έμμεσος τρόπος απόδειξης εδώ είναι η εφαρμογή της απαγωγής σε άτοπο (ακριβέστερα, η απόδειξη της αντιθετοαντίστροφης πρότασης):

Απόδειξη (με απαγωγή σε άτοπο)

---

[11] Υπενθυμίζουμε ότι η προηγούμενη πρόταση και η απόδειξη της υπήρχαν σε όλα τα προηγούμενα σχολικά βιβλία που χρησιμοποιήθηκαν για τη διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου. Βλ. συγκεκριμένα [15] σ.30, [16] σ.32 και [17] σ.40.

[12] Είναι βέβαια γνωστό ότι αν ισχύει $f'(x) \neq 0$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$ (το $\mathbb{R}$ μπορεί να αντικατασταθεί με οποιοδήποτε διάστημα Δ ανοικτό ή κλειστό), τότε η συνάρτηση fθα είναι πράγματι γνησίως μονότονη, αλλά αυτό αποτελεί ένα πόρισμα του θεωρήματος ενδιαμέσων τιμών για την παράγωγο συνάρτηση (θεώρημα Darboux) το οποίοδεν υπάρχει στη σχολική ύλη (αν και η απόδειξή του είναι κατανοητή από ένα μαθητή Λυκείου).

Υποθέτουμε ότι η συνάρτηση f δεν είναι "1–1". Τότε θα υπάρχουν δύο τουλάχιστον πραγματικοί αριθμοί α, β με α < β, τέτοιοι ώστε να ισχύει f(α) = f(β). Επειδή η συνάρτηση f είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$, άρα και συνεχής σε αυτό, συμπεραίνουμε ότι στο διάστημα [α, β] ισχύουν για την f οι προϋποθέσεις του θεωρήματος Rolle. Άρα υπάρχει αριθμός $\xi \in (\alpha, \beta)$ με $f'(\xi) = 0$, που είναι άτοπο.[13]

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 2

Διδακτικές παρατηρήσεις

Είναι γνωστό ότι στην Γ΄ Λυκείου οι μαθητές ασκούνται εντατικά στον υπολογισμό ορίων πολύπλοκων συναρτήσεων, χρησιμοποιώντας τις σχετικές ιδιότητες και ένα μεγάλο αριθμό τεχνασμάτων που η διδασκαλία έχει αναγάγει σε «μεθοδολογία». Όλοι όμως αυτή η εξάσκηση συνοδεύεται από μια ασαφή γεωμετρική αντίληψη για την έννοια του ορίου, πλήρη άγνοια του τρόπου απόδειξης των σχετικών προτάσεων, ενδεχομένως και από μεγάλη σύγχυση για τις ακριβείς προϋποθέσεις κάτω από τις οποίες ισχύουν ορισμένες από αυτές (π.χ. ο κανόνας del' Hospital). Θεωρούμε ότι είναι απολύτως λανθασμένο διδακτικά να εξαντλείται η εκτεταμένη διδασκαλία των ενοτήτων που αναφέρονται στα όρια (35 σελίδες του σχολικού βιβλίου) σε αλγοριθμικές και υπολογιστικές τεχνικές επίλυσης ασκήσεων, χωρίς να επιχειρείται κάποια παράλληλη εμβάθυνση στην αποδεικτική διαδικασία. Μια ενδιαφέρουσα σχετική δραστηριότητα προς αυτή την κατεύθυνση μπορεί να είναι η απόδειξη του «κριτηρίου παρεμβολής», με αφετηρία την ακόλουθη ειδική περίπτωση:

Μια πρόταση – ειδική περίπτωση του κριτηρίου παρεμβολής

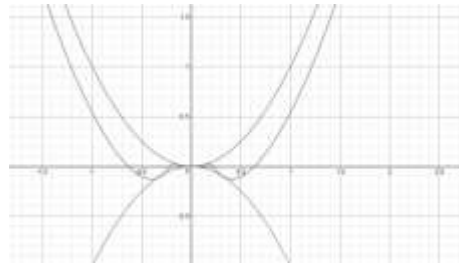
Αν f και g είναι δύο συναρτήσεις που ορίζονται κοντά στο σημείο $x_o \in \mathbb{R}$ τότε ισχύει η συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{array}{r} -g(x) \le f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x \to x_o} g(x) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x \to x_o} f(x) = 0 \qquad (1)$$

Η πρόταση αυτή μπορεί να αιτιολογηθεί γεωμετρικά με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα, όπως π.χ. η συνάρτηση $f(x) = x^2 \text{συν}\frac{1}{x}$.

Με τη βοήθεια της γραφικής παράστασης που ακολουθεί μπορούμε να εξηγήσουμε αρκετά ικανοποιητικά στους μαθητές ότι ισχύει

$$-x^2 \le f(x) \le x^2 \quad \text{και} \quad \lim_{x \to 0} f(x) = 0$$ [14]



[13] Στην απόδειξη αυτή, εκτός από τη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο, γίνεται επίσης πολύ ουσιαστική αξιοποίηση του θεωρήματος Rolle, ενός από τα λεγόμενα «υπαρξιακά» θεωρήματα της Ανάλυσης που η αλόγιστη ασκησιολογία έχει μεταλλάξει σε «γεννήτριες» πιθανών θεμάτων. Μια διαφορετική απόδειξη χωρίς χρήση της απαγωγής σε άτοπο θα δώσουμε στο Παράδειγμα 4.

[14] Η θεωρητική απόδειξη της (1) δεν είναι δύσκολη αλλά απαιτεί τον εψιλοντικό ορισμό του ορίου που δεν μπορεί να διδαχθεί αποτελεσματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Οι συναρτήσεις $f(x) = x^2 \text{συν}\frac{1}{x}$, $g(x) = x^2$ και $-g(x) = -x^2$

Χρησιμοποιώντας τώρα την (1) ως λήμμα, μπορούμε να αποδείξουμε αυστηρά το κριτήριο παρεμβολής με τρόπο που αναδεικνύει τη μεθοδολογική σημασία των αλγεβρικών μετασχηματισμών και της δημιουργίας βοηθητικών συναρτήσεων. Η αποδεικτική διαδικασία δεν λειτουργεί εδώ μόνο ως μέσο επιβεβαίωσης της αλήθειας μιας πρότασης, αλλά έχει πολλαπλές διδακτικές λειτουργίες τις οποίες έχουν αναδείξει πολλές πρόσφατες έρευνες της Διδακτικής των Μαθηματικών. Στο πλαίσιο της πρότασης, οι λειτουργίες αυτές μπορούν να αξιοποιηθούν για την ανατροπή της αντίληψης που καλλιεργεί η καθιερωμένη διδασκαλία ότι οι αποδείξεις των θεωρητικών προτάσεων δεν είναι παρά μόνο πιθανά θέματα προς απομνημόνευση.

Απόδειξη του κριτηρίου παρεμβολής

$$\left.\begin{array}{c} h(x) \le f(x) \le g(x) \\ \lim\limits_{x\to x_o} h(x) = l = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) \end{array}\right\} \Rightarrow \lim_{x\to x_o} f(x) = l$$

Από τη δοθείσα ανισοτική σχέση προκύπτει ότι

$$0 \le f(x) - h(x) \le g(x) - h(x)$$

και άρα ισχύει: $-\big(g(x) - h(x)\big) \le f(x) - h(x) \le g(x) - h(x)$

Επίσης ισχύει: $\lim\limits_{x\to x_o}\big(g(x) - h(x)\big) = \lim\limits_{x\to x_o} g(x) - \lim\limits_{x\to x_o} h(x) = 0$.

Αν λοιπόν θέσουμε φ(x) = f(x) – h(x) και σ(x) = g(x) – h(x), τότε για τις συναρτήσεις φ και σ ισχύουν οι προϋποθέσεις του λήμματος (1) οπότε θα είναι

$$\lim_{x\to x_o} \varphi(x) = \lim_{x\to x_o}\big(f(x) - h(x)\big) = 0$$

Άρα θα έχουμε $\lim\limits_{x\to x_o} f(x) = \lim\limits_{x\to x_o}\Big[\big(f(x) - h(x)\big) + h(x)\Big] = 0 + l = l$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 3

Διδακτικές παρατηρήσεις

Η μεθοδολογική αξία του κριτηρίου παρεμβολής γίνεται ιδιαίτερη φανερή όταν ζητείται ο υπολογισμός του ορίου μιας συνάρτησης χωρίς να δίνεται ο τύπος της, αλλά από τα υπόλοιπα δεδομένα είναι δυνατός ο προσδιορισμός της σχετικής διπλής ανισότητας. Είναι γνωστό ότι η διδασκαλία του αλγεβρικού λογισμού στις προηγούμενες τάξεις δεν έχει ως προτεραιότητα την απόδειξη ανισοτήτων, με αποτέλεσμα οι μαθητές στην Γ΄ Λυκείου να αντιμετωπίζουν ιδιαίτερες δυσκολίες στο συγκεκριμένο ζήτημα, πόσο μάλλον όταν η κατάλληλη διπλή ανισότητα για την εφαρμογή του κριτηρίου παρεμβολής πρέπει να δημιουργηθεί από τους ίδιους. Όλα αυτά συνηγορούν για τη μεγάλη αναγκαιότητα δραστηριοτήτων που αναδεικνύουν συστηματικά τα διαδοχικά στάδια αυτής της διαδικασίας.

Ένα εξαιρετικό παράδειγμα που θα μπορούσε να αποτελέσει τον κορμό μιας τέτοιας δραστηριότητας αποτελεί η πρόταση που αναφέρεται την παράγωγο της λογαριθμικής συνάρτησης. Η απόδειξη αυτής της πρότασης, για λόγους διδακτικά ανεξήγητους, παραλείπεται από το σχολικό βιβλίο.

Η παράγωγος της λογαριθμικής συνάρτησης f(x) = lnx

$$(\ln x)' = \frac{1}{x},\ x > 0$$

Μια σκιαγράφηση της απόδειξης

Με αφετηρία τον ορισμό της παραγώγου ισχύει ότι:

$$f'(x_o)=\lim_{x\to x_o}\frac{f(x)-f(x_o)}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\ln x-\ln x_o}{x-x_o}=\lim_{x\to x_o}\frac{\ln\frac{x}{x_o}}{x_o\left(\frac{x}{x_o}-1\right)}=\frac{1}{x_o}\cdot\lim_{u\to 1}\frac{\ln u}{u-1}$$ Έτσι

αναδεικνύεται αρχικά η σημασία του υπολογισμού του ορίου $\lim_{x\to 1}\frac{\ln x}{x-1}=1$.

Επειδή στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ανεφάρμοστοι οι συνήθεις αλγεβρικοί μετασχηματισμοί και οι αντίστοιχες ιδιότητες των ορίων, θα αξιοποιήσουμε το κριτήριο παρεμβολής κατασκευάζοντας τις σχετικές ανισότητες.

Για το σκοπό αυτό υπάρχουν διάφορες επιλογές, η πιο γνωστή από τις οποίες χρησιμοποιεί ως αφετηρία την ανισότητα $e^x \ge x+1,\ x\in\mathbf{R}$. (1)

Από την (1) αποδεικνύεται εύκολα η ανισότητα $\ln x \le x-1,\ x>0$ (2)

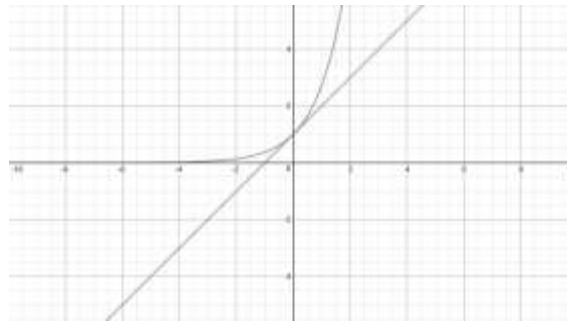
και από τη (2), με διάκριση περιπτώσεων, οι ανισότητες

$$\frac{1}{x}\le\frac{\ln x}{x-1}\le 1,\ \ x\in(1,+\infty)\ \ \text{και}\ \ 1\le\frac{\ln x}{x-1}\le\frac{1}{x},\ \ x\in(0,1)$$

που γράφονται ισοδύναμα:

$$1-\frac{1}{x}\le\ln x\le x-1,\ \ x\in(1,+\infty)\ \ \text{και}\ \ x-1\le\ln x\le 1-\frac{1}{x},\ \ x\in(0,1)$$ [15]

Στο πλαίσιο αυτής της δραστηριότητας η ανισότητα (1) χρησιμοποιείται ως λήμμα και μπορεί να αιτιολογηθεί γεωμετρικά με χρήση των αντίστοιχων γραφικών παραστάσεων: [16]



Γεωμετρική ερμηνεία της ανισότητας $e^x \ge x+1,\ x\in\mathbf{R}$

Εφαρμογή

Επαναληπτικές Εξετάσεις Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2006

ΘΕΜΑ 4ο

β. Να υπολογίσετε το $\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)$ Μονάδες 5

---

[15] Για τις λεπτομέρειες βλ. π.χ. στα παλαιότερα σχολικά βιβλία [15] σ.111 ή [16] σ.149.

[16] Το παράδειγμα αυτό προσφέρεται επίσης για να επισημανθεί η θεμελιώδης διαφορά ανάμεσα στη γεωμετρική αιτιολόγηση της ανισότητας (1), η οποία έχει κυρίως ευρετικό χαρακτήρα, και στην αυστηρή απόδειξη των λογαριθμικών ανισοτήτων με αλγεβρικούς μετασχηματισμούς που στηρίζονται αποκλειστικά στις ιδιότητες της διάταξης του $\mathbb{R}$.Είναι γνωστή η μεγάλη δυσκολία που αντιμετωπίζουν οι περισσότεροι μαθητές στην απόδειξη ανισοτήτων, πόσο δε μάλλον όταν αυτές δεν είναι γνωστές αλλά πρέπει να επινοηθούν.

Ο κλασικός υπολογισμός αυτού του ορίου ακολουθεί την «πεπατημένη», δηλαδή τη χρήση του κανόνα del'Hospital μέσω του μετασχηματισμού

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}}.$$

Στο πλαίσιο όμως της προηγούμενης δραστηριότητας, που είχε ως αντικείμενο τον προσδιορισμό της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης, αξίζει να αναφερθεί και ένας άλλος τρόπος υπολογισμού ο οποίος στηρίζεται στον ακόλουθο μετασχηματισμό:

$$\lim_{x\to\infty} x\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to\infty}\frac{\ln\left(1+\frac{1}{x}\right)-\ln 1}{\left(1+\frac{1}{x}\right)-1}=\lim_{u\to 1}\frac{\ln u-\ln 1}{u-1}.$$

Όπως βλέπουμε, με τον τρόπο αυτό το ζητούμενο όριο ανάγεται απ' ευθείας στην τιμή της παραγώγου της λογαριθμικής συνάρτησης f(u) = lnu στο σημείο 1 και άρα ισούται με

$$f'(1)=1.$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 4

Διδακτικές παρατηρήσεις

Ως τέταρτο και τελευταίο παράδειγμα της διδακτικής πρότασης θα αναπτύξουμε ένα πλάνο παρουσίασης των «υπαρξιακών» θεωρημάτων της Ανάλυσης που περιέχονται στα σχολικά βιβλία. Μέσα στο καθιερωμένο πλαίσιο διδασκαλίας που εξαντλείται στην «ασκησιολογία» και «μεθοδολογία», τα σπουδαία αυτά θεωρήματα δεν λειτουργούν για το σκοπό για τον οποίο επινοήθηκαν, δηλαδή ως ακρογωνιαίοι συνδετικοί λίθοι στο θεωρητικό οικοδόμημα της Ανάλυσης.[17] Αντίθετα, εκφυλίζονται σε «γεννήτριες» ασκήσεων που επιχειρούν να συνδυάσουν τα πιο ετερόκλιτα στοιχεία της σχολικής ύλης οδηγώντας συνήθως σε «τερατογενέσεις». Σε αυτήν ακριβώς την κατηγορία ανήκουν πολλά από τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων της τελευταίας 15ετίας, τα οποία βέβαια λειτούργησαν στη συνέχεια ως πρότυπα μιας ανεξέλεγκτης υπερπαραγωγής παρόμοιων ασκήσεων που καλύπτουν τόμους «βοηθημάτων».

Για να δοθεί επομένως στους μαθητές μια ιδέα του πραγματικού ρόλου αυτών των «υπαρξιακών» θεωρημάτων, θα πρέπει να ενσωματωθούν στη διδασκαλία δραστηριότητες που αναδεικνύουν τον τρόπο με τον οποίο οικοδομείται θεωρητικά η Ανάλυση. Αυτό μπορεί να γίνει παραθέτοντας μια θεωρητική αλυσίδα ορισμών και προτάσεων που η μία έπεται λογικά από την άλλη, όπως είναι π.χ. η εξής:

Ορισμός παραγώγου
Ορισμός τοπικών ακροτάτων
Θεώρημα Fermat
Θεώρημα Rolle
Θεώρημα Μέσης Τιμής
Κριτήριο σταθερής συνάρτησης
Ορισμός παράγουσας
Χαρακτηρισμός των παραγουσών μιας συνάρτησης.[18]

---

[17]Ενα χαρακτηριστικό παράδειγμα της ιστορικής εξέλιξης των υπαρξιακών θεωρημάτων περιγράφεται στο [18], σσ.89–95.

[18]Με τη συγκεκριμένη λογική σειρά (η οποία είναι διαφορετική από εκείνη του σχολικού βιβλίου)μπορούν να αποδειχθούν όλα τα αναφερόμενα θεωρήματα. Οι αποδείξεις υπάρχουν σε

Αναλύοντας τη λογική αλληλουχία των προτάσεων καθώς και τις τεχνικές που χρησιμοποιούνται στις αντίστοιχες αποδείξεις, οι μαθητές εμβαθύνουν στη θεωρητική δομή της Ανάλυσης και αναγνωρίζουν ότι η ανάπτυξή της μπορεί να γίνει με πολλούς διαφορετικούς τρόπους. Με τον τρόπο αυτό επίσης ενισχύεται η ικανότητα ελέγχου μιας αποδεικτικής διαδικασίας και η αποφυγή «κυκλικών συλλογισμών», ένα φαινόμενο που παρουσιάζεται με μεγάλη συχνότητα στα γραπτά των πανελλαδικών εξετάσεων.
Για την πληρότητα της πρότασης και επειδή δεν υπάρχουν στο εν χρήσει σχολικό βιβλίο, αναφέρουμε τις αποδείξεις των θεωρημάτων του Rolle και της Μέσης Τιμής μέσα στη συγκεκριμένη θεωρητική αλυσίδα.

Θεώρημα του Rolle

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)
- f(α) = f(β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε: $f'(\xi) = 0$

Απόδειξη

● Αν η συνάρτηση f είναι σταθερή στο [α, β], τότε $f'(\xi) = 0$ για κάθε $\xi \in [\alpha, \beta]$.

● Αν η f δεν είναι σταθερή τότε, επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], θα υπάρχουν σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής σημεία $x_\varepsilon, x_\mu \in [\alpha, \beta]$ τέτοια, ώστε για κάθε $x \in [\alpha, \beta]$ να ισχύει $f(x_\varepsilon) \le f(x) \le f(x_\mu)$ με $f(x_\varepsilon) \ne f(x_\mu)$.
Τα σημεία x_ε, x_μ δεν μπορεί να είναι τα δύο άκρα του διαστήματος [α, β], διότι αν π.χ. είναι $x_\varepsilon = \alpha$ και $x_\mu = \beta$, τότε θα ισχύει $f(\alpha) = f(x_\varepsilon) < f(x_\mu) = f(\beta)$ που είναι άτοπο επειδή από υπόθεση ισχύει f(α) = f(β).
Επομένως ένα τουλάχιστον από αυτά είναι εσωτερικό σημείο του διαστήματος, έστω το x_ε. Επειδή η f παρουσιάζει ακρότατο στο $x_\varepsilon \in (\alpha, \beta)$, θα ισχύει σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat $f'(x_\varepsilon) = 0$, δηλαδή το x_ε είναι το ζητούμενο σημείο ξ.

Θεώρημα της Μέσης Τιμής

Αν μια συνάρτηση f είναι:

- συνεχής στο κλειστό διάστημα [α, β]
- παραγωγίσιμη στο ανοικτό διάστημα (α, β)

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, σημείο $\xi \in (\alpha, \beta)$ τέτοιο, ώστε:

$$f'(\xi) = \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$$

Απόδειξη

Θεωρούμε τη συνάρτηση $g(x) = f(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}(x - \alpha)$ για την οποία ισχύουν τα εξής:

- Είναι συνεχής στο [α, β],
- Παραγωγίσιμη στο (α, β) με $g'(x) = f'(x) - \frac{f(\beta) - f(\alpha)}{\beta - \alpha}$ (1)
- Ισχύει g(α) = f(α) = g(β) .

διάφορα βιβλία Ανάλυσης, ενώ μια ενδιαφέρουσα παρουσίαση στην οποία τονίζονται τα διδακτικά πλεονεκτήματα αυτής της διάταξης γίνεται στο [19].

Επομένως, σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle υπάρχει ξ ∈ (α, β) τέτοιο, ώστε $g'(\xi)=0$, οπότε από την (1) προκύπτει ότι

$$f'(\xi)-\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=0 \Leftrightarrow f'(\xi)=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}$$

Η διδακτική αξία αυτών των αποδείξεων δεν βρίσκεται τόσο στο γεγονός ότι «πείθουν» τους μαθητές για την αλήθεια των αντίστοιχων προτάσεων (αυτό θα μπορούσε να γίνει πολύ πιο εύκολα και πειστικά μέσω της γεωμετρικής ερμηνείας τους) αλλά στα ουσιαστικά μεθοδολογικά μηνύματα τα οποία μεταφέρουν. Η πρόκληση για τη διδασκαλία είναι να αναδείξει π.χ. τη χρήση της απαγωγής σε άτοπο με την οποία το συμπέρασμα του θεωρήματος μέγιστης και ελάχιστης τιμής συνδέεται με τις υποθέσεις του θεωρήματος Fermat, ή το «κτίσιμο» μιας βοηθητικής συνάρτησης η οποία συνδέει τις υποθέσεις του θεωρήματος Rolle με το συμπέρασμα του θεωρήματος Μέσης Τιμής.

Εφαρμογή 1

Επαναληπτικές Εξετάσεις Θετικής & Τεχνολογικής Κατεύθυνσης 2005

ΘΕΜΑ 3ο

Δίνεται η συνάρτηση f, η οποία είναι παραγωγίσιμη στο $\mathbb{R}$ με $f'(x)\neq 0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

α. Να δείξετε ότι η f είναι “1 – 1”. Μονάδες 7

Διδακτικές παρατηρήσεις

Στο Παράδειγμα 1 δώσαμε μια έμμεση απόδειξη αυτής της πρότασης με απαγωγή σε άτοπο, χρησιμοποιώντας το θεώρημα Rolle. Για να τονίσουμε ακόμη περισσότερο τις μεγάλες αποδεικτικές δυνατότητες των «υπαρξιακών» θεωρημάτων, θα δώσουμε και μια άμεση απόδειξη σύμφωνα με τον ορισμό της συνάρτησης 1 – 1:

Για κάθε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ ισχύει $f(x_1)\neq f(x_2)$

Επειδή το δεδομένο της πρότασης αναφέρεται σε ιδιότητα των τιμών της παραγώγου και το ζητούμενο σε ιδιότητα των τιμών της συνάρτησης, προσφέρεται μεθοδολογικά η αξιοποίηση του θεωρήματος Μέσης Τιμής του οποίου οι προϋποθέσεις ισχύουν στη συγκεκριμένη περίπτωση σε κάθε διάστημα της μορφής $[x_1, x_2]$.

Απόδειξη

Θεωρούμε $x_1, x_2\in\mathbb{R}$ με $x_1\neq x_2$ και ειδικότερα $x_1<x_2$. Από το θεώρημα μέσης τιμής του διαφορικού λογισμού συμπεραίνουμε ότι για τη συνάρτηση f θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\xi\in(x_1, x_2)$ τέτοιο ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}.$$

Άρα, λόγω της υπόθεσης, θα είναι $\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}\neq 0$ δηλαδή $f(x_1)\neq f(x_2)$.

Εφαρμογή 2

Έστω μια συνάρτηση f: [α, β] →$\mathbb{R}$ δύο φορές παραγωγίσιμη με σύνολο τιμών το κλειστό διάστημα [1, 4] και f(α) = 2, f(β) = 3. Να αποδείξετε ότι:

α) Υπάρχουν $x_1, x_2\in(\alpha,\beta)$ τέτοια ώστε $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $f''(x_o)=0$

γ) Η εξίσωση $2xf'(x)=-(x^2+1)f''(x)$ έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β).

δ) Υπάρχει τουλάχιστον ένα $\xi \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο ώστε $|f'(\xi)| > \frac{3}{\beta-\alpha}$.

ε) Αν F μια αρχική της f στο [α, β] για την οποία ισχύει f(x)F(α + β – x) = 1 για κάθε $x \in [\alpha,\beta]$, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g(x) = F(x)F(α + β – x) είναι σταθερή και να βρείτε τον τύπο της.

Λύση

α) Επειδή η f είναι συνεχής στο [α, β], θα υπάρχουν σύμφωνα με το θεώρημα μέγιστης και ελάχιστης τιμής αριθμοί $x_1, x_2 \in [\alpha,\beta]$ ώστε $f(x_1)=1$ και $f(x_2)=4$. Οι x_1, x_2 είναι εσωτερικά σημεία του διαστήματος [α, β], διότι αν $x_1=\alpha$ ή $x_1=\beta$, τότε $f(x_1)=f(\alpha)=2$ ή $f(x_1)=f(\beta)=3$ που είναι άτοπο σύμφωνα με την υπόθεση. Όμοια και για την τιμή x_2.

Η f παρουσιάζει ελάχιστη τιμή στο x_1 και μέγιστη τιμή στο x_2, είναι παραγωγίσιμη άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Fermat θα ισχύει $f'(x_1)=f'(x_2)=0$.

β) Έστω ότι για τους αριθμούς που βρέθηκαν στο ερώτημα (α) ισχύει $x_1 < x_2$.

Η f είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο [α, β] άρα και στο $[x_1, x_2]$.

Σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_o \in (\alpha,\beta)$ ώστε $f''(x_o)=0$

γ) Η εξίσωση γράφεται ισοδύναμα

$$2xf'(x)+(x^2+1)f''(x)=0 \Leftrightarrow \left[(x^2+1)f'(x)\right]'=0 \qquad (1)$$

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=(x^2+1)f'(x)$, $x \in [\alpha,\beta]$

Η h είναι παραγωγίσιμη στα διαστήματα [α, β] και $[x_1, x_2]$ με $h(x_1)=h(x_2)=0$. Άρα σύμφωνα με το θεώρημα του Rolle θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\rho \in (x_1, x_2)$ ώστε $h'(\rho)=0$, δηλαδή το ρ είναι ρίζα της εξίσωσης (1). Όμοια αν $x_2 < x_1$.

δ) Η f είναι παραγωγίσιμη στο $[x_1, x_2]$ οπότε σύμφωνα με το Θεώρημα Μέσης Τιμής θα υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (x_1, x_2) \subset (\alpha,\beta)$ ώστε

$$f'(\xi)=\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1}=\frac{3}{x_2-x_1}$$

Επειδή ισχύει $x_2-x_1<\beta-\alpha$, θα είναι $|f'(\xi)|=\frac{3}{x_2-x_1}>\frac{3}{\beta-\alpha}$. Όμοια αν $x_2<x_1$

ε) Ισχύει g΄(x) = f(x)F(α + β – x) – F(x)f(α + β – x) = 0 και άρα η g είναι σταθερή.

$$g(x)=c \Leftrightarrow F(x)\cdot F(\alpha+\beta-x)=c \qquad (2)$$

Από την υπόθεση f(x)F(α + β – x) = 1 για x = α και x = β προκύπτει ότι

$$f(\alpha)\cdot F(\beta)=1 \Leftrightarrow F(\beta)=\frac{1}{2} \text{ και } f(\beta)\cdot F(\alpha)=1 \Leftrightarrow F(\alpha)=\frac{1}{3}$$

Από την (2) για x = α έχουμε $F(\alpha)\cdot F(\alpha+\beta-\alpha)=c \Leftrightarrow F(\alpha)\cdot F(\beta)=c \Leftrightarrow c=\frac{1}{6}$

Άρα είναι $g(x)=\frac{1}{6}$.

3. Μερικές τελικές παρατηρήσεις και προτάσεις

Όπως δείξαμε αναλυτικά στο πρώτο μέρος της εργασίας, αξιοποιώντας εμπειρικά δεδομένα από τις επιδόσεις των μαθητών στις πανελλαδικές εξετάσεις, η διδακτική πρόταση που καταθέτουμε επιχειρεί να αντιμετωπίσει ορισμένα σημαντικά προβλήματα σχετικά με τη διδασκαλία και μάθηση της Ανάλυσης. Τα προβλήματα αυτά συνδέονται σε μεγάλο βαθμό με τις αρνητικές επιδράσεις των πανελλαδικών εξετάσεων και ιδιαίτερα την «ασκησιολογία» που αναπτύσσεται γύρω από τα λεγόμενα «συνδυαστικά» θέματα.
Η πρώτη ένσταση που μπορεί να διατυπωθεί εναντίον αυτής της πρότασης είναι ότι προσπαθώντας να αντιμετωπίσουμε τη Σκύλλα της «ασκησιολογίας» κινδυνεύουμε να πέσουμε στη Χάρυβδη της «θεωρητικολογίας». Ως απάντηση σε αυτή την ένσταση πρέπει αρχικά να τονίσουμε ότι η πρόταση επιχειρεί να αναβαθμίσει τη διδασκαλία της θεωρίας από την κατάσταση «υποχείριου» της ασκησιολογίας στην οποία έχει περιέλθει, χωρίς να θέτει ζήτημα αύξησης της εξεταστέας ύλης. Το σημαντικότερο όμως στοιχείο είναι ότι η συστηματική διδασκαλία των θεωρητικών προτάσεων της Ανάλυσης αναδεικνύει όλα εκείνα τα μεθοδολογικά εργαλεία που είναι αναγκαία για την αντιμετώπιση ακόμη και των πιο εξεζητημένων ασκήσεων.
Μια δεύτερη ενδεχόμενη ένσταση αφορά την επάρκεια του χρόνου που απαιτείται για την εφαρμογή της πρότασης στη διδασκαλία της Ανάλυσης. Όπως έχουμε ήδη αναφέρει, ο χρόνος για την ολοκλήρωση της διδακτέας/εξεταστέας ύλης στην Γ΄ Λυκείου είναι υπεραρκετός, ακόμη και αν συμπεριλάβουμε σε αυτήν όλη την «ασκησιολογία» και «μεθοδολογία» που θεωρούνται απαραίτητες για την προετοιμασία των μαθητών. Η συρρίκνωση της ύλης τα τελευταία χρόνια έχει οδηγήσει στην εκμετάλλευση κάθε δυνατού συνδυασμού για τη δημιουργία «πρωτότυπων» θεμάτων, τα οποία με τη σειρά τους επιβάλουν στη διδασκαλία μια ατέρμονη συζήτηση λεπτομερειών και περιπτωσιολογίας. Επομένως ο χρόνος που απαιτείται για την υλοποίηση των προτεινόμενων δραστηριοτήτων στην τάξη δεν αποτελεί παρά ένα μικρό τμήμα του υπερβολικού χρόνου που διατίθεται ούτως ή άλλως για εξάσκηση των μαθητών σε θέματα παρόμοια με αυτά των πανελλαδικών εξετάσεων.

Η υλοποίηση των προηγούμενων προτάσεων που απευθύνονται στο χώρο της διδασκαλίας δεν θα είναι αποτελεσματική χωρίς αντίστοιχες παρεμβάσεις στην επιλογή των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων. Οι αλλαγές σε αυτόν τον τομέα είναι πιο περίπλοκες, καθώς συνδέονται με τα «ιερά» ζητήματα της λειτουργικότητας και του αδιάβλητου των εξετάσεων. Θεωρούμε ότι ένα πρώτο βήμα προς αυτή την κατεύθυνση μπορεί να είναι η επιμήκυνση του χρόνου που συνεδριάζει η επιτροπή θεματοδοτών (δηλαδή ο «εγκλεισμός» στο κτίριο του Υπουργείου Παιδείας). Είναι προφανές ότι ακόμη και μια μικρή επέκταση αυτού του χρόνου, από το καθιερωμένο 12ωρο της προηγούμενης νύχτας σε ένα 24ωρο πριν τις εξετάσεις, θα βοηθήσει τους θεματοδότες να σταθμίσουν καλύτερα τις συνέπειες των επιλογών τους και θα συμβάλει στην επιλογή πιο ποιοτικών θεμάτων.

Βιβλιογραφικές παραπομπές

[1] Σπυρέλλης, Ν. (1995). Επιδράσεις του συστήματος των Γενικών Εξετάσεων στην εκπαιδευτική διαδικασία της Τριτοβάθμιας Εκπαίδευσης. *Πρακτικά Συμποσίου «Μηχανισμοί και Όροι Επιλογής για την Τριτοβάθμια Εκπαίδευση»*, 71–79. Εταιρεία Σπουδών Νεοελληνικού Πολιτισμού και Γενικής Παιδείας, Αθήνα.

[2] Θωμαΐδης, Γ. Μπαρούτης, Δ. & Σαράφης, Γ. (2015). Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών: Επιλογή των θεμάτων, επιδόσεις των μαθητών και επιπτώσεις στη διδασκαλία. *Πρακτικά 32ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 368–379. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Καστοριά.

[3] Ζαχαριάδης, Θ. & Μαστορίδης, Ε. (2001). Η διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην Ελλάδα. *Πρακτικά 4ου Παγκύπριου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 163–174. Κυπριακή Μαθηματική Εταιρεία, Λάρνακα.

[4] Παπαδογιαννάκης, Α. (2005). *Η Ανάλυση στο Λύκειο και μερικές προτάσεις για την ενοποίηση και απλοποίηση των αποδείξεων βασικών θεωρημάτων της*. Μεταπτυχιακή Εργασία. Πανεπιστήμιο Κρήτης, Τμήμα Μαθηματικών, Ηράκλειο.

[5] Artique, M. (1996). TeachingandLearningElementaryAnalysis. In C. Alsina *et al* [eds.] *8th International Congress on Mathematical Education. Selected Papers*, 15–29. S.A.E.M. 'THALES', Sevilla.

[6] Törner, G., Potari, D. & Zachariades, Th. (2014). Calculus in European classrooms: Curriculum and teaching in different educational and cultural contexts. *ZDM – The International Journal of Mathematics Education* 46, 549–560.

[7] Bressoud, D. *et al* (2016). *Teaching and Learning of Calculus*. 13th International Congress on Mathematical Education Topical Surveys. DOI 10.1007/978-3-319-32975-8_1

[8] Πάσσος, Δ. &Γαζέπη, Α. (2015). Η επίδοση των μαθητών Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης του 2ου ΓΕ.Λ. Κιλκίς στο θέμα της θεωρίας των Μαθηματικών. *Πρακτικά 32ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 904–915. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Καστοριά.

[9] Απλακίδης, Γ. (2016). Το 1ο και 2ο θέμα στις Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών. Η «επιτυχής» αντιμετώπιση θεμάτων με σαφή αναφορά στο σχολικό βιβλίο. *Πρακτικά 33ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας* (στον παρόντα τόμο). Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Χανιά.

[10] Θωμαΐδης, Γ. & Τσιρώνης, Δ. (2009). Η Άλγεβρα ως υπόβαθρο της Ανάλυσης. Τι αποκαλύπτουν τα γραπτά των μαθητών στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 651–660. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Θεσσαλονίκη.

[11] Καρκάνης, Β., Μπερσίμης, Φ. & Κόσυβας, Γ. (2015). Οι πρότερες αλγεβρικές και γεωμετρικές ικανότητες των υποψηφίων φοιτητών στις πανελλαδικές εξετάσεις. *Πρακτικά 32ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ.478–492. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Καστοριά.

[12] Συγκελάκης, Α. (2016). *Η σημασία των αποδείξεων θεωρίας του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου στην επίλυση ασκήσεων, η επίδρασή τους στα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων και η επιρροή των παλαιότερων σχολικών βιβλίων*. Εισήγηση που παρουσιάστηκε στην 8η Μαθηματική Εβδομάδα του Παραρτήματος Ε.Μ.Ε. Κεντρικής Μακεδονίας (30 Μαρτίου – 3 Απριλίου 2016).

[13] Brand, L. (1984). *Μαθηματική Ανάλυση* (μετάφραση Η. Ανδρέου *etal*). Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Αθήνα.

[14] Apostol, T. (1961). *Διαφορικός και ΟλοκληρωτικόςΛογισμός*. Τόμος Ι (μετάφραση Δ. Γκιόκας). Εκδόσεις Μ. Πεχλιβανίδης, Αθήναι.

[15] Στάϊκος, Β. (1979). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β. Αθήνα.

[16] Βαρουχάκης, Ν. *etal* (1985). *Μαθηματικά Ι Γ΄ Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

[17] Κατσαργύρης, Β. *etal* (1998). *Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

[18] Θωμαΐδης, Γ. (2009). *Μαθηματικά & Εξετάσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη.

[19] Καζαντζής, Θ. (1996). Θεμελιώδεις προτάσεις του διαφορικού λογισμού που προκύπτουν σαν απλά πορίσματα του θεωρήματος Fermat. *Μαθηματική Παιδεία* 1, 39–42.