# Η εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών ως βασικό προαπαιτούμενο στη διδασκαλία και μάθηση της Ανάλυσης

**Γιάννης Θωμαΐδης**
**Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών**

**Εισήγηση στην 8η Ημερίδα Μαθηματικών των Εκπαιδευτηρίων Καλαμαρί**
**Σάββατο 10 Μαρτίου 2018**

## Περίληψη

Οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούν ένα διαχρονικό αντικείμενο διδασκαλίας και μάθησης στη μαθηματική εκπαίδευση, το οποίο εξελίσσεται διαδοχικά στο Δημοτικό, το Γυμνάσιο και το Λύκειο σύμφωνα με μια σπειροειδή επέκταση των βασικών υποσυνόλων που συγκροτούν το σύνολο των πραγματικών (φυσικοί, ακέραιοι, ρητοί και άρρητοι αριθμοί).

Υπάρχουν όμως ισχυρές ενδείξεις (από τη διόρθωση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων στα βαθμολογικά κέντρα μέχρι τα αποτελέσματα εμπειρικών ερευνών), ότι η διδασκαλία των στοιχείων Ανάλυσης που γίνεται στην Γ΄ Λυκείου απευθύνεται σε μαθητές, η μεγάλη πλειοψηφία των οποίων έχει ελλιπέστατη γνώση του συνόλου των πραγματικών αριθμών και ιδιαίτερα στα ζητήματα εκείνα που υπερβαίνουν εννοιολογικά το επίπεδο των αριθμητικών πράξεων (όπως είναι π.χ. η διάκριση των δεκαδικών αναπαραστάσεων ρητών και άρρητων αριθμών, οι έννοιες της πυκνότητας και της διαδοχικότητας ή του αριθμήσιμου και του συνεχούς που διαφοροποιούν μεταξύ τους τα βασικά υποσύνολα του R).

Στην εισήγηση θα παρουσιάσουμε σχετικά ευρήματα από την ελληνική και διεθνή βιβλιογραφία και θα σκιαγραφήσουμε ορισμένες διδακτικές παρεμβάσεις που μπορούν να υλοποιηθούν σε ολόκληρο το φάσμα της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης, ώστε να αποκτήσουν οι μαθητές βαθμιαία τη γνώση εκείνη του συνόλου των πραγματικών αριθμών που είναι απολύτως αναγκαία για τη διδασκαλία και μάθηση των βασικών εννοιών της Ανάλυσης.

## 1. Οι πραγματικοί αριθμοί στα σχολικά Μαθηματικά

Η πρώτη ουσιαστική επαφή των μαθητών με την έννοια του πραγματικού αριθμού επιχειρείται στη Β΄ Γυμνασίου, στο 2ο κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικών που επιγράφεται «Πραγματικοί Αριθμοί» και διαπραγματεύεται τις έννοιες της τετραγωνικής ρίζας και του άρρητου αριθμού. Όπως χαρακτηριστικά τονίζεται στις «Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο» ([1], σ.28):

> Το περιεχόμενο του κεφαλαίου είναι νέο για τους μαθητές και υπάρχουν πολλές πτυχές που είναι πηγή δυσκολιών (δεκαδική αναπαράσταση αρρήτων, έννοια πραγματικών αριθμών, κ.ο.κ.).

Η κατάσταση γίνεται βέβαια λίγο πιο περίπλοκη αν λάβουμε υπόψη ότι ορισμένα βασικά ζητήματα που αφορούν τη δεκαδική αναπαράσταση των ρητών αριθμών προβλέπεται να διδαχθούν στο τέλος της Α΄ ή στην αρχή της Β΄ Γυμνασίου. Αυτά όμως είτε δεν διδάσκονται καθόλου είτε διδάσκονται πολύ συνοπτικά, με αποτέλεσμα οι γνώσεις που αποκτούν τελικά οι μαθητές να είναι ελλιπείς και μετέωρες. Για τη σχετική ενότητα στο 7$^{ο}$ κεφάλαιο του βιβλίου Μαθηματικών της Α΄ Γυμνασίου (§7.7) οι «Οδηγίες» αναφέρουν τα εξής ([1], σ.12):

> Σε συνδυασμό με την μετατροπή κλάσματος σε δεκαδικό ή περιοδικό δεκαδικό (που εντοπίζεται στην §3.1) η αντίστροφη διαδικασία είναι σημαντική για τη συγκρότηση της έννοιας του ρητού αριθμού.

Πρέπει βέβαια να τονίσουμε ότι ορισμένες σημαντικές ευκαιρίες για την εξοικείωση των μαθητών με την έννοια του άρρητου αριθμού όχι μόνο δεν αξιοποιούνται στα σχολικά βιβλία, αλλά γίνονται φορείς για τη δημιουργία παρανοήσεων. Έτσι στην §3.3 του βιβλίου Μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου, η πρώτη εμφάνιση του αριθμού π συνοδεύεται από το ακόλουθο σχόλιο(σ.187):

> Αποδεικνύεται ότι ο αριθμός π είναι ένας άρρητος αριθμός, δηλαδή δεκαδικός με άπειρα ψηφία, **τα οποία δεν προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία** (η έμφαση δική μου).

Αυτή η ατυχής διατύπωση (αντί να γίνει άμεση αναφορά στη μη περιοδικότητα του δεκαδικού αναπτύγματος) οδηγεί σε εσφαλμένα συμπεράσματα, αν λάβουμε υπόψη ότι υπάρχουν άρρητοι αριθμοί των οποίων τα δεκαδικά ψηφία **προκύπτουν με συγκεκριμένη διαδικασία.** Ένας τέτοιος είναι π.χ. ο απειροψήφιος 6,1010010001… που ορθώς αναφέρεται ως παράδειγμα άρρητου αριθμού στο βιβλίο Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου (σ.12). Μπορούμε βέβαια να κατασκευάσουμε πολλούς τέτοιους άρρητους αριθμούς, όπως για παράδειγμα τους επόμενους:

0,123456789101112131415 …

0,411182532394653606774 …

Υπάρχουν πολλές και ισχυρές ενδείξεις ότι οι μαθητές του Γυμνασίου συνεχίζουν τις σπουδές τους στο Λύκειο έχοντας πολύ συγκεχυμένες ιδέες για τις έννοιες του ρητού ή του άρρητου αριθμού καθώς και τις λεπτές έννοιες της διαδοχικότητας, της πυκνότητας, του αριθμήσιμου κ.λπ. που συγκροτούν βαθμιαία το θεωρητικό υπόβαθρο των πραγματικών αριθμών και διαφοροποιούν το σύνολο R από τα διάφορα υποσύνολά του. Αυτές οι ενδείξεις δεν εδράζονται μόνο σε πολυετή και καθημερινή διδακτική εμπειρία, αλλά και σε ερευνητικά δεδομένα που θα παρουσιάσουμε στην επόμενη ενότητα.

Η επίγνωση αυτής της κατάστασης οδήγησε προφανώς τους συντάκτες του προγράμματος σπουδών της Α΄ Λυκείου να συμπεριλάβουν στη διδακτέα ύλη ένα κεφάλαιο με τίτλο «Οι Πραγματικοί Αριθμοί». Παρουσιάζει ενδιαφέρον η περιγραφή των στόχων που καλείται να υλοποιήσει η διδασκαλία του συγκεκριμένου κεφαλαίου στην Α΄ Λυκείου και αξίζει να παραθέσουμε αυτούσια τα σχετικά αποσπάσματα από το πρόγραμμα σπουδών ([2], σ.16674–77):

**Πραγματικοί αριθμοί.** Οι μαθητές στις προηγούμενες τάξεις έχουν αναπτύξει την έννοια του πραγματικού αριθμού σταδιακά, μέσα από την εισαγωγή των φυσικών, των ακεραίων, των ρητών και των άρρητων αριθμών. Στο κεφάλαιο αυτό επαναλαμβάνουν και εμβαθύνουν στις ιδιότητες του συνόλου των πραγματικών αριθμών με στόχο να βελτιώσουν την κατανόηση της δομής του.

| **Πραγματικοί αριθμοί (Πρ) (14 ώρες)** | | |
|---|---|---|
| **Πρ 1.** Διακρίνουν τους ρητούς από τους άρρητους αριθμούς μέσα από τις διάφορες αναπαραστάσεις τους και ταξινομούν με ευχέρεια συγκεκριμένους αριθμούς στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών (N, Z, Q, R–Q) που ανήκουν. | Οι πράξεις και οι ιδιότητες των πραγματικών αριθμών (5 ώρες) | Γιατί ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος; |
| **Πρ 2.** Διερευνούν τις ιδιότητες των πράξεων των πραγματικών αριθμών. Αναγνωρίζουν τη σημασία της ισοδυναμίας, της συνεπαγωγής και των συνδέσμων «ή», «και» στις ιδιότητες. Αιτιολογούν με αντιπαραδείγματα γιατί δεν ισχύει η ισοδυναμία σε ορισμένες ιδιότητες. | | Συζητούν το νόημα της συνεπαγωγής ($\alpha = \beta \Rightarrow \alpha^2 = \beta^2$) και διερευνούν την ισχύ του αντιστρόφου [π.χ. $\alpha^2 = \beta^2 \Rightarrow (\alpha = \beta$ ή $\alpha = -\beta)$, ή αντιπαράδειγμα για $\alpha = 2$, $\beta = -2$] |
| **Πρ 3.** Αναγνωρίζουν και εφαρμόζουν τις ιδιότητες αναλογιών στην επίλυση προβλημάτων. | | Προβληματίζονται σχετικά με τους τρόπους με τους οποίους αποδεικνύεται ότι ένας ισχυρισμός δεν ισχύει. |
| **Πρ 4.** Εφαρμόζουν διάφορες αποδεικτικές μεθόδους (ευθεία απόδειξη, απαγωγή σε άτοπο, αντιπαράδειγμα κ.λ.π.) για να δείξουν την ισχύ απλών αλγεβρικών προτάσεων. | | |
| **Πρ 5.** Διερευνούν την έννοια της πυκνότητας και της διαδοχικότητας στα βασικά υποσύνολα των πραγματικών αριθμών. Αναπαριστούν στον άξονα των πραγματικών αριθμών σύνολα που προσδιορίζονται από ανισοτικές σχέσεις και τα συμβολίζουν χρησιμοποιώντας διαστήματα. | | Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.9 |

| | | |
|---|---|---|
| **Πρ 6.** Διερευνούν και προσδιορίζουν ομοιότητες και διαφορές των ιδιοτήτων της ισότητας και της ανισότητας. | Διάταξη των πραγματικών αριθμών (4 ώρες) | Αποδεικνύουν με κατάλληλο αντιπαράδειγμα, ότι η διαίρεση κατά μέλη ανισοτήτων (με θετικούς όρους) δεν ισχύει. Διαπιστώνουν τη σημασία του αντιπαραδείγματος στην απόρριψη μαθηματικών ισχυρισμών. |
| **Πρ 7.** Χρησιμοποιούν την έννοια της διάταξης των πραγματικών αριθμών και των ιδιοτήτων της για να επιλύσουν προβλήματα αναπτύσσοντας κατάλληλες στρατηγικές. | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Πρ 8.** Ορίζουν αλγεβρικά την απόλυτη τιμή συνδέοντάς τη με τη γεωμετρική της ερμηνεία. | Απόλυτη τιμή πραγματικού αριθμού (3 ώρες) | Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.10 |
| **Πρ 9.** Διερευνούν και αποδεικνύουν τις βασικές ιδιότητες της απόλυτης τιμής, τις ερμηνεύουν γεωμετρικά και τις χρησιμοποιούν στην επίλυση προβλημάτων. | | |

| | | |
|---|---|---|
| **Πρ 10.** Ορίζουν τη ν–οστή ρίζα μη αρνητικού αριθμού και μέσω αυτής τη δύναμη θετικού αριθμού με ρητό εκθέτη. | Ρίζες πραγματικών αριθμών (2 ώρες) | Παράδειγμα δραστηριότητας είναι η Δ.11 |
| **Πρ 11.** Αποδεικνύουν και χρησιμοποιούν τις βασικές ιδιότητες των ριζών και δυνάμεων. | | |

Η σημασία των στόχων Πρ.1 και Πρ.5 που αναφέρονται ειδικά στη διάκριση των βασικών υποσυνόλων του R είναι εύλογη, αν λάβουμε υπόψη ότι στις δύο πρώτες τάξεις του Λυκείου θα οριστούν έννοιες όπως «Δύναμη με ρητό και άρρητο εκθέτη» και «Εκθετική συνάρτηση», και θα δημιουργηθεί γενικά η υποδομή για τα στοιχεία της (πραγματικής) Ανάλυσης που διδάσκονται στην Γ΄ Λυκείου.

Οι διδάσκοντες Άλγεβρα στην Α΄ Λυκείου τις τελευταίες δεκαετίες[1] γνωρίζουν βέβαια πολύ καλά ότι η διδασκαλία του μαθήματος είναι ανέφικτη αν οι μαθητές δεν διαθέτουν ορισμένες στοιχειώδεις ικανότητες στον αλγεβρικό λογισμό. Τα διαγνωστικά τεστ που γίνονται στην αρχή αυτής της τάξης, αλλά και έρευνες που έχουν δημοσιευτεί (βλ. π.χ. τα [4] και [5]) δείχνουν ότι η μεγάλη πλειοψηφία των

[1] Το εν χρήσει σχολικό βιβλίο συμπληρώνει φέτος 29 έτη κυκλοφορίας και γίνεται ένα από τα μακροβιότερα στην Ελληνική μαθηματική εκπαίδευση. Μια αναδρομή στην εξέλιξη αυτού του βιβλίου υπάρχει στο [3].

μαθητών που αρχίζουν το Λύκειο αγνοεί σε πολύ μεγάλο βαθμό τα βασικά στοιχεία του αλγεβρικού λογισμού που διδάσκονται στο Γυμνάσιο (ιδιότητες δυνάμεων, ταυτότητες, παραγοντοποίηση, απλοποίηση ρητών παραστάσεων). Έτσι λοιπόν οι διδάσκοντες της Α΄ Λυκείου δίνουν απόλυτη προτεραιότητα στην κάλυψη αυτών των κενών, ώστε να δημιουργηθεί έγκαιρα η αναγκαία υποδομή που θα διασφαλίσει την ομαλή συνέχεια της διδασκαλίας (η οποία περιλαμβάνει βέβαια επιπλέον αλγεβρικό λογισμό για τις ανισότητες, τις απόλυτες τιμές και τις ρίζες). Σε αυτό το πλαίσιο, οι στόχοι του προγράμματος σπουδών που αναφέρονται στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών και εκτέθηκαν παραπάνω, μένουν αναγκαστικά στο περιθώριο.

## 2. Μερικά δεδομένα για τη μάθηση των πραγματικών αριθμών

Υπάρχουν επαρκείς ενδείξεις ότι το πρόβλημα που δημιουργείται από την αδυναμία να διδαχθούν στο Λύκειο οι βασικές γνώσεις για τη δομή του συνόλου των πραγματικών αριθμών και των βασικών υποσυνόλων του, έχει μακροχρόνιες συνέπειες τις οποίες αδυνατούν να αντιμετωπίσουν ακόμη και οι εξειδικευμένες μαθηματικές σπουδές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση. Θα αναφέρουμε δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα που επιβεβαιώνουν αυτό τον ισχυρισμό. Το ένα προέρχεται από το διαγωνισμό του ΑΣΕΠ για την πρόσληψη εκπαιδευτικών και το άλλο από μια έρευνα που πραγματοποιήθηκε στον Καναδά σε υποψήφιους εκπαιδευτικούς, κατά το τελικό στάδιο των σπουδών για τη λήψη πιστοποιητικού διδασκαλίας των Μαθηματικών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Ένα από τα θέματα που τέθηκαν στο διαγωνισμό του ΑΣΕΠ το 2007 στο αντικείμενο της Ειδικής Διδακτικής των Μαθηματικών ήταν το εξής:

> Μετά την ολοκλήρωση της ύλης των μαθηματικών της Β΄ Λυκείου θετικής κατεύθυνσης, στην ώρα των ασκήσεων παρακολουθήσατε τον επόμενο διάλογο μεταξύ δύο μαθητών, που συζητούν για τη σύγκριση μεταξύ των αριθμών 1,23999… και 1,24:
>
> Μαθητής Α: Ξέρουμε ότι, για να συγκρίνουμε δύο δεκαδικούς αριθμούς, συγκρίνουμε πρώτα τα ακέραια μέρη. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο ακέραιο μέρος. Αν αυτά είναι ίσα, συνεχίζουμε συγκρίνοντας τα ψηφία μετά την υποδιαστολή. Μεγαλύτερος είναι αυτός που έχει μεγαλύτερο το πρώτο διαφορετικό δεκαδικό ψηφίο. Επομένως ο 1,24 είναι μεγαλύτερος από τον 1,23999…
>
> Μαθητής Β: Μπορείς να μου πεις έναν αριθμό που βρίσκεται ανάμεσα σε αυτούς;
>
> Μαθητής Α: (μετά από σκέψη). Ο αριθμός 1,23999…1
>
> Μαθητής Β: Πόσα 9 υπάρχουν πριν το 1;
>
> Μαθητής Α: (Σκέφτεται και δεν απαντά)
>
> Μαθητής Β: Μήπως ο 1,24 είναι ο αμέσως επόμενος του 1,23999....;

Μαθητής Α: (μετά από σκέψη). Μάλλον.

Οι δύο μαθητές σας κοιτάζουν με απορία, ζητώντας βοήθεια.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ ΣΤΟΥΣ ΥΠΟΨΗΦΙΟΥΣ ΕΚΠΑΙΔΕΥΤΙΚΟΥΣ:

Α) Ποια γνωστικά προβλήματα κρίνετε ότι έχουν οι μαθητές αυτοί, με βάση την παραπάνω συζήτηση;

Β) Πως θα τους βοηθούσατε να τα ξεπεράσουν;

Στο θέμα αυτό οι υποψήφιοι εκπαιδευτικοί καλούνται να διαχειριστούν ένα ζήτημα που συνδέεται με την εννοιολογική κατανόηση της δεκαδικής αναπαράστασης των ρητών αριθμών (ρητοί με διπλή δεκαδικοί αναπαράσταση). Η διαπραγμάτευση θα μπορούσε να γίνει είτε με τη μετατροπή του δεκαδικού αναπτύγματος 1,23999… στον αντίστοιχο ρητό αριθμό (που ανήκει στη διδακτέα ύλη του Γυμνασίου) είτε με τον υπολογισμό του αθροίσματος των απείρων όρων της αντίστοιχης γεωμετρικής προόδου (που ανήκει στη διδακτέα ύλη του Λυκείου).

Όπως έδειξαν όμως τα αποτελέσματα, οι περισσότεροι υποψήφιοι συνάντησαν σημαντικές δυσκολίες. Ο μέσος όρος επίδοσης των επιτυχόντων του διαγωνισμού στην Ειδική Διδακτική ήταν 51,2/100, ενώ των αποτυχόντων 27,18/100.[2] Το πλέον εντυπωσιακό όμως είναι ότι, σύμφωνα με τις μαρτυρίες των βαθμολογητών, πολλοί υποψήφιοι (δηλαδή πτυχιούχοι μαθηματικοί) φάνηκε ότι είχαν τις ίδιες παρανοήσεις με αυτές που εκδηλώνει ο μαθητής Α στο διδακτικό σενάριο!

Αυτά τα αποτελέσματα δεν εκπλήσσουν ιδιαίτερα, αν λάβουμε υπόψη τα δεδομένα δημοσιευμένων εμπειρικών ερευνών οι οποίες μελέτησαν τις αντιλήψεις που έχουν πολλοί φοιτητές και καθηγητές των Μαθηματικών για τη δεκαδική αναπαράσταση των πραγματικών αριθμών (βλ. π.χ. τα [6] και [7]).

Ακόμη πιο εντυπωσιακά είναι τα ευρήματα της έρευνας που πραγματοποιήθηκε στον Καναδά. Σε 46 υποψήφιους καθηγητές Μαθηματικών δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο που περιείχε τις εξής ερωτήσεις ([8], σσ.57-58):

**Θέμα 1ο**

**(α)** Ποιο σύνολο θεωρείτε ότι είναι «πλουσιότερο», των ρητών ή των άρρητων (δηλ. σε ποιο έχουμε περισσότερους αριθμούς);

[2] Το άλλο θέμα της Ειδικής Διδακτικής αφορούσε το σχεδιασμό μιας δίωρης διδασκαλίας σε μαθητές της Γ΄ Λυκείου για τον υπολογισμό του εμβαδού ενός επιπέδου χωρίου που περικλείεται από τις γραφικές παραστάσεις δύο συναρτήσεων. Αυτό ήταν ένα αναμενόμενο θέμα και η διαπραγμάτευσή του από τους περισσότερους υποψήφιους υπήρξε ικανοποιητική (σύμφωνα με μαρτυρίες των βαθμολογητών).

**(β)** Υποθέστε ότι επιλέγετε στην τύχη ένα αριθμό από το διάστημα [0, 1] (της ευθείας των πραγματικών αριθμών). Ποια είναι η πιθανότητα να πάρετε ένα ρητό αριθμό;

**Θέμα 2ο**

**(α)** Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε ένα ρητό αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγείστε τη σκέψη σας.

**(β)** Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγείστε τη σκέψη σας.

**(γ)** Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε έναν άρρητο αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγείστε τη σκέψη σας.

**(δ)** Είναι πάντοτε δυνατό να βρούμε έναν ρητό αριθμό ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς αριθμούς. Προσδιορίστε Σωστό ή Λάθος και εξηγείστε τη σκέψη σας.

**Θέμα 3ο**

**(α)** Όταν προσθέτουμε δύο θετικούς άρρητους αριθμούς το αποτέλεσμα είναι πάντοτε άρρητος. Σωστό ή λάθος; Εξηγείστε τη σκέψη σας.

**(β)** Όταν πολλαπλασιάζουμε δύο διαφορετικούς άρρητους αριθμούς το αποτέλεσμα είναι πάντοτε άρρητος. Σωστό ή λάθος; Εξηγείστε τη σκέψη σας.

Τα αποτελέσματα της έρευνας έδειξαν ότι, σε γενικές γραμμές, λιγότεροι από τους μισούς υποψήφιους εκπαιδευτικούς ήταν σε θέση να δώσουν ορθές απαντήσεις στα προηγούμενα ερωτήματα. Για να μη μακρηγορήσουμε ιδιαίτερα αλλά και επειδή συνδέεται άμεσα με το θέμα που εξετάζουμε, θα μεταφέρουμε ένα μικρό απόσπασμα από αυτά που γράφουν οι δύο ερευνήτριες ([8], σ.72):

> Με βάση το γραπτό ερωτηματολόγιο και τις συνεντεύξεις, διαπιστώσαμε μόνο έξι περιπτώσεις όπου οι συμμετέχοντες έδειξαν να αντιλαμβάνονται τους άρρητους αριθμούς ως αντικείμενα. Ερμηνεύουμε την εκπληκτικά φτωχή επίδοση στο 3ο θέμα ως ένδειξη ότι η έννοια του άρρητου αριθμού, όπως για παράδειγμα ο $5+\sqrt{2}$, προσλαμβάνεται συνήθως λειτουργικά (ως μια διαδικασία) και όχι δομικά (ως ένα αντικείμενο) … Είναι ενδιαφέρον ότι κανείς δεν έδωσε ως αντιπαράδειγμα ένα γινόμενο συζυγών με το οποίο αποδεικνύεται εύκολα ότι το γινόμενο δύο διαφορετικών άρρητων μπορεί πράγματι να είναι ρητός. Παρά το γεγονός ότι όλοι

οι συμμετέχοντες γνώριζαν την εκτέλεση αλγορίθμων όπως «ρητοποίηση του παρονομαστή», 30 από τους 46 υποψήφιους εκπαιδευτικούς είτε απάντησαν λανθασμένα είτε δεν απάντησαν καθόλου όταν ρωτήθηκαν αν το γινόμενο δύο άρρητων αριθμών θα μπορούσε να είναι ποτέ ρητός (θέμα 3β). Και από εκείνους που απάντησαν κανείς δεν χρησιμοποίησε αυτή την οικεία διαδικασία. Το γεγονός αυτό αποκαλύπτει ότι η αλγοριθμική γνώση μπορεί να γίνει εξαιρετικά διαδικαστική και μηχανιστική για το μαθητή, σε βαθμό που ο ίδιος ο σκοπός της χρήσης τέτοιων διαδικασιών να χάνεται τελείως. [3]

Όλα τα προηγούμενα καθιστούν αυτονόητη τη διαπίστωση ότι η διδασκαλία των στοιχείων (πραγματικής) Ανάλυσης που γίνεται στην Γ΄ Λυκείου απευθύνεται σε μαθητές οι οποίοι έχουν σχεδόν πλήρη άγνοια των κρίσιμων διαφορών ανάμεσα στα διάφορα υποσύνολα του συνόλου των πραγματικών αριθμών. Δεδομένου μάλιστα ότι οι μαθητές ασχολούνται αποκλειστικά με συναρτήσεις που έχουν πεδίο ορισμού διάστημα ή ένωση διαστημάτων, τίθενται επιτακτικά ορισμένα βασικά ερωτήματα:

Πόσοι μαθητές κατανοούν το θεμελιώδες γεγονός ότι στο ίδιο διάστημα της πραγματικής ευθείας υπάρχουν δύο άπειρα σύνολα αριθμών διαφορετικού είδους;

Πόσοι μαθητές κατανοούν ότι τα συμπεράσματα βασικών θεωρημάτων της Ανάλυσης που χρησιμοποιούν στην επίλυση ασκήσεων (όπως π.χ. το θεώρημα Bolzano), δεν ισχύουν αν το θεώρημα εφαρμοστεί στο άπειρο και πυκνό σύνολο των ρητών αριθμών ενός διαστήματος;

Πόσοι μαθητές κατανοούν ότι η παράγωγος μιας συνάρτησης μπορεί να μηδενίζεται σε άπειρα, αριθμήσιμου πλήθους σημεία ενός διαστήματος χωρίς η συνάρτηση να είναι σταθερή;

Αυτά και πολλά άλλα ζητήματα που θα μπορούσαμε να αναφέρουμε, καθιστούν επιτακτική την ανάγκη επινόησης διδακτικών παρεμβάσεων και δραστηριοτήτων που μπορούν να συμβάλουν σε μια βαθύτερη, εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Αρχικά όμως πρέπει να συζητήσουμε και να απαντήσουμε το επόμενο ερώτημα.

[3] Αντίστοιχα ερευνητικά αποτελέσματα σχετικά με την εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών έχουν καταγραφεί και σε άλλες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα και το εξωτερικό (βλ. π.χ. στα [9], [10] και [11]).

## 3. Είναι δυνατή η εννοιολογική κατανόηση των πραγματικών αριθμών στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση;

Το διδακτικό πρόβλημα που περιγράφει ο τίτλος αυτής της ενότητας είναι δυσεπίλυτο, επειδή συνδέεται στενά με το θεμελιώδη χαρακτήρα και τη μεγάλη διάδοση των σχετικών παρανοήσεων αλλά και με τη χαμηλή (όπως δείξαμε στην πρώτη ενότητα) κατάταξη του συγκεκριμένου ζητήματος στις προτεραιότητες των διδασκόντων.

Εξετάζοντας τη θέση των πραγματικών αριθμών στα σχολικά Μαθηματικά, διαπιστώσαμε ότι ένα σημαντικό μέρος της προσπάθειας για την κατανόησή τους προβλέπεται να γίνει στο Γυμνάσιο. Όλα τα εμπειρικά δεδομένα όμως, αλλά και τα επιστημολογικά χαρακτηριστικά των αντίστοιχων εννοιών δεν επιτρέπουν αισιοδοξία ότι η κατανόηση αυτή είναι εφικτή στη συγκεκριμένη εκπαιδευτική βαθμίδα. Εξίσου ανέφικτη όμως φαίνεται να είναι η επιδίωξη αυτού του στόχου στην Α΄ Λυκείου, αν λάβουμε υπόψη τις διδακτικές πρακτικές που υιοθετούν οι διδάσκοντες για το σχετικό κεφάλαιο του σχολικού βιβλίου.

Μοναδική διέξοδος, για μια καταφατική απάντηση στο ερώτημα του τίτλου, είναι κατά την άποψή μας η σύνδεση της διδασκαλίας των πραγματικών αριθμών με τη διδασκαλία της Ανάλυσης. Αυτή η σύνδεση θα είναι μάλιστα πιο αποτελεσματική αν συμπεριληφθεί σε ένα σώμα βασικών προαπαιτούμενων γνώσεων που θα διδάσκεται στα τμήματα Θετικού Προσανατολισμού της Β΄ Λυκείου.

Ο βαθειά εννοιολογικός χαρακτήρας των γνώσεων που συνδέονται με τους πραγματικούς αριθμούς επιβάλει μια διδακτική προσέγγιση διαφορετική από το καθιερωμένο δίπολο «θεωρία – ασκήσεις» που χαρακτηρίζει την παραδοσιακή διδασκαλία των Μαθηματικών. Στην κατεύθυνση αυτή μπορούν να παίξουν καθοριστικό ρόλο οι διδακτικές δραστηριότητες που αναδεικνύουν τις διαδεδομένες παρανοήσεις των μαθητών (και όχι μόνο …), μέσα από τη μελέτη και συζήτηση προβλημάτων όπως αυτό που τέθηκε στο διαγωνισμό του ΑΣΕΠ ή των θεμάτων του ερωτηματολογίου της έρευνας των Sirotic & Zazkis.

Η πρότασή μας θέτει ως μοναδικό προαπαιτούμενο τις διαδικαστικές γνώσεις που αποκτούν οι μαθητές στο Δημοτικό και το Γυμνάσιο, δηλαδή κάποια σχετική ευχέρεια στην εκτέλεση αριθμητικών πράξεων με φυσικούς αριθμούς, κλάσματα και δεκαδικές αναπαραστάσεις. Πάνω σε αυτές τις γνώσεις και τις αναπόφευκτες παρανοήσεις στις οποίες οδηγούν, θα επιχειρήσει η διδασκαλία να οικοδομήσει τις λεπτές έννοιες της διαδοχικότητας, της πυκνότητας, της ασυμμετρίας και της

πληρότητας. Η θεμελιώδης διαφορά από την παραδοσιακή διδασκαλία είναι ότι η εισαγωγή αυτών των εννοιών δεν θα γίνει μέσα από μια θεωρητική διαπραγμάτευση ορισμών και αποδείξεων, αλλά θα προκύψει ως αποτέλεσμα ενασχόλησης των μαθητών με δραστηριότητες για τη μορφή και τη λειτουργία των δεκαδικών αναπαραστάσεων στα βασικά υποσύνολα του R. Σε αυτές τις δραστηριότητες[4] οι μαθητές θα εργαστούν με φύλλα εργασίας και θα κληθούν να εφαρμόσουν τους γνωστούς κανόνες των πράξεων, για να απαντήσουν σε ερωτήσεις που αναδεικνύουν τον πλούτο των εννοιολογικών διαφοροποιήσεων ανάμεσα στα στοιχεία του συνόλου των πραγματικών αριθμών.

## Βιβλιογραφικές παραπομπές


[1] Υπουργείο Παιδείας: *Οδηγίες για τη διδασκαλία των Μαθηματικών στο Γυμνάσιο για το σχολικό έτος 2017 – 2018* (Υ.Α. 164264/Δ2/03–10–2017)

[2] Υπουργείο Παιδείας: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. (Υ.Α. 59614/Γ2, ΦΕΚ Β΄ 1168, 8 Ιουνίου 2011).

[3] Θωμαΐδης, Γ. Λογική και Διδακτική στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. *Ευκλείδης γ΄* τεύχος 73, σσ.102–121 (2010).

[4] Μάκρας, Σ. & Σαλίχος, Μ. Αξιολόγηση των γνώσεων των μαθητών στα Μαθηματικά κατά την είσοδο τους στο Λύκειο. *Ευκλείδης Γ΄*, τεύχος 30–31, σσ.42–60 (1991).

[5] Κουφός, Ε. & Ευαγγελόπουλος, Α. Η μαθηματική υποδομή των μαθητών που εγγράφονται στην Α΄ τάξη του Γενικού Λυκείου. Μια εμπειρική έρευνα. *Πρακτικά 4ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, σσ.360–383. Θεσσαλονίκη: Παράρτημα Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας, 2012.

[6] Ζωϊτσάκος, Σ. Αντιλήψεις μελλοντικών καθηγητών των Μαθηματικών για τους ρητούς αριθμούς με διπλή δεκαδική αναπαράσταση. *Πρακτικά 27ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, 276–288. Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, 2010.

[7] Ζωϊτσάκος, Σ. & Ζαχαριάδης, Θ. Αντιλήψεις καθηγητών Μαθηματικών για τις περιοδικές δεκαδικές αναπαραστάσεις ρητών αριθμών. *Πρακτικά 4ου Συνεδρίου της Ένωσης Ερευνητών Διδακτικής Μαθηματικών*, σσ.135–141. Ιωάννινα, 2011.


[4] Σχετικά παραδείγματα θα δοθούν κατά τη διάρκεια της παρουσίασης.

[8] Sirotic, N. & Zazkis, R. Irrational numbers: The gap between formal and intuitive knowledge. *Educational Studies in Mathematics* 65(1), 49–76 (2007).

[9] Βόσκογλου, Μ. & Κόσσυβας, Γ. Η κατανόηση των άρρητων αριθμών. *Πρακτικά 26$^{ου}$ Πανελλήνιου Συνεδρίου Ε.Μ.Ε.*, σσ.305–314. Θεσσαλονίκη, 2009.

[10] Βόσκογλου, Μ. & Κόσσυβας, Γ. Ο ρόλος των αναπαραστάσεων στην κατανόηση των πραγματικών αριθμών. *Ευκλείδης γ΄* τεύχος 76, σσ.11–49 (2012).

[11] Fischbein, E., Jehiam, R. & Cohen. D. The concept of irrational numbers in High-School students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics* 29(1), 29–44 (1995).