Η ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΣΗΜΑΣΙΑ ΤΩΝ «ΑΝΟΙΧΤΩΝ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ» ΤΗΣ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑΣ

Βασίλης Καρκάνης
vkarkan@yahoo.gr

Τα Ανοιχτά Προβλήματα

Στην διεθνή βιβλιογραφία για τα ανοιχτά προβλήματα χρησιμοποιείται ο όρος ανοιχτόκλειστα, (open-ended), γιατί ο όρος ανοιχτά προβλήματα χρησιμοποιείται κυρίως για άλυτα προβλήματα, όπως η υπόθεση Riemann ή η εικασία του Goldbach (Φερεντίνος, Σ.,Γαλάνη, Ι., 2012) κ.λ.π. . Στην ελληνική βιβλιογραφία, με τον όρο «ανοιχτά προβλήματα», έχει επικρατήσει να ορίζουμε αυτά που έχουν πολλές σωστές λύσεις και πολλούς τρόπους για να φτάσει κανείς σε αυτές.

Η εισαγωγή του όρου ανοιχτά προβλήματα ξεκίνησε από την Ιαπωνία (Shimada 1977-Beckeret κ.α.,1997) και είχε σκοπό τη μεταρρύθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών με ανοιχτές προσεγγίσεις στη διδακτική πράξη. Είναι προβλήματα με ανοιχτές κατευθύνσεις και ερμηνείες, τα οποία αντίκειται στις ακριβείς και αυστηρές μαθηματικές διατυπώσεις (Κόσυβας,Γ., 2013).

Τέτοια προβλήματα έχουν χρησιμοποιηθεί σε συγκρίσεις των επιδόσεων των μαθητών, όπως είναι οι διεθνείς αξιολογήσεις TIMMS και PISA. Κατά τις τρείς τελευταίες δεκαετίες έχει συγκεντρωθεί πλήθος ερευνών για τη διδακτική αξιοποίηση των ανοιχτών προβλημάτων. Από πολλούς ερευνητές υποστηρίζεται ότι το ανοιχτό πρόβλημα πρέπει να κατέχει κεντρική θέση στη διδασκαλία των μαθηματικών (Silver, 1995; Stacey, 1995; Pehkonen, 1997).

Τα Ανοιχτά Προβλήματα στη Διδακτική Πράξη

Για το σχεδιασμό μιας δραστηριότητας επίλυσης ενός ανοιχτού προβλήματος έχουν προταθεί διάφορα μοντέλα.

Στη συνέχεια κατατίθεται ως πρότασηαυτό που έχει εφαρμοστεί από εμάς. Συγκεκριμένα με το υπάρχον θεσμικό πλαίσιο και τα αναλυτικά προγράμματα σπουδών, προτείνεται:

- η επίλυση ανοιχτού προβλήματος ως δραστηριότητα, να γίνεται δύο φορές στη διάρκεια της σχολικής χρονιάς, για κάθε ένα από τα μαθήματα Άλγεβρα και Γεωμετρία και για τις τάξεις Α’ και Β’ Λυκείου
- η εργασία να είναι ομαδοσυνεργατική και ειδικότερα από ομάδες των πέντε μαθητών, που θα ορίζει ο εκπαιδευτικός, ώστε να υπάρχει ισόρροπη κατανομή καλών και λιγότερων καλών μαθητών στην κάθε ομάδα
- ως κατάλληλος χρόνος για τις δύο δραστηριότητες προτείνεται το τέλος του $1^{ου}$ τετραμήνου και τα μέσα του $2^{ου}$ τετραμήνου, ώστε η ύλη κάθε τάξης και για το κάθε μάθημα να έχει προχωρήσει
- ως διάρκεια για την κάθε δραστηριότητα προτείνονται οι δύο ώρες. Επειδή πρακτικά (πρόγραμμα) δεν μπορεί να είναι συνεχόμενες, θα είναι δύο διαδοχικές ώρες του κάθε μαθήματος
- να γίνεται με την ολοκλήρωση της ύλης του τρέχοντος κεφαλαίου (της Άλγεβρας ή Γεωμετρίας)
- την $1^{η}$ ώρα και ειδικότερα τα πρώτα 25 λεπτά ο εκπαιδευτικός κάνει με όλους τους μαθητές της τάξης μια γρήγορη ανακεφαλαίωση στην ύλη του κεφαλαίου που βρίσκεται (της Άλγεβρας ή της Γεωμετρίας ανάλογα με το μάθημα στο οποίο θα γίνει η δραστηριότητα). Στη συνέχεια (στο υπόλοιπο του χρόνου της $1^{ης}$ ώρας) τους ενημερώνει γι’ αυτό που θα επακολουθήσει την επόμενη διδακτική ώρα. Ορίζει και καταγράφει τις ομάδες εργασίας και με σαφήνεια

πληροφορεί την τάξη για το χρόνο και τον τρόπο με τον οποίο θα συνεργαστούν οι μαθητές μεταξύ τους. Εμφανίζει τη διαδικασία ως project και την απενοχοποιεί πλήρως από διαδικασία εξέτασης με βαθμό. Επιπλέον τους ενημερώνει ότι μπορεί να έχουν δίπλα τους το βιβλίο του μαθήματος ανοιχτό

- την 2η ώρα με την είσοδο του εκπαιδευτικού στην τάξη, οι ομάδες είναι έτοιμες και απλωμένες σε διάφορα σημεία της τάξης (κάθε 5-αδα έχει ενώσει δύο θρανία και κάθετε γύρω γύρω). Ο εκπαιδευτικός μοιράζει σε κάθε μαθητή από ένα φύλλο εργασίας Α4 όπου στην κορυφή της μιας σελίδας υπάρχει η διατύπωση του προβλήματος-δραστηριότητας. Ορίζει το χρόνο εργασίας 20-25 λεπτά και επιτηρεί την εργασία των ομάδων από απόσταση παροτρύνοντας τες να ακούγεται η γνώμη όλων. Φροντίζει να υπάρχει λογικός θόρυβος και επικέντρωση του ενδιαφέροντος όλων στο πρόβλημα. Παρατηρεί από απόσταση τη δουλειά όλων και σχηματίζει μια καταρχήν εικόνα για τη δουλειά της κάθε ομάδας. Προσπαθεί να δει ποιοι έφτασαν σε λύση, ποιοι σε διαφορετική λύση και ποιοί βρίσκονται ακόμη στα πρώτα βήματα της λύσης του προβλήματος. Τρία λεπτά πριν τη λήξη του χρόνου ζητάει από την κάθε ομάδα να καταγράψει καθαρά τις ιδέες που τέθηκαν στο τραπέζι της, καθώς και τη λύση ή την πορεία της λύσης μέχρι τη στιγμή εκείνη. Δίνει τη λήξη του χρόνου εργασίας.
- από όσα έχει παρατηρήσει καλεί την ομάδα που έχει προχωρήσει αλλά δεν έχει φτάσει στη λύση να εκφράσει τις ιδέες της στην ολομέλεια. Ζητά από τους υπόλοιπους μαθητές να τις κρίνουν, με αιτιολόγηση όμως της γνώμης τους. Συνήθως στη φάση αυτή οι μαθητές που έχουν λύσει το πρόβλημα επεμβαίνουν θέλοντας να προτάξουν τη σωστή λύση. Ο εκπαιδευτικός με σωστή διαχείριση φροντίζει να ακουστούν όλες οι απόψεις. Με έλεγχο του χρόνου θα περάσει στην ομάδα που έχει καταλήξει σε ξεκάθαρη λύση και θα επιδιώξει μέσα από τη συζήτηση που θα αναπτυχθεί (όπως και στην προηγούμενη φάση) να έρθουν στην επιφάνεια και οι λύσεις των άλλων ομάδων

στα τελευταία 3-4 λεπτά της ώρας ο εκπαιδευτικός κάνει μια ανασκόπηση της όλης διαδικασίας αναδεικνύοντας το κέρδος για όλους. Στο σημείο αυτό έχουν παρατηρηθεί θετικές κρίσεις από όλους τους μαθητές, που εκφράζονται μάλιστα με ιδιαίτερη θέρμη και σχόλια (ιδίως από τους ποιο αδύναμους). Με το κουδούνι της ώρας αυτής ο εκπαιδευτικός ζητά από όσους μαθητές θέλουν να σκεφτούν τη δραστηριότητα και στο σπίτι τους και αν έχουν κάποια καινούργια ιδέα ή λύση να την φέρουν την επόμενη φορά. Αρκετές φορές έχουν προκύψει επιπλέον προσεγγίσεις στη λύση του προβλήματος.

Έναντι Επιλόγου

Τα πλεονεκτήματα των ανοικτών προβλημάτων σύμφωνα με τον Shimada (1977) είναι πέντε.

α) Οι μαθητές συμμετέχουν περισσότερο ενεργητικά στο μάθημα και εκφράζουν τις ιδέες τους πιο συχνά, γιατί η λύση ανοικτών προβλημάτων παρέχει ελεύθερο, υπεύθυνο και υποστηρικτικό περιβάλλον, όπου η ύπαρξη πολλών σωστών λύσεων δίνει στον κάθε μαθητή την ευκαιρία να φτάσει στη δική του σωστή απάντηση. Επιπλέον οι μαθητές είναι περίεργοι για τις άλλες λύσεις τις οποίες μπορούν να συγκρίνουν με τις δικές τους και αργότερα να συζητήσουν πάνω σε αυτές.

β) Οι μαθητές έχουν περισσότερες ευκαιρίες να κάνουν συνειδητή χρήση της μαθηματικής τους γνώσης και των δεξιοτήτων τους. Εφόσον υπάρχει πληθώρα λύσεων οι μαθητές μπορούν να επιλέξουν τον δικό τους δρόμο προς την απάντηση, δημιουργώντας έτσι ο καθένας τη μοναδική του λύση.

γ) Κάθε μαθητής - μαθήτρια μπορεί να ανταποκριθεί στο πρόβλημα με το δικό του αποκλειστικό τρόπο

δ) Το μάθημα μπορεί να προσφέρει στους μαθητές μια εμπειρία συλλογισμού. Η σύγκριση των διαφορετικών λύσεων και η συζήτηση πάνω σε αυτές κινητοποιεί τους μαθητές να επιχειρηματολογήσουν υπέρ των λύσεων τους, με αποτέλεσμα να αναπτύσσουν την μαθηματική τους σκέψη.

ε) Παρέχονται πολλές ευκαιρίες στους μαθητές να βιώσουν την ευχαρίστηση της ανακάλυψης και την επιδοκιμασία των συμμαθητών τους.

Δυστυχώς ο ωφέλιμος χρόνος διδασκαλίας και η ύλη κάθε τάξης λειτουργούν απαγορευτικά στο να έρθουν οι μαθητές σε επαφή και να προσεγγίσουν την λύση «ανοιχτών προβλημάτων». Επομένως στερούμε από τους μαθητές την δυνατότητα να διαχειριστούν αυτού του είδους τα προβλήματα που απαιτούν απλές και ταυτόχρονα σύνθετες διαδικασίες μαθηματικής σκέψης.

Η Διδακτική Σημασία των Ανοιχτών Προβλημάτων της Γεωμετρίας

Σύμφωνα με τη Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια,η εμφάνιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας συνδέεται στενά με τις διαισθητικές αντιλήψεις του ανθρώπου για τον κόσμο που τον περιβάλλει (ευθείες- τεντωμένες χορδές, ακτίνες φωτός κτλ). Η παρατεταμένη διαδικασία εμβάθυνσης στις έννοιες αυτές οδήγησε σε μια πιο αφηρημένη αντίληψη της Γεωμετρίας. Η ανακάλυψη από τον N. I. Lobachevskiμιας Γεωμετρίας διαφορετικής από την Ευκλείδεια απέδειξε ότι οι ιδέες μας για το χώρο δεν είναι apriori. Με άλλα λόγια δεν είναι δυνατόν να ισχυριστεί κανείς ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι η μόνη Γεωμετρία που περιγράφει τις ιδιότητες του χώρου που μας περιβάλλει. Η ανάπτυξη των φυσικών επιστημών, πρωτίστως της Φυσικής και της Αστρονομίας, απέδειξε ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρίας περιγράφει τη δομή του χώρου που μας περιβάλλει με ακρίβεια που φτάνει μόνο μέχρι ενός ορισμένου βαθμού, ενώ δεν μπορεί να περιγράψει ικανοποιητικά τις ιδιότητες του χώρου ως προς τις μετακινήσεις των σωμάτων και ως προς τις ταχύτητες που προσεγγίζουν την ταχύτητα του φωτός.Έτσι, η Ευκλείδεια Γεωμετρία μπορεί να θεωρηθεί σαν μια πρώτη προσέγγιση μιας περιγραφής της δομής του πραγματικού φυσικού κόσμου (χώρου).

Ζώντας στον τρισδιάστατο χώρο, έχουμε ανάγκη, σαν ανθρώπινα πλάσματα, να γνωρίσουμε τα στερεά που υπάρχουν σ' αυτόν (σχήμα, επιφάνεια, όγκος, διάταξη αυτών στο χώρο, ομοιότητες, διαφορές μεταξύ τους). (Κερασαρίδης Γ. 2013). Αν σκεφτούμε πως η Ευκλείδεια Γεωμετρία, πρώτη αυτή, ενσωμάτωσε στο σύστημά της την ανθρώπινη ιδιότητα- ανάγκη για απόδειξη ισχυρισμών, μπορούμε να καταλάβουμε την άποψη ότι η συμβολή τηςΕυκλείδεια Γεωμετρία στην προαγωγή της σκέψης ήταν επαναστατική. Οι αρχαίοι γεωμέτρες παρέλαβαν μια διαδικασία εμπειρική και την μετασχημάτισαν σε θεωρητική επιστήμη. Ακριβώς, αυτό το επίτευγμα, ήταν η ανεπανάληπτη προσφορά τους στην ανθρώπινη κοινωνία.

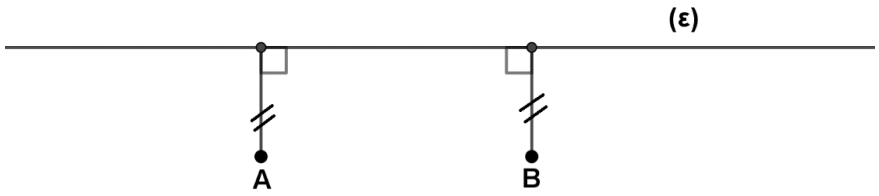
Οι έννοιες και οι γνώσεις που κατακτούν οι μαθητές από την Ευκλείδεια Γεωμετρία τους βοηθούν να αντιλαμβάνονται συνειδητά τον οικείο χώρο και να λύνουν

προβλήματα που σχετίζονται με αυτόν. Αυτές οι ικανότητες δεν μπορούν να αποκτηθούν χωρίς ειδική εξάσκηση ή μέσα από άλλα μαθήματα. Στην υποβάθμιση της Γεωμετρίας στα αναλυτικά προγράμματα οφείλονται πολλές δυσκολίες που αντιμετωπίζουν οι μαθητές σε επόμενα στάδια των σπουδών τους ή στη μελλοντική τους απασχόληση. Αναφέρεται το πεδίο της Γεωμετρίας, γιατί οι μάχιμοι εκπαιδευτικοί, κάθε χρονιά εκπλήσσονται ευχάριστα, όταν διορθώνουν τα γραπτά της Γεωμετρίας, των μαθητών της Α' και Β' Λυκείου, στις τελικές εξετάσεις. Υπάρχουν πολλές και διαφορετικές προσεγγίσεις-λύσεις από τους μαθητές τους στα περισσότερα ερωτήματα.
Κλείνοντας την εισήγηση αυτή, θα παραθέσουμε ενδεικτικά ανοιχτά προβλήματα Γεωμετρίας που έχουν προταθεί στη σχολική τάξη ως δραστηριότητες (Α' και Β' Λυκείου) με τον τρόπο που εκτέθηκε ποιο πάνω.

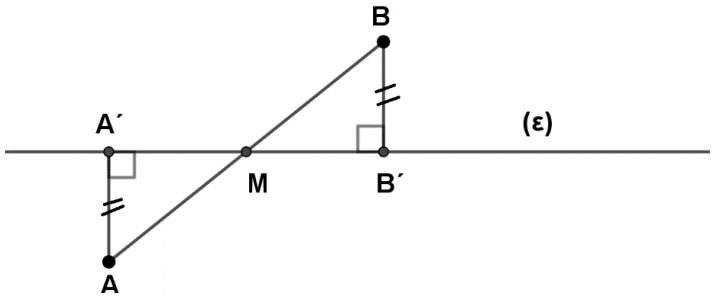
Πρόβλημα 1

Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία A και B. Να βρεθεί ευθεία του επιπέδου από την οποία ισαπέχουν τα A, B.

1η Λύση: Προφανώς από κάθε ευθεία ε του επιπέδου που είναι παράλληλη στο ευθύγραμμο τμήμα AB, τα σημεία A, B ισαπέχουν.

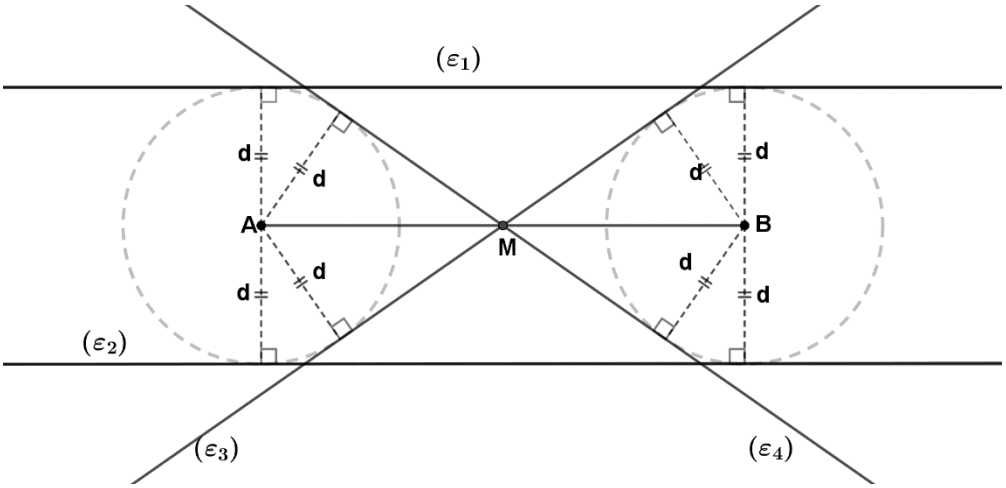


2η Λύση: Αν θεωρήσουμε οποιαδήποτε ευθεία ε του επιπέδου που να διέρχεται από το μέσο M του ευθυγράμμου τμήματος AB και φέρουμε $AA', BB' \perp \varepsilon$ τότε τα τρίγωνα MAA', MBB' είναι ίσα οπότε $AA' = BB'$. Αυτό ισχύει ακόμη και στην περίπτωση που η ευθεία ε είναι κάθετη στο AB στο μέσον του M.



Εφαρμογή: Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα με άκρα τα σημεία A και B. Να βρεθούν οι ευθείες του επιπέδου από τις οποίες τα σημεία A, B απέχουν απόσταση d.

Όπως φαίνεται στο παρακάτω σχήμα οι ευθείες είναι τέσσερις. Οι $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ και ε_4.

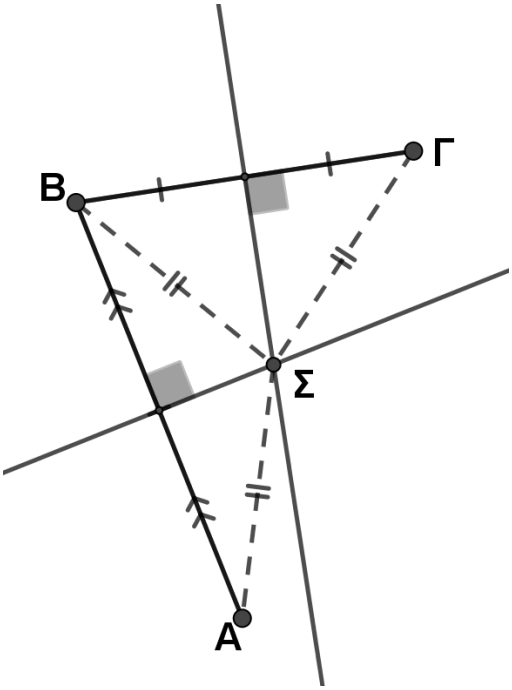


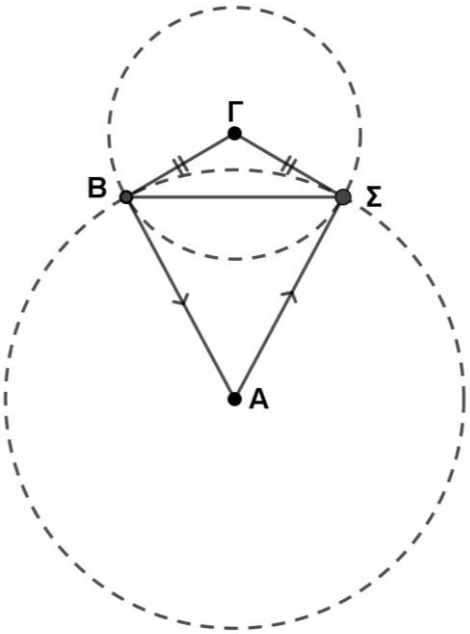
Πρόβλημα 2

Δίνονται τρία σημεία $\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma$ **μη συνευθειακά. Να βρείτε σημείο** Σ **του επιπέδου, ώστε τα τρίγωνα** $\Sigma\mathrm{AB}$ **και** $\Sigma\mathrm{B}\Gamma$ **να είναι ισοσκελή.**

1η Λύση: Αν φέρουμε τις μεσοκαθέτους των τμημάτων AB και $\mathrm{B}\Gamma$ αυτές τέμνοντα σε σημείο Σ και προφανώς είναι $\Sigma\mathrm{A} = \Sigma\mathrm{B}$ καθώς και $\Sigma\mathrm{B} = \Sigma\Gamma$ οπότε τα τρίγωνα $\Sigma\mathrm{AB}$ και $\Sigma\mathrm{B}\Gamma$ είναι ισοσκελή

2η Λύση: Αν γράψουμε τους κύκλους $(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ και $(\Gamma, \Gamma\mathrm{B})$ αυτοί είναι τεμνόμενοι και εκτός του κοινού τους σημείου B έχουν κοινό και ένα ακόμη σημείο το Σ. Αυτό είναι το ζητούμενο γιατί $\mathrm{AB} = \mathrm{A}\Sigma$ ως ακτίνες του κύκλου $(\mathrm{A}, \mathrm{AB})$ καθώς και $\Gamma\mathrm{B} = \Gamma\Sigma$ ως ακτίνες του κύκλου $(\Gamma, \Gamma\mathrm{B})$.

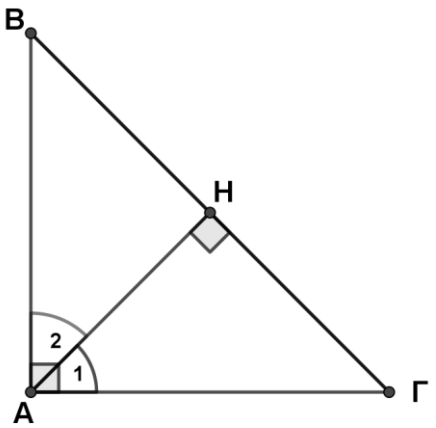




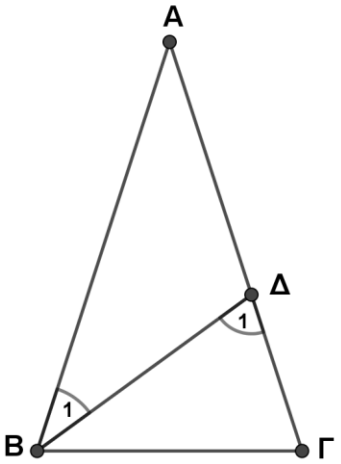
Πρόβλημα 3

Να βρεθεί το ισοσκελές τρίγωνο και ο τρόπος με τον οποίο αυτό μπορεί να διαιρεθεί σε δύο άλλα ισοσκελή τρίγωνα.

1η Λύση: Έστω το ορθογώνιο και ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με $\hat{A} = 90^0$ οπότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 45^0$. Φέρνουμε το ύψος του ΑΗ που είναι και διάμεσος άρα και διχοτόμος οπότε $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 45^0 = \hat{B} = \hat{\Gamma}$ άρα τα τρίγωνα ΑΗΒ και ΑΗΓ είναι ισοσκελή.



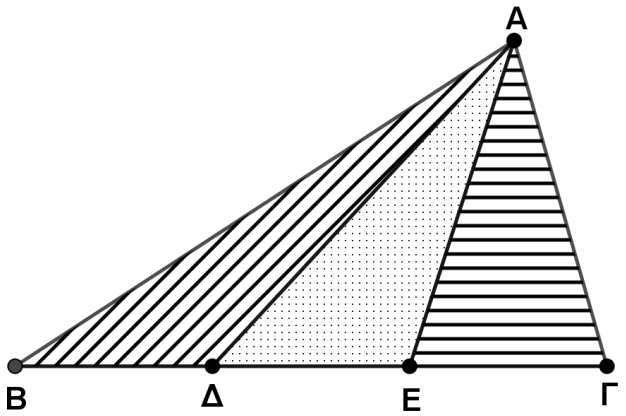
2η Λύση: Έστω το ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ με ΑΒ = ΑΓ και $\hat{A} = 36^0$ τότε $\hat{B} = \hat{\Gamma} = 72^0$. Φέρνουμε τη ΒΔ διχοτόμο της $\hat{B}$ τότε η άρα το τρίγωνο ΑΒΔ είναι ισοσκελές. Επίσης η $\hat{\Delta}_1 = 72^0$ (εξωτερική στο τρίγωνο ΑΒΔ) άρα $\hat{\Delta}_1 = 72^0 = \hat{\Gamma}$ οπότε το τρίγωνο ΒΔΓ είναι ισοσκελές.



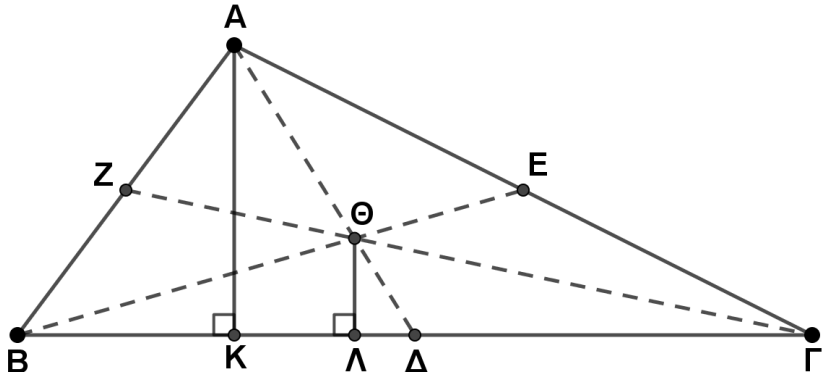
Πρόβλημα 4

Δίνεται τρίγωνο ΑΒΓ. **Να βρείτε τρόπο ώστε να το διαιρέσετε σε τρία ισοδύναμα σχήματα.**

1η Λύση: Στην πλευρά ΒΓ θεωρούμε σημεία $\Delta, \text{Ε}$ ώστε $\text{ΒΔ} = \Delta\text{Ε} = \text{ΕΓ}$ τότε τα τρίγωνα $\text{ΑΒΔ}, \text{ΑΔΕ}, \text{ΑΕΓ}$ είναι ισοδύναμα (έχουν ίσες βάσεις και κοινό ύψος από την κορυφή Α). Το ίδιο μπορούμε να επαναλάβουμε και με τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ.

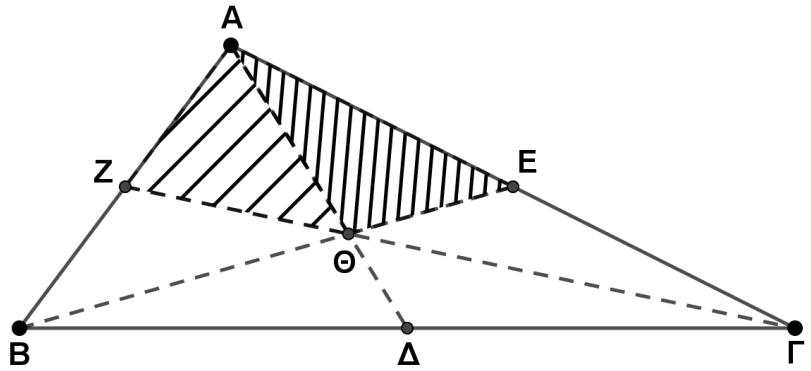


2η Λύση: Φέρνουμε τις διαμέσους $\text{ΑΔ}, \text{ΒΕ}, \Gamma\text{Ζ}$ που τέμνονται στο σημείο Θ βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ με την ιδιότητα να απέχει τα $\frac{2}{3}$ της διαμέσου από την αντίστοιχη κορυφή και το $\frac{1}{3}$ της διαμέσου από το μέσον της αντίστοιχης πλευράς. Φέρνουμε $\text{ΑΚ}, \Theta\Lambda \perp \text{ΒΓ}$ οπότε για τα τρίγωνα $\Theta\text{ΒΓ}, \text{ΑΒΓ}$ που έχουν κοινή βάση τη ΒΓ θα ισχύει: $\frac{(\Theta\text{ΒΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\Theta\Lambda}{\text{ΑΚ}}$. Όμως $\Theta\overset{\triangle}{\Lambda}\Delta \approx \text{Α}\overset{\triangle}{\text{Κ}}\Delta$ (ορθογώνια και η $\hat{\Delta}$ κοινή) άρα $\frac{\Theta\Lambda}{\text{ΑΚ}} = \frac{\Theta\Delta}{\text{ΑΔ}} = \frac{1}{3}$ οπότε $\frac{(\Theta\text{ΒΓ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{1}{3}$ άρα $(\Theta\text{ΒΓ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$. Με όμοιο τρόπο δείχνουμε ότι $(\Theta\text{ΑΒ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ}) = (\Theta\text{ΑΓ})$ οπότε $(\Theta\text{ΒΓ}) = (\Theta\text{ΑΒ}) = (\Theta\text{ΑΓ})$ και έχουμε ένα ακόμη τρόπο να πετύχουμε το ζητούμενο.



3η Λύση: Φέρνουμε τις διαμέσους $\text{ΑΔ}, \text{ΒΕ}, \text{ΓΖ}$ που τέμνονται στο σημείο Θ βαρύκεντρο του τριγώνου ΑΒΓ. Στο τρίγωνο $\Theta\text{ΑΒ}$ η $\Theta\text{Ζ}$ είναι διάμεσος άρα $(\Theta\text{ΑΖ}) = \frac{1}{2}(\Theta\text{ΑΒ})(1)$.

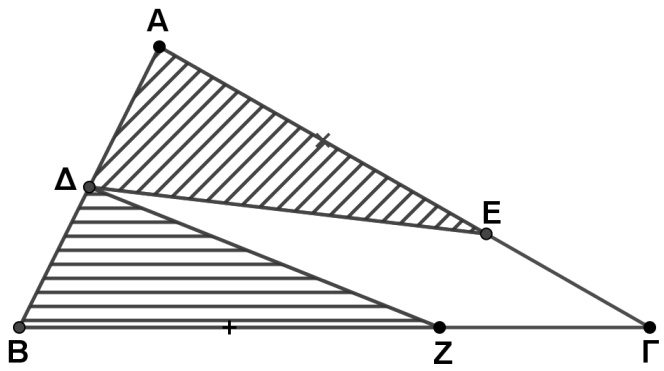
Επίσης $\text{Α}\hat{\Theta}\text{Β} + \text{Α}\hat{\Theta}\text{Ε} = 180^0$ οπότε $\frac{(\text{ΑΘΕ})}{(\text{ΑΘΒ})} = \frac{\text{ΑΘ}\cdot\Theta\text{Ε}}{\text{ΑΘ}\cdot\Theta\text{Β}} = \frac{\Theta\text{Ε}}{\Theta\text{Β}} = \frac{\frac{1}{3}\text{ΒΕ}}{\frac{2}{3}\text{ΒΕ}} = \frac{1}{2}$ άρα $(\text{ΑΘΕ}) = \frac{1}{2}(\Theta\text{ΑΒ})(2)$. Με πρόσθεση των $(1),(2)$ κατά μέλη παίρνουμε: $(\Theta\text{ΑΖ}) + (\text{ΑΘΕ}) = (\Theta\text{ΑΒ}) \Rightarrow (\text{ΑΖΘΕ}) = (\Theta\text{ΑΒ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$ και όμοια $(\text{ΒΖΘΔ}) = (\text{ΓΔΘΕ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$ άρα $(\text{ΑΖΘΕ}) = (\text{ΒΖΘΔ}) = (\text{ΓΔΘΕ})$.



4η Λύση: Έστω Δ το μέσον της πλευράς ΑΒ, Ε σημείο της πλευράς ΑΓ ώστε $\text{ΑΕ} = \frac{2}{3}\text{ΑΓ}$ και Ζ σημείο της πλευράς ΒΓ ώστε $\text{ΒΖ} = \frac{2}{3}\text{ΒΓ}$. Τα τρίγωνα ΑΔΕ και ΑΒΓ έχουν κοινή τη γωνία Α άρα $\frac{(\text{ΑΔΕ})}{(\text{ΑΒΓ})} = \frac{\text{ΑΔ}\cdot\text{ΑΕ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{ΑΓ}} = \frac{\frac{1}{2}\text{ΑΒ}\cdot\frac{2}{3}\text{ΑΓ}}{\text{ΑΒ}\cdot\text{Α}} = \frac{1}{3}$ οπότε

$(\text{ΑΔΕ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$. Όμοια δείχνεται ότι $(\text{ΒΔΖ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$ οπότε και $(\text{ΔΖΓΕ}) = \frac{1}{3}(\text{ΑΒΓ})$ άρα

$(\text{ΑΔΕ}) = (\text{ΒΔΖ}) = (\text{ΔΖΓΕ})$.



Βιβλιογραφία

- Μεγάλη Σοβιετική Εγκυκλοπαίδεια, Ε. Γ. Πόζνιακ, Τόμος 12, σελ. 150
- Κερασαρίδης Γ. Η Ευκλείδεια Γεωμετρία στην εκπαίδευση και την κοινωνία. 30ο πανελλήνιο συνέδριο Ε.Μ.Ε. Καρδίτσα, 2013.
- Κόσυβας Γ. Αξιοποίηση ανοιχτών προβλημάτων στη διδασκαλία των μαθηματικών. 30ο πανελλήνιο συνέδριο Ε.Μ.Ε. Καρδίτσα, 2013.
- Φερεντίνος Σ., Γαλάνη Ι. Τα ανοιχτά προβλήματα στη Μαθηματική Εκπαίδευση. 29ο πανελλήνιο συνέδριο Ε.Μ.Ε. Καλαμάτα, 2012.
- Becker, J. & Shimada, L. 1997. The open-ended approach. Reston (VA): NCTM.
- Becker, J., Shimada, S. (1997). The open-ended approach: a new proposal for teaching mathematics. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Pehkonen, E. (Ed.) (1997). Use of open-ended problems in mathematics classroom. DepartmentofTeacherEducation, ResearchReport 176. UniversityofHelsinki.
- PISA. (2007). Διεθνές Πρόγραμμα για την αξιολόγηση των Μαθητών. Αθήνα: ΚΕΕ
- Shimada, S. (1997). Open-ended approach in arithmetic and mathematics. A new proposal towards teaching improvement. Tokyo, Mizuumishobo.
- Silver, E. A. (1995). The nature and use of open problems in mathematics education: Mathematical and pedagogical perspectives. ZDM, 95(2), 67-72.
- Stacey, K. (1995). The challengers of keeping open problem-solving open in school mathematics. ZDM, 95(2), 62-67.