Στοχεύοντας στην κατανόηση και την εμβάθυνση εννοιών της Άλγεβρας Α΄ Λυκείου

Πρόδρομος Π. Ελευθερίου
Επίτιμος Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
email: makisel@sch.g

Περίληψη
Η μάθηση των μαθηματικών είναι μια διαρκής, σπειροειδής διαδικασία, η οποία υλοποιείται κατά μήκος της διδασκόμενης ύλης μέσα στην ίδια τάξη αλλά και από τάξη σε τάξη. Όπως είναι γνωστό, το μεγαλύτερο μέρος της ύλης της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου είναι σε γενικές γραμμές επανάληψη εκείνης του Γυμνασίου. Έτσι, η Α΄ Λυκείου προσφέρεται, κυρίως, για εμβάθυνση και εννοιολογική κατανόηση παράλληλα με την εκμάθηση κανόνων, αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων, οι οποίοι εφαρμόζονται σε μια δεδομένη σειρά προβλημάτων. Πράγματα που στο Γυμνάσιο θεωρούνταν δεδομένα μπορούν τώρα να τίθενται υπό αμφισβήτηση και να γίνονται αντικείμενο συζήτησης και αναστοχασμού. Στην παρούσα εισήγηση προτείνονται κάποια θέματα θεωρίας και ασκήσεων που αναφέρονται στους ρητούς, τους άρρητους, τη διάταξη, την απόλυτη τιμή, τις ρίζες, τις συναρτήσεις καθώς και στην αλληλοσύνδεσή τους. Θέματα που είτε, αν δεν κατανοηθούν επαρκώς, οδηγούν σε παρανοήσεις είτε είναι ιδιαίτερης αξίας για την κατανόηση της ανάλυσης.

Abstract
Learning mathematics is a continuous, spiral process, implemented along the syllabus within a certain school grade, as well as from one school grade to another. As is known, most part of the Algebra syllabus for the 1st grade of Lyceum is, in general, a repetition of that of Gymnasium. Thus, the 1st grade of Lyceum mainly serves for penetration and conceptual understanding, alongside with learning rules, algorithms and mathematic formulas that apply to a certain series of math problems. What was considered as known in Gymnasium can now be questioned and become subject of conversation and reconsideration. This proposal suggests some theory and practice issues that refer to rational and irrational numbers, order, absolute value, square roots, functions, as well as their interconnection. These issues either lead to misconceptions – if not sufficiently understood, or they are highly important for the analysis understanding.

Εισαγωγή

Κύριος και τελικός αποδέκτης της παρούσας εισήγησης είναι ο μαθητής της Α΄ Λυκείου και για το λόγο αυτό περιορίζεται στη σχολική διδακτέα ύλη της συγκεκριμένης τάξης. Οι ασκήσεις που προτείνονται είναι στο επίπεδο εκείνων του σχολικού βιβλίου, εκτός από τις ασκήσεις 3 και 4, οι οποίες έχουν συμπεριληφθεί, επειδή πιθανολογούμε ότι μαθητές με αυξημένα ενδιαφέροντα για τα μαθηματικά θα τις βρουν ενδιαφέρουσες.

Επειδή το μεγαλύτερο μέρος της ύλης της Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου είναι σε γενικές γραμμές επανάληψη εκείνης του Γυμνασίου, η Α΄ Λυκείου προσφέρεται, κυρίως, για εμβάθυνση και εννοιολογική κατανόηση παράλληλα με την εκμάθηση κανόνων, αλγορίθμων και μαθηματικών τύπων. Επομένως, η Α΄ Λυκείου προσφέρεται για διδασκαλία κατάλληλα στοχευμένη, ώστε, μεταξύ των άλλων, οι μαθητές:

- Να μπορούν **να κάνουν ορθούς συλλογισμούς**. Το λάθος σε κάποιες πράξεις, η αδυναμία επίλυσης μιας εξίσωσης, η αδυναμία απόδειξης ενός ισχυρισμού δεν είναι πράγματα τραγικά. Είναι, όμως, τραγικό να γίνονται λανθασμένοι συλλογισμοί, γιατί τότε υπάρχει ο κίνδυνος από αληθείς υποθέσεις να προκύψουν ψευδή συμπεράσματα ή το αντίστροφο.

  «Τα Μαθηματικά μάς βοηθούν να σκεφτόμαστε πιο λογικά. Και αν σκέφτεσαι λογικότερα, αυτό μπορεί να βοηθήσει για την ανάλυση οποιουδήποτε γενικότερου προβλήματος. Όπως όταν βλέπεις μια εικαστική έκθεση σιγά – σιγά ανεβαίνει το αισθητικό σου κριτήριο, όσο περισσότερο ασχολείσαι με τα Μαθηματικά τόσο τροχίζεται η λογική σου, είναι δηλαδή σημαντικά για την κουλτούρα μας, ανεξάρτητα από τη χρησιμότητά τους σε οποιονδήποτε τομέα». [20].

- **Να κατανοούν σε βάθος τους ορισμούς, τις προτάσεις και τους τύπους** και φυσικά να τους χρησιμοποιούν σωστά για την επίλυση ασκήσεων. Άλλωστε, πώς μπορεί κανείς να εφαρμόζει κάτι σωστά, αν πρώτα δεν το έχει καταλάβει; Πώς μπορεί να χρησιμοποιεί τύπους, αν δεν έχει κατανοήσει τι εκφράζουν και κάτω από ποιους περιορισμούς ισχύουν; Στην κατανόηση των εννοιών μπορεί να συμβάλλει και η ενασχόληση των μαθητών με ασκήσεις που οδηγούν σε παρανοήσεις, γιατί, μέσω της συζήτησης και της ανταλλαγής απόψεων, ενεργοποιείται η τάξη και ξεκαθαρίζουν λεπτά σημεία της θεωρίας.
- **Να διατυπώνουν σωστά τα αξιώματα, τους ορισμούς, τα θεωρήματα και τα πορίσματα** και να είναι προσεκτικοί στις διατυπώσεις, γιατί, αφαιρώντας ή τροποποιώντας κάποια λέξη, μπορεί να προκύψει πρόταση που δεν ισχύει.
- Να μπορούν σε κάθε θεώρημα ή πόρισμα **να γράφουν** ποια είναι η **υπόθεση** και ποιο το **συμπέρασμα** και να **διατυπώνουν το αντίστροφο.**

- **Να αποκτήσουν ευχέρεια** στη χρήση των αποδεικτικών μεθόδων απαγωγής σε άτοπο, αντιπαραδείγματος, ευθείας απόδειξης και απόδειξης με χρήση ισοδυναμιών. Να κατανοήσουν ότι:
  – Τα αντιπαραδείγματα τα χρησιμοποιούμε για να αποδείξουμε ότι κάτι **δεν ισχύει πάντοτε,** δηλαδή τα χρησιμοποιούμε, για να **απορρίπτουμε** ισχυρισμούς, και είναι η μοναδική περίπτωση όπου από το μερικό μπορούμε να συμπεράνουμε το γενικό.
  – Αν κάτι ισχύει για **μερικές** περιπτώσεις, τότε δεν είναι σίγουρο ότι ισχύει για όλες τις περιπτώσεις,
- Να μπορούν **να αναπαραγάγουν τις αποδείξεις** θεωρημάτων και πορισμάτων (όχι να τις αποστηθίζουν) και να ελέγχουν αν ισχύει το αντίστροφο.
- **Να γνωρίζουν τη σωστή χρήση** των συμβόλων (π.χ $\Rightarrow$, $\Leftrightarrow$, $\leq$, $\geq$), των συνδέσμων «και», «ή» και των εκφράσεων «αν και μόνο αν», «ικανή και αναγκαία συνθήκη».
- Να μπορούν **να δημιουργούν εικασίες** με, χρήση ή μη, κατάλληλων λογισμικών και να ελέγχουν αν είναι ορθές ή όχι.
- **Να κατασκευάζουν ασκήσεις**. Ας σημειωθεί ότι οι εκείνοι που αποκτούν μια τέτοια δεξιότητα, εκτός από τη χαρά της δημιουργίας εμβαθύνουν και κατακτούν τη γνώση, κατά τρόπο στέρεο και δημιουργικό.

Κλείνοντας θα ήθελα να τονίσω τα εξής:

1. Διδάσκοντας μια οποιαδήποτε ενότητα θα πρέπει να έχουμε στραμμένη την προσοχή μας στο παρελθόν (προγενέστερες γνώσεις), στο παρόν (άμεσα μαθησιακά αποτελέσματα) και στο μέλλον (τι από αυτά που σχεδιάζουμε είναι σημαντικά για αργότερα). Ας γίνουμε πιο συγκεκριμένοι. Αν η διδακτική ενότητα προσφέρεται για ανάκληση προηγούμενων γνώσεων, τότε ξεκινάμε με αυτές και στη συνέχεια με τη συμμετοχή και κινητοποίηση της τάξης περνούμε στο νέο που έχουμε να διδάξουμε. Τονίζονται ιδιαίτερα τα σημεία εκείνα που κρίνονται ότι είναι κομβικής σημασίας για τις επόμενες ενότητες της ίδιας τάξης ή των επόμενων τάξεων. Γίνονται οι αποδείξεις θεωρημάτων ή «θεωρητικών» ασκήσεων με τρόπο αναλυτικό και κατανοητό και απαραίτητα με τη συμμετοχή των μαθητών. Για εξοικονόμηση χρόνου θα μπορούσαμε από το προηγούμενο μάθημα να προτείνουμε, για εργασία στο σπίτι, κατάλληλές ερωτήσεις οι οποίες δημιουργούν εικασίες για αυτά που πρόκειται να συζητηθούν στο αμέσως επόμενο μάθημα. Για παράδειγμα, αν σχεδιάζουμε να αποδειχθεί η συνεπαγωγή $\alpha<\beta \Rightarrow \alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$, θα μπορούσαμε, για εργασία στο σπίτι, να δώσουμε στους μαθητές διάφορα ζεύγη «συγκεκριμένων» αριθμών και να τους ζητήσουμε να τοποθετήσουν πάνω στον άξονα των πραγματικών αριθμών τους αριθμούς του κάθε ζεύγους και το ημιάθροισμά τους (κάνοντας νέο σχήμα κάθε φορά) και στη συνέχεια να μαντέψουν ποια είναι η διάταξη των αριθμών α, β και $\frac{\alpha+\beta}{2}$, οπότε εκείνο που μένει για την τάξη είναι η απόδειξη της εικασίας.

2. Δίνουμε για εργασία στο σπίτι:
- Εύκολες υπολογιστικές ασκήσεις.
- Ασκήσεις με αποδεικτή διαδικασία ανάλογη εκείνης που χρησιμοποιείται στις αποδείξεις θεωρημάτων ή εφαρμογών του σχολικού βιβλίου.
- Εύκολα ρεαλιστικά προβλήματα που να αναλύονται σε επιμέρους ερωτήματα που διευκολύνουν τον μαθητή στη λύση.
- Επιπλέον υλικό εμβάθυνσης για εκείνους που το επιζητούν...

3. Προτρέπουμε τους μαθητές να περιγράφουν με λίγα λόγια τα κύρια σημεία κάθε ενότητας που μελέτησαν.

4. Επιμένουμε στις ερωτήσεις κατανόησης του σχολικού βιβλίου και μάλιστα προτείνεται να ζητούμε αιτιολόγηση.

5. Δίνουμε έμφαση σε ασκήσεις που θα χρειαστούν σε επόμενες παραγράφους ή σε επόμενη τάξη.

6. Λύνουμε ασκήσεις με πολλούς τρόπους όπου είναι εφικτό.

7. Συνεργαζόμαστε με τον Φυσικό και τον Χημικό του σχολείου και όπου είναι εφικτό και με εκπαιδευτικούς άλλων ειδικοτήτων. Ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα συνεργασίας Μαθηματικού Φυσικού είναι ο ορισμός της κλίσης της ευθείας στα βιβλία Άλγεβρας και Φυσικής της Α΄ Λυκείου.

Κλείνοντας την εισαγωγή, θεωρώ σκόπιμο να παραθέσω ένα απόσπασμα από μία συνέντευξη που έδωσε ο κ. Γ. Δάσιος. «*Δημ.: Έπειτα από 45 χρόνια στην ανώτατη εκπαίδευση τι θα λέγατε γι' αυτά τα νέα παιδιά;*». «*Γ. Δάσιος: Ότι χρόνο με τον χρόνο οι καλοί γίνονται καλύτεροι. Από την άλλη πλευρά, όμως, χρόνο με τον χρόνο ο μέσος όρος πέφτει.*» [6].

Οι πραγματικοί αριθμοί

Οι μαθητές ήδη από το γυμνάσιο ξέρουν ότι οι πραγματικοί αριθμοί αποτελούνται από ρητούς και άρρητους και μάλιστα σε κάποιο βαθμό μπορούν και τους αναγνωρίζουν. Αρκετοί, όμως, μαθητές, ενώ αναγνωρίζουν ότι ο π, οι εκφράσεις με ριζικά π.χ. $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, $1+\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$ καθώς και οι αριθμοί της μορφής 1,010010001…. (άπειρο, μη περιοδικό δεκαδικό μέρος) είναι άρρητοι, εντούτοις έχουν δυσκολία να αναγνωρίσουν ότι αριθμοί όπως συν30^{o}, ημ60^{o} είναι επίσης άρρητοι. Θα ήταν ενδεχομένως χρήσιμο να αναφέρουμε στους μαθητές ότι οι περισσότεροι τριγωνομετρικοί αριθμοί είναι άρρητοι και μάλιστα στη Β΄ Λυκείου θα μπορούμε να αποδείξουμε γιατί κάποιοι από αυτούς είναι άρρητοι. (π.χ. συν10^{o}, ημ10^{o}, συν20^{o} , ημ20^{o}). Στην Α΄ Λυκείου θα δουν για πρώτη φορά πως αποδεικνύεται ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος. Πηγαίνοντας ένα βήμα παραπέρα, θα προτείναμε, μετά τη σχετική απόδειξη, να αναφερθεί ότι με ανάλογο τρόπο αποδεικνύεται ότι ισχύει κάτι γενικότερο. Συγκεκριμένα, να τους αναφέρουμε

ότι ισχύει: «Αν ο φυσικός αριθμός ν δεν είναι τετράγωνο φυσικού αριθμού, τότε ο $\sqrt{ν}$ είναι άρρητος». Έτσι, οι μαθητές θα μπορούν να αναγνωρίζουν και να δικαιολογούν αν ένας αριθμός της μορφής $\sqrt{ν}$ με $ν \in \mathbb{N}$ είναι ρητός ή όχι και να «κατασκευάζουν» και άλλους άρρητους.

Ολοκληρώνοντας τη διδασκαλία των πραγματικών αριθμών θέτουμε ως στόχο οι μαθητές:

- Να αναγνωρίζουν αν ένας αριθμός είναι φυσικός, ακέραιος, ρητός ή άρρητος. Αυτό μπορεί να επιτευχθεί με τη χρήση αριθμητικών παραδειγμάτων, ανάλογων εκείνων που υπάρχουν στα σχολικά βιβλία ή στις αντίστοιχες οδηγίες.
- Να παριστάνουν τους ρητούς με σημεία του άξονα των πραγματικών αριθμών.
- Να αναγνωρίζουν τους άρρητους αριθμούς ως αριθμούς που δεν μπορούν να γραφούν ως κλάσμα ακεραίων καθώς επίσης και ως αριθμούς με άπειρα δεκαδικά ψηφία μη περιοδικά και, τέλος, ότι οι άρρητοι είναι το συμπλήρωμα των ρητών.

Σχήμα 1

- Να διατυπώνουν τους ορισμούς των ρητών και των άρρητων.
- Να δικαιολογούν γιατί το άθροισμα και το γινόμενο αρρήτων δεν είναι πάντα άρρητος.
- Να αποδεικνύουν ότι ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος και με τη χρήση κανόνα και διαβήτη να τον παριστάνουν στον άξονα των πραγματικών αριθμών.
- Να αποδεικνύουν τη συνεπαγωγή $α<β \Rightarrow α<\frac{α+β}{2}<β$ και στηριζόμενοι σ' αυτή να δικαιολογούν ότι:

  α. Ανάμεσα σε δυο πραγματικούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί.

  β. Αν ένας πραγματικός αριθμός x είναι «πολύ κοντά» σε έναν άλλο πραγματικό αριθμό x_o, τότε υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί κοντύτερα στον x_o.
- Να αποδεικνύουν ότι ανάμεσα σε δυο ρητούς όσο «κοντά» και αν είναι, υπάρχουν άπειροι ρητοί.
- Να αποδεικνύουν ότι δεν υπάρχουν διαδοχικοί ρητοί, εκτός και αν αυτοί είναι ακέραιοι. Να αποδεικνύουν, δηλαδή ότι, αν ένας ρητός δεν είναι ακέραιος, τότε δεν έχει επόμενο.
- Να αποδεικνύουν ότι:

α. Το άθροισμα ρητού άρρητου είναι άρρητος.
β. Το γινόμενο μη μηδενικού ρητού με άρρητο είναι άρρητος.

- Να έχουν εξοικειωθεί με τη χρήση της απαγωγής σε άτοπο και του αντιπαραδείγματος.

Τέλος, ας σημειωθεί ότι κατά τη μελέτη των ρητών και αρρήτων μπορούν να χρησιμοποιηθούν όλες οι αποδεικτικές μέθοδοι που χρησιμοποιούνται στην Α΄ Λυκείου, δηλαδή: Απαγωγή σε άτοπο, Μέθοδος Αντιπαραδείγματος, Ευθεία Απόδειξη και Απόδειξη με Χρήση Ισοδυναμιών.

Οι πραγματικοί αριθμοί – Ασκήσεις

Προτείνουμε την παρακάτω άσκηση 1, γιατί, εκτός του ότι έχει ιστορική αξία, η απόδειξή της είναι εύκολη και συμβάλει στην περαιτέρω εξοικείωση των μαθητών με την απαγωγή σε άτοπο.

1. Άσκηση

Το 1794 ο Γάλλος μαθηματικός Αντριέν-Μαρί Λεζάντρ (1752-1833), απέδειξε ότι ο π^2 είναι άρρητος.
Ο π είναι ρητός ή άρρητος; Να δικαιολογήσετε την απάντησή σας.

Προτείνουμε την παρακάτω άσκηση 2 (είναι η άσκηση 7 της Β΄ Ομάδας της σελίδας 55 του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Α΄ Λυκείου), γιατί:

- Συμβάλλει στην εξοικείωση των μαθητών με την απαγωγή σε άτοπο.
- Τους βοηθά να «κατασκευάζουν» και άλλους άρρητους αριθμούς που δεν είναι της μορφής $\sqrt{\nu}$, $\nu\in\mathbb{N}$ και να δικαιολογούν γιατί αριθμοί, όπως οι $1+\sqrt{2}$, $5\sqrt{3}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, είναι άρρητοι.
- Διευκολύνει στην επίλυση ασκήσεων σχετικών με ρητούς και αρρήτους.

2. Άσκηση

Να αποδείξετε ότι:
i) Το άθροισμα ρητού αρρήτου είναι άρρητος.
ii) Το γινόμενο μη μηδενικού ρητού με άρρητο είναι άρρητος.

Πυκνότητα ρητών

Μια ιδιότητα που διακρίνει τους ρητούς από τους ακεραίους είναι ότι οι ρητοί αποτελούν «πυκνό» σύνολο αριθμών. Αυτό σημαίνει ότι μεταξύ δύο οποιωνδήποτε ρητών όσο κοντά κι αν βρίσκονται, μπορούμε να «στριμώξουμε» έναν επιπλέον, ακόμα και άπειρους

άλλους ρητούς, π.χ. οι αριθμοί 1/1000000 και 1/1000001 βρίσκονται σίγουρα πολύ κοντά, αφού η διαφορά τους είναι περίπου ένα τρισεκατομμυριοστό. Μπορούμε εύκολα να προσδιορίσουμε κλάσματα που βρίσκονται ανάμεσά τους, π.χ. το ενδιάμεσο κλάσμα 2/2000001. Είναι λοιπόν φυσικό να συμπεράνει κανείς ότι αν τοποθετήσουμε όλους τους ρητούς πάνω στην ευθεία, τότε ολόκληρη η ευθεία θα καλυφθεί, δηλαδή όλα της τα σημεία θα είναι θέσεις ρητών αριθμών. Στα μαθηματικά όμως αυτό που φαίνεται να αποτελεί «φυσικό συμπέρασμα» συχνά αποδεικνύεται λανθασμένο. Ένα από τα σημαντικότερα γεγονότα στην ιστορία των μαθηματικών υπήρξε η ανακάλυψη ότι οι ρητοί αριθμοί, παρά την πυκνότητά τους αφήνουν «κενά» πάνω στην ευθεία, δηλαδή σημεία τα οποία δεν αντιστοιχούν σε ρητούς. Αυτά τα «κενά» έρχονται να τα συμπληρώσουν οι άρρητοι. ([13], σελ.7).

Πυκνότητα ρητών στο IR

Οι ρητοί είναι πυκνοί στο IR, δηλαδή σε όποιο διάστημα (α, β) και αν κοιτάξουμε, οσοδήποτε «μικρό», θα δούμε μέσα έναν ρητό. [9].

Αποδεικνύεται το θεώρημα:

Θεώρημα (**Πυκνότητα ρητών στο IR)**

Για κάθε $\alpha,\beta\in IR$ με $\alpha<\beta$ υπάρχει τουλάχιστον ένας ρητός ρ, ώστε $\alpha<\rho<\beta$.

Πυκνότητα αρρήτων στο IR

Οι άρρητοι είναι πυκνοί στο IR, δηλαδή σε όποιο διάστημα (α, β) και αν κοιτάξουμε, οσοδήποτε «μικρό», θα δούμε μέσα έναν άρρητο.

Θεώρημα (Πυκνότητα αρρήτων στο IR)

Για κάθε $\alpha,\beta\in IR$ με $\alpha<\beta$ υπάρχει τουλάχιστον ένας άρρητος x, ώστε $\alpha<x<\beta$.

Στην άσκηση 3 που ακολουθεί αποδεικνύουμε ότι, αν ένα τουλάχιστον από τα άκρα του διαστήματος (α, β) είναι ρητός αριθμός, τότε υπάρχει ρητός μέσα στο διάστημα αυτό. Η απόδειξη ότι ανάμεσα σε δυο αρρήτους υπάρχει ρητός ξεφεύγει από το πλαίσιο της σχολικής ύλης και, επομένως, δε θα συμπεριληφθεί στην παρούσα εισήγηση.
Στην άσκηση 4 αποδεικνύουμε την πυκνότητα των αρρήτων στο IR.

3. Άσκηση

Να αποδείξετε ότι:

i. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει $\alpha<\beta$, τότε $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.

ii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί.

iii. Αν ένας πραγματικός αριθμός x είναι «πολύ κοντά» σε έναν άλλο πραγματικό αριθμό x_o, τότε υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί κοντύτερα στον x_o.

iv. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς, όσο «κοντά» και αν είναι:

α) υπάρχει ρητός.

β) υπάρχουν άπειροι ρητοί.

v. Αν ένας ρητός δεν είναι ακέραιος, τότε δεν έχει επόμενο.

vi. Αν ένα τουλάχιστον από τα άκρα του διαστήματος (α, β) είναι ρητός, τότε υπάρχει ρητός μέσα στο διάστημα αυτό.

vii. Κάθε άρρητο μπορούμε να τον προσεγγίσουμε από μια ακολουθία ρητών.

Απόδειξη

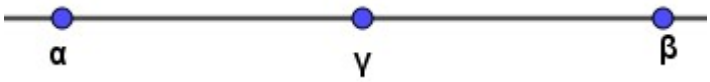
i. Αν α<β, τότε:

- $\alpha + \alpha < \alpha + \beta \Longrightarrow 2\alpha < \alpha + \beta \Longrightarrow \alpha < \frac{\alpha+\beta}{2}$
- $\alpha + \beta < \beta + \beta \Longrightarrow \alpha + \beta < 2\beta \Longrightarrow \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$

Άρα $\alpha<\frac{\alpha+\beta}{2}<\beta$.

ii. Η ύπαρξη άπειρων πραγματικών αριθμών σε κάθε διάστημα (α, β) μπορεί να εξασφαλιστεί με τη λεγόμενη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων. Συγκεκριμένα εργαζόμαστε ως εξής:

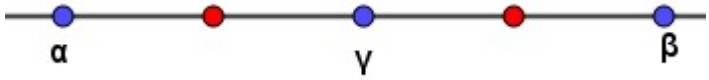
Διχοτομούμε το αρχικό διάστημα (α, β) στα διαστήματα (α, γ) και (γ, β).



Σχήμα 2

Μέσα σε καθένα από τα δυο νέα διαστήματα θα υπάρχει, σύμφωνα με το ερώτημα (i), από ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός.

Διχοτομούμε τα δύο νέα διάστημα, σε καθένα από τα τέσσερα νέα διαστήματα θα υπάρχει από ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός.



Σχήμα 3

Συνεχίζοντας αυτή τη διαδικασία οδηγούμαστε στο συμπέρασμα ότι στο διάστημα (α,β) υπάρχουν άπειροι πραγματικοί αριθμοί.

iii. Εργαζόμαστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων, όπως παραπάνω, αλλά πάντοτε διχοτομούμε διαστήματα με άκρο το x_o.

iv. **α)** Έστω α, β ρητοί με α<β, τότε, σύμφωνα με το ερώτημα (i), ισχύει:

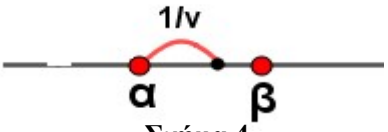
$$\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$$

Επομένως, ανάμεσα σε δυο ρητούς υπάρχει το ημιάθροισμά τους το οποίο μάλιστα είναι ρητός.

β) Εργαζόμαστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.

v. Άμεση συνέπεια του ερωτήματος (iv).

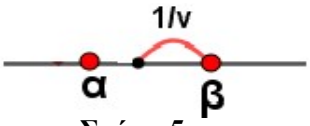
vi. Αν ο α είναι ρητός, τότε αυξάνοντας τον α κατά $\frac{1}{\nu}$, ν θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{\nu}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β), θα έχουμε:



Σχήμα 4

$\alpha < \alpha + \frac{1}{\nu} < \beta$. Ο αριθμός $\alpha + \frac{1}{\nu} = \frac{\nu\alpha+1}{\nu}$ είναι ρητός και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β).

- Αν ο β είναι ρητός, τότε ελαττώνοντας τον β κατά $\frac{1}{\nu}$, ν θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{\nu}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) θα έχουμε:



Σχήμα 5

$\alpha < \beta - \frac{1}{\nu} < \beta$. Ο αριθμός $\beta - \frac{1}{\nu} = \frac{\nu\beta-1}{\nu}$ είναι ρητός και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α, β).

- Αν α και β ρητοί, τότε υπάρχει ρητός ανάμεσά τους, όπως προκύπτει, είτε από όσα αναπτύχθηκαν αμέσως παραπάνω είτε από το ερώτημα (iv) της παρούσης άσκησης.

vii. Προκύπτει από το προηγούμενο ερώτημα.

4. Άσκηση

Να αποδείξετε ότι:

i. Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α,β ισχύει α<β, τότε $\alpha < \frac{\alpha+\beta}{2} < \beta$.

ii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε αρρήτους υπάρχει άρρητος.

iii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε άρρητους αριθμούς, όσο «κοντά» και αν είναι, υπάρχουν άπειροι άρρητοι.

iv. Κανένας άρρητος δεν έχει επόμενο.

v. Ανάμεσα σε ρητό και άρρητο υπάρχει πάντοτε άρρητος.

vi. Ανάμεσα σε ρητό και άρρητο, όσο «κοντά» και αν είναι, υπάρχουν άπειροι άρρητοι.

vii. α) Ο αριθμός $\frac{\sqrt{2}}{2}$ είναι άρρητος και μάλιστα βρίσκεται ανάμεσα στους 0 και 1.

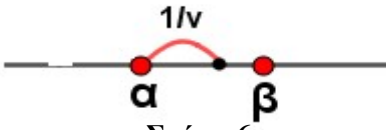
β) Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς υπάρχει άρρητος.

viii. Ανάμεσα σε δύο οποιουσδήποτε ρητούς όσο «κοντά» και αν είναι υπάρχουν άπειροι άρρητοι.

Απόδειξη

i. Βλέπε άσκηση 3 ερώτημα (i).

ii. **1ος τρόπος.** Αν ο α είναι άρρητος, τότε αυξάνοντας τον α κατά $\frac{1}{\nu}$, ν θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{\nu}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β), θα έχουμε:

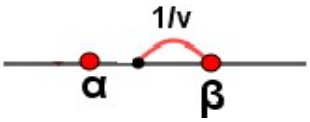


Σχήμα 6

$\alpha<\alpha+\frac{1}{\nu}<\beta$. Ο αριθμός $\alpha+\frac{1}{\nu}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α,β).

2ος τρόπος.

- Αν ο β είναι άρρητος, τότε ελαττώνοντας τον β κατά $\frac{1}{\nu}$, ν θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{\nu}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β), θα έχουμε:



Σχήμα 7

$\alpha<\beta-\frac{1}{\nu}<\beta$. Ο αριθμός $\beta-\frac{1}{\nu}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α,β).

iii. Εργαζόμαστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.

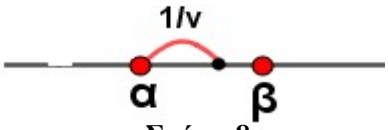
iv. Είναι συνέπεια του ερωτήματος (iii).

v. **1ος τρόπος**

Επειδή ο ένας από τους α,β είναι ρητός και ο άλλος άρρητος συμπεραίνουμε ότι ο αριθμός $\frac{\alpha+\beta}{2}$ είναι άρρητος και μάλιστα, σύμφωνα με το ερώτημα (1), είναι ανάμεσα στους α και β.

2ος τρόπος

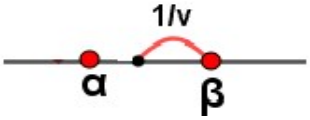
- Αν ο α είναι άρρητος, τότε αυξάνοντας τον α κατά $\frac{1}{\nu}$, ν θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{\nu}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β) θα έχουμε:



Σχήμα 8

α<α+$\frac{1}{\nu}$ <β. Ο αριθμός $\alpha + \frac{1}{\nu}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α,β).

- Αν ο β είναι άρρητος, τότε ελαττώνοντας τον β κατά $\frac{1}{\nu}$, ν θετικός ακέραιος, όπου, όμως, ο $\frac{1}{\nu}$ είναι μικρότερος από το μήκος του διαστήματος (α, β), θα έχουμε:

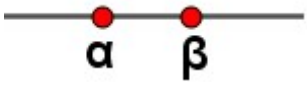


Σχήμα 9

α<$\beta - \frac{1}{\nu}$ <β. Ο αριθμός $\beta - \frac{1}{\nu}$ είναι άρρητος και μάλιστα ανήκει στο διάστημα (α,β).

vi. Η ύπαρξη άπειρων αρρήτων σε κάθε διάστημα (α, β) με άκρα ρητό και άρρητο μπορεί να εξασφαλιστεί με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.

vii. β) Έστω α,β ρητοί με α<β.



Σχήμα 10

Για να εξασφαλίσουμε ότι ανάμεσα στους α και β υπάρχει άρρητος, αρκεί να αυξήσουμε τον α κατά ένα θετικό άρρητο μικρότερο, όμως, από το μήκος του (α, β). Ένας τέτοιος άρρητος είναι ο $\frac{\sqrt{2}}{2}$(β-α), και επειδή $\alpha < \alpha + \frac{\sqrt{2}}{2}$(β-α)<β, συμπεραίνουμε ότι ανάμεσα στους ρητούς α και β υπάρχει άρρητος.

viii. Εργαζόμαστε με τη Μέθοδο Διχοτόμησης Διαστημάτων.

Σχόλιο

Η ύπαρξη θετικού ακεραίου ν για το οποίο ισχύει $\frac{1}{\nu} < \beta - \alpha$, όπου α, β πραγματικοί αριθμοί με α<β, δεν προβληματίζει μεν τους μαθητές, όμως, για να είμαστε συνεπείς η ύπαρξή του ν προκύπτει από την Αρχιμήδεια ιδιότητα του ℕ, «Για κάθε ε>0 υπάρχει ν∈ℕ τέτοιο ώστε $\frac{1}{\nu} < \varepsilon$», η οποία δε διδάσκεται στο Λύκειο.

Απόλυτη τιμή

Γενικά, η πιο άμεση προσέγγιση σε οποιοδήποτε πρόβλημα που έχει να κάνει με απόλυτες τιμές απαιτεί να διακρίνουμε διάφορες περιπτώσεις χωριστά, γιατί οι απόλυτες τιμές ορίζονται και αυτές με περιπτώσεις. Μάλιστα, μερικές φορές είναι η μόνη δυνατή μέθοδος. Ας σημειωθεί ότι σε αρκετές περιπτώσεις υπάρχουν απλούστερες μέθοδοι που μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε. ([19] σελ. 10,11).

- Στο σχολικό βιβλίο καμία από τις ιδιότητες των απολύτων τιμών δε γίνεται με διάκριση περιπτώσεων. Υπάρχουν όμως ασκήσεις, π.χ άσκηση 5 της σελ. 66 του σχολικού βιβλίου Άλγεβρας Α΄ Λυκείου, που για την επίλυση τους η μόνη δυνατή μέθοδος είναι η διάκριση περιπτώσεων. Γι' αυτό προτείνουμε η ιδιότητα $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ να αποδειχθεί και με διάκριση περιπτώσεων. Στη συνέχεια να γίνει συζήτηση και σύγκριση των δυο αποδεικτικών διαδικασιών:

«της διάκρισης περιπτώσεων και της απόδειξης του σχολικού βιβλίου».

Ως εθελοντική εργασία στο σπίτι να ζητηθεί η απόδειξη της ιδιότητας:

$$|\alpha+\beta| \leq |\alpha|+|\beta|.$$

να γίνει και με διάκριση περιπτώσεων.

- Στην **ε**φαρμογή 2, της σελίδας 219 του Σχολικού Βιβλίου Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομ. Προσ/σμού Θετικών Σπουδών /Οικονομίας &Πληροφορικής, ζητείται να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα:

$$\int_{-1}^{5} |x-2|dx$$

Η προτεινόμενη λύση ξεκινά ως εξής:

Επειδή $|x-2| = \begin{cases} 2-x, & \text{αν } x \leq 2 \\ x-2, & \text{αν } x \geq 2 \end{cases}$, έχουμε…..

Επομένως, δε θα ήταν κακή ιδέα κατά τη διδασκαλία της απόλυτης τιμής να ζητούσαμε να χαρακτηριστεί ως αληθής ή ψευδής ο ισχυρισμός:

«Για κάθε $\alpha \in IR$ ισχύει: $|\alpha| = \begin{cases} \alpha, & \text{αν } \alpha \geq 0 \\ -\alpha, & \text{αν } \alpha \leq 0 \end{cases}$»

και, τέλος, κατά τη διδασκαλία της συνάρτησης $f(x)=|x|$, (σχολικό βιβλίο Α΄ Λυκείου σελ. 163), να συζητηθεί γιατί στο βιβλίο γράφεται ότι:

$$f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x < 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases} \text{ και όχι } f(x) = |x| = \begin{cases} -x, & \text{αν } x \leq 0 \\ x, & \text{αν } x \geq 0 \end{cases};$$

Ρίζες πραγματικών αριθμών

Για να συνδέσουμε τις ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών:

- $\sqrt{\alpha^2}=|\alpha|$, $\alpha\in IR$,
- $\sqrt{\alpha\cdot\beta}=\sqrt{\alpha}\cdot\sqrt{\beta}$, α,β μη αρνητικοί.

με τις ιδιότητες, των απολύτων τιμών ίσως να είναι σκόπιμο, η ιδιότητα $|\alpha\beta|=|\alpha|\cdot|\beta|$ να αποδειχθεί και ως εξής:

$$|\alpha\beta|=\sqrt{(\alpha\beta)^2}=\sqrt{\alpha^2\beta^2}=\sqrt{\alpha^2}\sqrt{\beta^2}=|\alpha|\cdot|\beta|$$

Ιδιότητες των τετραγωνικών ριζών

Αφού δοθεί η απόδειξη της ιδιότητας «Αν α, β ≥ 0, τότε $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$», που υπάρχει στο σχολικό βιβλίο, προτείνουμε να δοθεί και εκείνη που υπάρχει στην 1η στήλη του πίνακα που ακολουθεί. Η πρόταση αυτή γίνεται, γιατί όπως εύκολα μπορεί να διαπιστωθεί οι αποδείξεις στις δυο στήλες είναι ουσιαστικά της ίδιας τεχνικής, οπότε προετοιμάζουμε τους μαθητές για κάτι που θα συναντήσουν στην επόμενη τάξη και, επιπλέον, κατανοούν ότι οι τρόποι απόδειξης δεν είναι μονοσήμαντοι.

Σχολικό βιβλίο Α΄ Λυκείου σελ. 71 **Ιδιότητες των ριζών**	**Σχολικό βιβλίο Β΄ Λυκείου σελ. 175** **Ιδιότητες των λογαρίθμων**
Αν α, β ≥ 0, τότε: $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$	Αν α > 0 με α ≠ 1, τότε για οποιουσδήποτε θ_1, θ_2, θ > 0 και k ∈ R ισχύει: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$
ΑΠΟΔΕΙΞΗ	**ΑΠΟΔΕΙΞΗ**
Έστω ότι είναι: $\sqrt[\nu]{\alpha}=x_1$ και $\sqrt[\nu]{\beta}=x_2$ (1) Τότε έχουμε $\alpha=x_1^\nu$, $x_1\geq0$ και $\beta=x_2^\nu$, $x_2\geq0$ οπότε: $\alpha\cdot\beta=x_1^\nu\cdot x_2^\nu$, δηλ. $\alpha\cdot\beta=(x_1\cdot x_2)^\nu$, $x_1\cdot x_2\geq0$. Από τον ορισμό όμως της νιοστής ρίζας, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με $\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}=x_1\cdot x_2$ από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά: $\sqrt[\nu]{\alpha}\cdot\sqrt[\nu]{\beta}=\sqrt[\nu]{\alpha\cdot\beta}$	Έστω ότι είναι: $\log_\alpha\theta_1=x_1$ και $\log_\alpha\theta_2=x_2$ (1) Τότε έχουμε $\alpha^{x_1}=\theta_1$ και $\alpha^{x_2}=\theta_2$ οπότε: $\alpha^{x_1}\cdot\alpha^{x_2}=\theta_1\theta_2$, δηλαδή $\alpha^{x_1+x_2}=\theta_1\theta_2$ Από τον ορισμό όμως του λογάριθμου, η τελευταία ισότητα είναι ισοδύναμη με $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=x_1+x_2$ από την οποία, λόγω των (1), έχουμε τελικά: $\log_\alpha(\theta_1\theta_2)=\log_\alpha\theta_1+\log_\alpha\theta_2$

Δυνάμεις με ρητό εκθέτη

Μετά την ολοκλήρωση της διδασκαλίας των δυνάμεων με ρητό εκθέτη, ίσως να ήταν μια καλή ιδέα να ζητηθεί από τους μαθητές να γράψουν τις παραστάσεις:

$$\sqrt[3]{x} \quad \text{και} \quad \sqrt[3]{x^2}$$

υπό μορφή δυνάμενων με ρητό εκθέτη.

Μια τέτοια ενέργεια αποτελεί πρόδρομο για την ισότητα ή μη των συναρτήσεων f και g με:

- $f(x) = \sqrt[3]{x}$ και $g(x) = x^{\frac{1}{3}}$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = x^{\frac{2}{3}}$.
- $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ και $g(x) = |x|^{\frac{2}{3}}$.

Μελέτη της συνάρτησης $f(x)=\alpha x^2+\beta x+\gamma$

Δίνεται στους μαθητές για εργασία στο σπίτι η παρακάτω άσκηση 5.

5. Άσκηση

i) Αν $\alpha \geq 1$ και $\beta \geq 2$, τότε να βρείτε για ποιες τιμές των α,β ισχύει αβ=2 αιτιολογώντας την απάντησή σας.

ii) Να μελετήσετε και να παραστήσετε γραφικά τις συναρτήσεις:

$$f(x)=3x^2-6x+5 \quad \text{και} \quad g(x)=5x^2-10x+6$$

iii) Να λύσετε την εξίσωση:

$$(3x^2-6x+5)(5x^2-10x+6) = 2$$

Ακολουθεί η λύση του ερωτήματος (iii), όπως παρουσιάστηκε στον πίνακα από κάποιον μαθητή.

Λύση (Μαθητή)

iii) Για κάθε $x \in IR$ είναι:

$$3x^2-6x+5 \geq 2 \ (1) \quad \text{και} \quad 5x^2-10x+6 \geq 1 \ (2)$$

Οι (1) και (2) ισχύουν ως ισότητες μόνο για x=1.

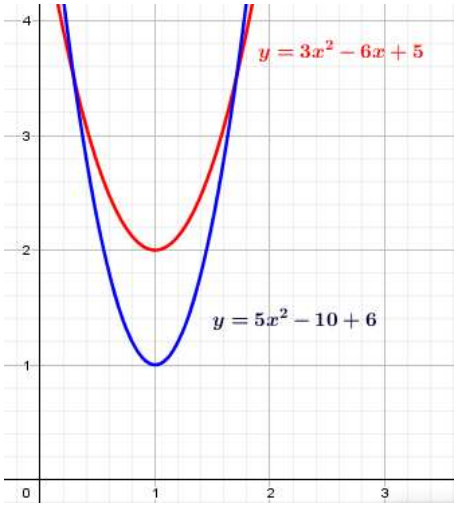
Λόγω των (1) και (2) συμπεραίνουμε ότι για κάθε $x \in IR$ ισχύει:

$$(3x^2-6x+5)(5x^2-10x+6) \geq 2 \ (3)$$

Σύμφωνα με το ερώτημα (i), η (3) ισχύει ως ισότητα μόνο όταν

$$3x^2-6x+5= 2 \quad \text{και} \quad 5x^2-10x+6 =1$$

δηλαδή όταν x =1.

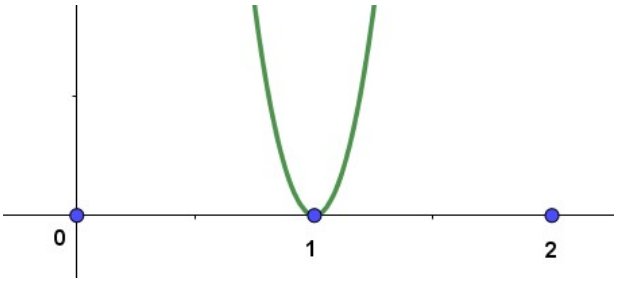


Σχήμα 11: Γραφ. παρ. f, g

Επομένως, η αρχική εξίσωση έχει μια μόνο λύση την x=1.■

Στη συνέχεια χρησιμοποιώντας το Geogebra προβλήθηκε στο διαδραστικό πίνακα η η γραφική παράσταση της συνάρτησης

$$g(x)=(3x^2-6x+5)(5x^2-10x+6)-2$$



Σχήμα 12: Γραφική παράσταση της g

και κλήθηκαν οι μαθητές, να απαντήσουν αν ο ισχυρισμός ότι η εξίσωση:

$$(3x^2-6x+5)(5x^2-10x+6) = 2$$

έχει μια μόνο λύση την x=1 είναι πλήρης και αν επιβεβαιώνεται από το παραπάνω σχήμα.

Δόθηκαν διάφορες απαντήσεις. Ας σταθούμε σε δύο.

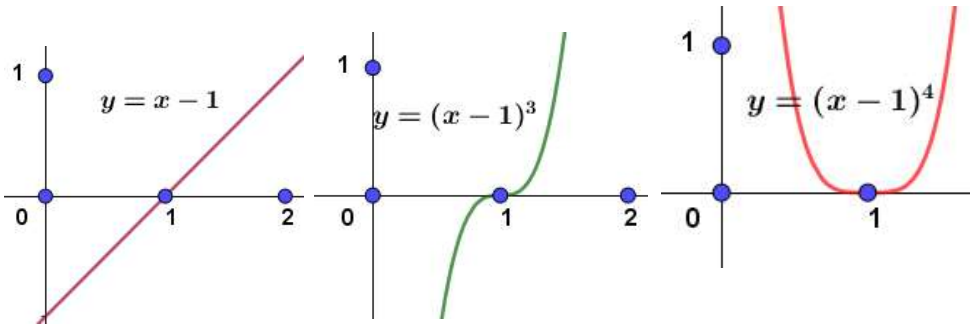
1η απάντηση. Η εξίσωση έχει μια μόνο ρίζα, την x=1, αφού το σημείο (1,0) είναι το μόνο κοινό σημείο της γραφικής παράσταση της g με τον άξονα x΄x.

2η απάντηση. Η εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα, την x=1, αφού η γραφική παράσταση της g εφάπτεται στον άξονα x΄x στο σημείο (1,0).

Τελικά οι μαθητές συμφώνησαν ότι μάλλον η 2η απάντηση είναι η ενδεδειγμένη.

Μετά προβλήθηκαν στον πίνακα οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων

$$f_1(x)= x-1, \qquad f_2(x)= (x-1)^3 , \qquad f_3(x)= (x-1)^4$$



Σχήμα 13: Γραφικές παραστάσεις των f_1, f_2, f_3

και κλήθηκαν οι μαθητές, να απαντήσουν πόσες και ποιες λύσεις έχουν οι εξισώσεις:

$x-1=0$, $(x-1)^3=0$ και $(x-1)^4=0$

Έγραψαν:

- $x-1=0 \Leftrightarrow x=1$ Η εξίσωση έχει μια μόνο λύση, το 1.
- $(x-1)^3=0 \Leftrightarrow (x-1)(x-1)(x-1)=0 \Leftrightarrow x=1$ ή $x=1$ ή $x=1$.

Άρα η εξίσωση έχει τρεις λύσεις ίσες με 1.

- Αντίστοιχα η εξίσωση $(x-1)^4=0$ έχει τέσσερις λύσεις ίσες με 1.

Μετά από όλα αυτά οι μαθητές ισχυρίστηκαν ότι από τη γραφική παράσταση δεν μπορούν να συμπεράνουν αν μια εξίσωση έχει ίσες λύσεις και στην περίπτωση που έχει πόσες είναι αυτές. Επομένως, είναι αναγκαίο η εξίσωση να επιλυθεί «αλγεβρικά».

Αλγεβρική λύση της εξίσωσης $(3x^2-6x+5)(5x^2-10x+6) = 2$

Η εξίσωση γράφεται $(3(x^2-2x)+5))\cdot(5(x^2-2x)+6)= 2$ και θέτοντας $x^2-2x= t$ έχουμε: $(3t+5)\cdot(5t+6) = 2$ ή ισοδύναμα $15t^2+43t+28=0$. Βρίσκουμε ότι: $t = -1$ ή $t = -28/15$

- Αν $t = -1$, τότε $x^2-2x = -1 \Leftrightarrow (x-1)^2 =0$, $x=1$ διπλή ρίζα.
- Αν $t = -28/15$ τότε $x^2-2x= -28/15 \Leftrightarrow x^2-2x+28/15=0$ αδύνατη.

Επομένως η αρχική εξίσωση έχει μια διπλή ρίζα την $x=1$.

Βιβλιογραφία

1. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (2017). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου,* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
2. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. (2017). *Μαθηματικά Γ΄ Γενικού Λυκείου Ομ. Προσ/σμού Θετικών Σπουδών /Οικονομίας &Πληροφορικής,* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
3. Αργυράκης, Α. κ.α. (2017). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου,* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
4. (2015) *ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΣΠΟΥΔΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ (Τάξεις: Α΄, Β΄, Γ΄) ΓΕΝΙΚΟ ΛΥΚΕΙΟ,* ΙΕΠ.
5. Βλάμος, Π. κ.α. *(2017). Μαθηματικά Β΄ Γυμνασίου,* ΙΤΥΕ «ΔΙΟΦΑΝΤΟΣ».
6. Δάσιος, Γ,. (2017). *Δε θα καταλάβουμε ποτέ πλήρως τον ανθρώπινο εγκέφαλο»* https://www.newsbeast.gr/greece/arthro/3136812/de-tha-katalavoume-pote-pliros-ton-anthropino-egkefalo
7. Π.Ι. (2011) *«ΝΕΟ ΣΧΟΛΕΙΟ (Σχολείο 21ου αιώνα)-Νέο Πρόγραμμα Σπουδών, Οριζόντια Πράξη» MIS:295450,* Αθήνα.
8. Θωμαΐδης, Ι., Καλφοπούλου, Α. (2011) *ΑΠΡΟΒΛΕΠΤΕΣ ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΕΣ ΣΥΝΔΕΣΕΙΣ…Ανάλυση μιας δραστηριότητας επίλυσης προβλήματος στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου.* Αθήνα: 28ο Πανελλήνιο Συνέδριο

Ε.Μ.Ε.

9. Κολουντζάκης, Μ. *Πυκνότητα των ρητών στους πραγματικούς αριθμούς.* https://www.youtube.com/watch?v=MagQaaGpMMo.

10. Λάππας, Δ. (2017). «Σχολικά Μαθηματικά και Μαθηματικά: η απόδειξη στην "Σχολική" Γεωμετρία» Θεσσαλονίκη: 7η ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ Καλαμαρί.

11. Νεγρεπόντης, Σ. κ. α. (1993). *Απειροστικός Λογισμός τόμος Ι.* Αθήνα: Συμμετρία.

12. Ντούγιας, Σ. (2007). *Απειροστικός Λογισμός Ι.* Αθήνα: Leader Books.

13. Ντριάνκος, Σ. (2011). *Άρρητοι αριθμοί και συνεχή κλάσματα: Παραστάσεις Προσεγγίσεις, Εξισώσεις και Διδακτικές Εφαρμογές.* Αθήνα: Διπλωματική Εργασία. http://blogs.sch.gr/sntriankos/2015/03/27/diplomatiki_sokratis-2/

14. Παντελίδης, Γ. (2006). *ΒΙΒΛΙΟ ΤΟΥ ΔΙΑΔΑΣΚΟΝΤΟΣ ΓΙΑ ΤΟ ΜΑΘΗΜΑ ΑΝΑΛΥΣΗ ΤΗΣ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ,* Θεσσαλονίκη: Ζήτη.

15. Παπαδημητράκης, Μ. (2015). Πραγματικές *Συναρτήσεις μιας Μεταβλητής,* Ελληνικά Ακαδημαϊκά Ηλεκτρονικά Συγγράμματα και Βοηθήματα: www.kallipos.gr

16. Π. Ι. (2007). *Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ του ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008,* Αθήνα: Ο.Ε.Δ.Β.

17. Συγκελάκης, Α. (2017). *Αξιοποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας με στόχο την αναβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών του Λυκείου.* Θεσσαλονίκη: 7η ΗΜΕΡΙΔΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΙΚΗΣ ΣΧΟΛΗΣ Καλαμαρί.

18. Skemp, R. *Εννοιολογική Κατανόηση και Εργαλειακή Κατανόηση.* Ευκλείδης Γ΄, Τόμος 13, Τεύχος 46, 1996.

19. Spivak, Michael. (2013). *Διαφορικός & Ολοκληρωτικός Λογισμός*, Ηράκλειο: Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

20. Φωκάς, Α. http://www.haniotika-nea.gr/ta-mathimatika-voithoun-ti-logiki/