Ορισμένες βασικές προϋποθέσεις για τη διδακτική αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Γιάννης Θωμαΐδης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Νομού Κιλκίς

Εισήγηση στη συζήτηση Στρογγυλού Τραπεζιού με θέμα:

Το πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης της Γεωμετρίας: Υπάρχει λύση;

1. Το μάθημα της Γεωμετρίας χθες και σήμερα

Θα ξεκινήσουμε επιχειρώντας να προσδιορίσουμε το μάθημα της Γεωμετρίας που διδάσκεται σήμερα στην Ελληνική δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Κυρίαρχη θέση έχει φυσικά η Ευκλείδεια Γεωμετρία, που διδάσκεται ως μάθημα γενικής παιδείας σε όλους τους μαθητές της Α΄ και Β΄ Λυκείου, ενώ ακολουθεί η Διανυσματική και Αναλυτική Γεωμετρία για τους μαθητές της Β΄ Λυκείου που επιλέγουν τη Θετική ή Τεχνολογική Κατεύθυνση. Δεν είναι άσκοπο να τονίσουμε επίσης ότι ένα μεγάλο μέρος του μαθήματος της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο (ιδιαίτερα στην Γ΄ τάξη) έχει σχεδιαστεί – σύμφωνα με τα προγράμματα σπουδών που ισχύουν από το 2007 – ως προπαιδευτικό υλικό για τη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.

Πριν ασχοληθούμε με τα προβλήματα της διδασκαλίας και μάθησης της Γεωμετρίας, που είναι γενικά και αποτελούν αντικείμενο έρευνας στη Διδακτική των Μαθηματικών διεθνώς, θεωρούμε σκόπιμο να προβάλλουμε την μεγάλη υποβάθμιση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στη Β΄ Λυκείου. Το πρόβλημα αυτό, ιδιαίτερα οικείο στους διδάσκοντες, δεν έχει μελετηθεί επαρκώς, με αποτέλεσμα να παραμένουν σχετικώς άγνωστες τόσο η φύση όσο και οι συνέπειές του. Η ιδιαιτερότητα του προβλήματος ξεκινά από το γεγονός ότι στην τάξη αυτή διδάσκονται τρία διαφορετικά είδη Γεωμετρίας:

● Ευκλείδεια Γεωμετρία με σχεδόν αποκλειστική έμφαση στις μετρικές ιδιότητες των σχημάτων.

● Διανυσματική Γεωμετρία, που περιλαμβάνει διανυσματικό λογισμό και αναλυτική μελέτη των διανυσμάτων με τη βοήθεια συντεταγμένων.

● Αναλυτική Γεωμετρία που περιλαμβάνει μελέτη των αλγεβρικών εξισώσεων βασικών γεωμετρικών σχημάτων.

Το γεγονός αυτό και οι επερχόμενες εξετάσεις Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου, στην ύλη των οποίων γίνεται άμεση χρήση στοιχείων Διανυσματικής και Αναλυτικής Γεωμετρίας, στρέφουν το ενδιαφέρον διδασκόντων και διδασκομένων προς τις δυο τελευταίες,

συμβάλλοντας ευθέως στην υποβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Λαμβάνοντας υπόψη τα προηγούμενα, αλλά και τις ουσιαστικές δυσκολίες που οφείλονται στην ταυτόχρονη διδασκαλία και μάθηση τριών διαφορετικών τύπων γεωμετρικής γνώσης, θα μπορούσαμε βάσιμα να ισχυριστούμε ότι το υποτιθέμενο διετές μάθημα Ευκλείδειας Γεωμετρίας διδάσκεται ουσιαστικά μόνο ένα έτος, δηλαδή στην Α΄ Λυκείου.

Το διδακτικό πρόβλημα που αναδεικνύουν οι προηγούμενες παρατηρήσεις γίνεται περισσότερο εμφανές από μια σύγκριση με το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά την εποχή της μεγάλης ακμής του (που εκτείνεται χοντρικά από την προπολεμική περίοδο μέχρι τη μεταπολίτευση). Την εποχή εκείνη η διδασκαλία του μαθήματος είχε ένα εύρος τριών ή τεσσάρων ετών (από την Γ΄ μέχρι την ΣΤ΄ τάξη του τότε 6τάξιου Γυμνασίου) και επεκτείνονταν σε ανάλογη έκταση διδακτέας ύλης (επιπεδομετρίας και στερεομετρίας), η οποία εξετάζονταν αυτοτελώς στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι. Τα στοιχεία αυτά έκαναν τότε δυνατή μια διδακτική προσέγγιση που συνδύαζε την εμβάθυνση με την ανάπτυξη ουσιαστικής μεθοδολογίας επίλυσης των γεωμετρικών προβλημάτων. Είναι χαρακτηριστικό ότι ενώ από το 1940 μέχρι το 1968 κυκλοφόρησαν δύο μόνο επίσημα διδακτικά βιβλία Ευκλείδειας Γεωμετρίας,[1] το ίδιο χρονικό διάστημα εκδόθηκαν πολυάριθμα και ογκώδη βιβλία, ειδικές μονογραφίες και συλλογές ασκήσεων που είχαν ως αναγνωστικό κοινό τους διαγωνιζόμενους στις εισαγωγικές εξετάσεις. Η κατάσταση αυτή άλλαξε άρδην μετά το 1976, όταν η δευτεροβάθμια εκπαίδευση χωρίστηκε σε Γυμνάσιο – Λύκειο και καθιερώθηκε η διδασκαλία της Αναλυτικής Γεωμετρίας στην Γ΄ Λυκείου, ενώ η διδασκαλία της Ευκλείδειας περιορίστηκε στην Α΄ και Β΄ τάξη χωρίς να συνδέεται άμεσα με τις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι.

Από τότε μέχρι σήμερα έχουν γίνει αλλεπάλληλες προσπάθειες για να διαμορφωθεί και διατηρηθεί ένα διετές πρόγραμμα σπουδών Ευκλείδειας Γεωμετρίας, που απευθύνεται σε όλους τους μαθητές των δύο πρώτων λυκειακών τάξεων. Οι προσπάθειες αυτές αποτυπώνονται μερικώς στον επόμενο κατάλογο:

Επίσημα διδακτικά βιβλία για το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που εκδόθηκαν από το 1975 μέχρι το 2001

[1] Χ. Παπανικολάου: *Ευκλείδειος Γεωμετρία Γ΄ Γυμνασίου και Δ΄, Ε΄ ΣΤ΄ Γυμνασίου Θεωρητικής Κατευθύνσεως*. Ο.Ε.Δ.Β., 1975.

Την περίοδο 1979–1986 χρησιμοποιήθηκε μόνο στη Β΄ Λυκείου.

[2] Σ. Κανέλλος: *Ευκλείδειος Γεωμετρία Δ΄, Ε΄ ΣΤ΄ Γυμνασίου Θετικής Κατευθύνσεως*. Ο.Ε.Δ.Β., 1975

---

[1] Χ. Μπαρμπαστάθη: *Θεωρητική Γεωμετρία δια την Δ΄, Ε, και ΣΤ΄ τάξιν των Γυμνασίων*. Έκδοση Α΄, Ο.Ε.Σ.Β., 1940.

Ν. Νικολάου: *Θεωρητική Γεωμετρία δια τας ανωτέρας τάξεις των Γυμνασίων*. Έκδοση Α΄, Ο.Ε.Σ.Β., 1950.

[3] Δ. Παπαμιχαήλ & Α. Σκιαδάς: *Θεωρητική Γεωμετρία. Τεύχος 1ο, Γ΄ Γυμνασίου*. Ο.Ε.Δ.Β., 1977.
Την περίοδο 1979–1990 χρησιμοποιήθηκε στην Α΄ Λυκείου.

[4] Γ. Βαβάλιαρος, Ε. Δαμίγος & Ν. Κουσέρας : *Ευκλείδειος Γεωμετρία Β΄ Λυκείου. Ασκήσεις και λύσεις των ασκήσεων*. Ο.Ε.Δ.Β., 1983.
Την περίοδο 1979–1986 χρησιμοποιήθηκε ως συλλογή ασκήσεων για το βιβλίο του Χ. Παπανικολάου.

[5] Ν. Βαρουχάκης, Δ. Παπαμιχαήλ, Α. Αλιμπινίσης & Δ. Κοντογιάννης: *Θεωρητική Γεωμετρία Β΄ Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., 1986.

[6] Α. Αλιμπινίσης, Γ. Δημάκος, Θ. Εξαρχάκος, Δ. Κοντογιάννης & Γ. Τασσόπουλος: *Θεωρητική Γεωμετρία Α΄ Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., 1990.

[7] Α. Αλιμπινίσης, Γ. Δημάκος, Π. Δρακόπουλος, Α. Κυριαζής & Γ. Τασσόπουλος: *Θεωρητική Γεωμετρία Β΄ Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., 1991.

[8] Γ. Θωμαΐδης, Θ. Ξένος, Γ. Παντελίδης, Α. Πούλος & Γ. Στάμου: *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., 1999.

[9] Γ. Θωμαΐδης, Θ. Ξένος, Γ. Παντελίδης, Α. Πούλος & Γ. Στάμου: *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Βιβλίο του Καθηγητή*. Ο.Ε.Δ.Β., 1999.

[10] Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης & Π. Σίδερης: *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., 2001.

[11] Η. Αργυρόπουλος, Π. Βλάμος, Γ. Κατσούλης, Σ. Μαρκάτης & Π. Σίδερης: *Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Ενιαίου Λυκείου. Βιβλίο του Καθηγητή*, 2001. [2]

Η αναζήτηση του "ιδανικού" προγράμματος σπουδών και διδακτικού βιβλίου Ευκλείδειας Γεωμετρίας από το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο όλα αυτά τα χρόνια, έχει αφήσει στο περιθώριο ορισμένα άλλα ουσιώδη και διαχρονικά προβλήματα που συνδέονται άμεσα με την πολύπλευρη υποβάθμιση του μαθήματος. Ήδη αναφέραμε προηγουμένως τους λόγους για τους οποίους η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο έχει ουσιαστικά συρρικνωθεί σε ένα έτος. Ένα άλλο πολύ σημαντικό πρόβλημα συνδέεται με την επίτευξη των στόχων της διδασκαλίας.

Σε όλα τα προγράμματα σπουδών που δημοσιεύτηκαν τις τελευταίες δεκαετίες δηλώνεται με απόλυτη σαφήνεια ότι ένας από τους κεντρικούς στόχους της διδασκαλίας των Μαθηματικών στο Λύκειο είναι "Να μυήσει και να εξοικειώσει το μαθητή στη διαδικασία της μαθηματικής απόδειξης και να του αναπτύξει μαθηματική σκέψη". Στο πρόσφατο

[2] Είναι χαρακτηριστικό ότι τα βιβλία [1] – [7] γράφτηκαν με τη διαδικασία της απευθείας ανάθεσης, ενώ η δημοσίευση των αντίστοιχων προγραμμάτων σπουδών συνήθως γινόταν εκ των υστέρων. Τα ζεύγη [8] – [9] και [10] – [11] γράφτηκαν ύστερα από διαδοχικούς διαγωνισμούς, με βάση πρόγραμμα σπουδών που υπήρξε αντικείμενο μακροχρόνιου προβληματισμού και σχεδιασμού στο Παιδαγωγικό Ινστιτούτο την περίοδο 1995–1997. Για το παρασκήνιο της αντικατάστασης του [8] – [9] από το [10] – [11] βλ. το κείμενο των συγγραφέων: Η επαναξιολόγηση και η επιλογή του διδακτικού βιβλίου «Ευκλείδειας Γεωμετρίας» (Ο εκφυλισμός ενός ανοικτού διαγωνισμού σε απευθείας ανάθεση). *Σύγχρονη Εκπαίδευση* τεύχος 119, σσ.16–18 (2001) και *Εκπαιδευτικοί Προβληματισμοί* τεύχος 9, σσ.45–46 (2001). Το τελευταίο είναι διαθέσιμο στο http://www.ziti.gr/mag.html

πρόγραμμα σπουδών της Α΄ Λυκείου (2011), ο σκοπός αυτός διατυπώνεται πιο εξειδικευμένα για τη Γεωμετρία ως εξής:

> Η ενότητα «Γεωμετρία» αποτελεί την εισαγωγή των μαθητών στη Θεωρητική Γεωμετρία, η οποία είναι το κατεξοχήν πεδίο που μπορεί να μεταφέρει στους μαθητές την ενιαία δομή και τη συνοχή των Μαθηματικών. Μέσα από την αξιωματική της θεμελίωση, τις προτάσεις και τα θεωρήματα που αποδεικνύονται με χρήση προηγούμενων αποτελεσμάτων, η Θεωρητική Γεωμετρία μπορεί να βοηθήσει τους μαθητές να αποκτήσουν μια αίσθηση της οικοδόμησης μιας μαθηματικής θεωρίας καθώς και της έννοιας της απόδειξης στα Μαθηματικά. Παράλληλα μπορεί να τους βοηθήσει να αναπτύξουν ικανότητες εύρεσης αποδεικτικών διαδικασιών στην επίλυση προβλημάτων. Στο πλαίσιο της Θεωρητικής Γεωμετρίας οι μαθητές αναγνωρίζουν το ρόλο του σχήματος στη Γεωμετρία ως στοιχείο άρρηκτα συνδεδεμένο με τη γεωμετρική σκέψη. (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, σ.16674)

Στο προηγούμενο απόσπασμα συνοψίζονται ορισμένα από τα βασικά επιστημολογικά και διδακτικά χαρακτηριστικά της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που την έχουν αναδείξει, εδώ και αιώνες, ως προνομιακό πεδίο για την απόκτηση ουσιαστικής μαθηματικής παιδείας και εισαγωγής στον επιστημονικό τρόπο σκέψης. Η θέση όμως του μαθήματος έχει κλονιστεί σοβαρά τα τελευταία 50 χρόνια, αφενός λόγω των εξελίξεων στα ίδια τα Μαθηματικά και αφετέρου λόγω της βελτίωσης των γνώσεων μας για τις συνθήκες μάθησης των μαθηματικών εννοιών.

Σχετικά με το πρώτο ζήτημα, είναι πολύ γνωστό ότι η μεγάλη μεταρρυθμιστική κίνηση των λεγόμενων "Νέων Μαθηματικών" που προωθήθηκε διεθνώς στις αρχές της δεκαετίας του 1960, με την προτροπή και καθοδήγηση επιφανών μαθηματικών, οδήγησε στην ουσιαστική κατάργηση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στις περισσότερες χώρες. Παρουσιάζει ενδιαφέρον να δούμε με ποιο τρόπο έθεσε το ζήτημα της μεταρρύθμισης στον τομέα της Γεωμετρίας ο σπουδαίος Γάλλος μαθηματικός Jean Dieudonne, ένα από τα ιδρυτικά μέλη της ομάδας Bourbaki:

> … αν θα έπρεπε να συνοψίσω ολόκληρο το πρόγραμμα που έχω κατά νου σε ένα σύνθημα, αυτό θα ήταν: *Ο Ευκλείδης πρέπει να φύγει!*
>
> Αυτή η δήλωση ίσως σοκάρει μερικούς από εσάς, αλλά θα ήθελα να σας δείξω με κάποια λεπτομέρεια τα ισχυρά επιχειρήματα υπέρ αυτής. Αρχικά ας αναφέρω ότι τρέφω βαθύτατο θαυμασμό για τα επιτεύγματα των Ελλήνων στα Μαθηματικά: Θεωρώ τη δική τους δημιουργία της γεωμετρίας ίσως ένα από τα πιο εντυπωσιακά διανοητικά επιτεύγματα που πραγματοποίησε η ανθρωπότητα. Στους Έλληνες οφείλεται ότι μπορέσαμε να κτίσουμε το πανύψηλο οικοδόμημα της σύγχρονης επιστήμης.
>
> Αλλά στην πορεία αυτή, οι βασικές έννοιες της ίδιας της γεωμετρίας έχουν γίνει αντικείμενο εξονυχιστικής επεξεργασίας, ιδιαίτερα από τα μέσα του 19^{ου} αιώνα και μετά. Αυτή μας έδωσε τη δυνατότητα να αναδιοργανώσουμε το Ευκλείδειο *corpus*, τοποθετώντας το πάνω σε απλά και ισχυρά θεμέλια, και να επανεκτιμήσουμε τη σπουδαιότητά του όσον αφορά τα σύγχρονα Μαθηματικά –

διαχωρίζοντας ό,τι είναι θεμελιώδες από ένα χαοτικό σωρό αποτελεσμάτων χωρίς καμιά σημασία εκτός από το να είναι σκόρπια υπολείμματα άκομψων μεθόδων ή μιας παρωχημένης προσέγγισης.

Το αποτέλεσμα ίσως είναι κάπως απροσδόκητο. Ας υποθέσουμε, για χάρη της συζήτησης, ότι κάποιος πρόκειται να διδάξει Ευκλείδεια επιπεδομετρία σε ώριμα μυαλά από έναν άλλο κόσμο που ουδέποτε είχαν ακούσει γι' αυτή, ή έχοντας μόνο υπόψη τις πιθανές εφαρμογές της στη σύγχρονη έρευνα. Τότε ολόκληρο το μάθημα θα μπορούσε, νομίζω, να διεξαχθεί σε δύο ή τρεις ώρες – μία για την περιγραφή του αξιωματικού συστήματος, μία για τις χρήσιμες συνέπειες και πιθανώς μία τρίτη για λίγες κάπως ενδιαφέρουσες ασκήσεις.

Οτιδήποτε άλλο που καλύπτει σήμερα τόμους "στοιχειώδους γεωμετρίας", – και εννοώ, για παράδειγμα, *οτιδήποτε* αφορά τα τρίγωνα (είναι απολύτως εφικτό και επιθυμητό να περιγραφεί ολόκληρη η θεωρία χωρίς καν να ορίσουμε το τρίγωνο!), σχεδόν οτιδήποτε αφορά την αντιστροφή, τα συστήματα κύκλων, τις κωνικές, κλπ. – έχει τόση σχέση με αυτό που κάνουν σήμερα οι μαθηματικοί (των καθαρών και εφαρμοσμένων) όση και τα μαγικά τετράγωνα ή τα σκακιστικά προβλήματα! (Dieudonne, 1961, σσ.35–36)

Οι παραπάνω ακραίες θέσεις και προτάσεις του Dieudonne (δηλαδή η αντικατάσταση, με αμιγώς επιστημολογικά κριτήρια, της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τη Γραμμική Άλγεβρα) αντανακλούν το γενικότερο κλίμα εκείνης της μεταρρύθμισης, η οποία σήμερα θεωρείται αποτυχημένη αφού βέβαια προκάλεσε μεγάλες ανακατατάξεις στο περιεχόμενο των σχολικών Μαθηματικών.

Το δεύτερο ζήτημα που έχει κλονίσει τη θέση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο σχολικό πρόγραμμα συνδέεται με την ανάπτυξη ορισμένων θεωρητικών εργαλείων της Διδακτικής των Μαθηματικών και τη διεξαγωγή πολλών εμπειρικών ερευνών. Οι έρευνες αυτές έχουν δείξει ότι η μεγάλη πλειοψηφία των σημερινών μαθητών που αρχίζουν να διδάσκονται την Ευκλείδεια Γεωμετρία σε ηλικία 15–16 ετών, δεν διαθέτει τα γνωστικά εφόδια που απαιτούνται για την κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και της αποδεικτικής διαδικασίας. Το επόμενο απόσπασμα από μια εργασία ενός επιφανούς εκπροσώπου της Διδακτικής των Μαθηματικών είναι χαρακτηριστικό:

Παραδοσιακά, η εισαγωγή της απόδειξης στο σχολείο γινόταν μέσω της Ευκλείδειας γεωμετρίας. Αυτή όμως εξαφανίστηκε από το αναλυτικό πρόγραμμα στη Βρετανία ταυτόχρονα με την άφιξη των νέων μαθηματικών. Τα Standards του NCTM υποδεικνύουν μια αλλαγή της έμφασης στις Ηνωμένες Πολιτείες, με σύσταση να δίνεται μεγαλύτερη προσοχή

● στην ανάπτυξη μικρών ακολουθιών θεωρημάτων

● στα παραγωγικά επιχειρήματα που εκφράζονται προφορικά και στη μορφή πρότασης ή παραγράφου και μικρότερη προσοχή

● στην Ευκλείδεια γεωμετρία ως ένα πλήρες αξιωματικό σύστημα

● στις δίστηλες αποδείξεις.

> Δεν είναι δύσκολο να βρεθούν οι λόγοι για τα παραπάνω. Η Senk (1985) έδειξε ότι μόνο το 30% των μαθητών που παρακολουθούν μια πλήρη ετήσια διδασκαλία της γεωμετρίας επιτυγχάνουν ένα ποσοστό 75% επιτυχίας σε μια επιλογή έξι γεωμετρικών προβλημάτων απόδειξης.
>
> Η Ευκλείδεια απόδειξη είναι όχι μόνο δύσκολη, αλλά αποτυγχάνει να ικανοποιήσει τα κριτήρια της σύγχρονης μαθηματικής αυστηρότητας επειδή εξαρτάται από λεπτές διαισθητικές ιδέες για το χώρο. Όπως το έθεσε πιο συνοπτικά ο Hilbert, "Πρέπει κάποιος να είναι πάντοτε σε θέση – αντί για σημεία, ευθείες και επίπεδα – να λέει τραπέζια, καρέκλες και κύπελλα μπύρας" (Encyclopaedia Britannica, 1974, p.1101).
>
> Η απόδειξη όμως με τραπέζια, καρέκλες και κύπελλα μπύρας απαιτεί ένα μεγάλο βαθμό επιτήδευσης που δεν είναι διαθέσιμη στους νεώτερους σπουδαστές. Η μαθηματική απόδειξη ως μία ανθρώπινη δραστηριότητα απαιτεί όχι μόνο κατανόηση του ορισμού των εννοιών και των λογικών διαδικασιών, αλλά επίσης διαίσθηση για το πώς και γιατί δουλεύει. (Tall, 1992, σ.506)

Οι επισημάνεις αυτές του David Tall αποσαφηνίζουν ένα λεπτό και πολύ ουσιαστικό ζήτημα, ίσως τον κύριο λόγο για τον οποίο οι χώρες που είχαν καταργήσει το μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας δεν το επανέφεραν μετά την κατάρρευση της μεταρρύθμισης των "Νέων Μαθηματικών". Στην Ελλάδα, στην οποία ουδέποτε καταργήθηκε η διδασκαλία του μαθήματος, η σημερινή υποβάθμιση αποδίδεται συνήθως στη χρονική συρρίκνωση της διδασκαλίας και κυρίως στο γεγονός ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία δεν αποτελεί εξεταζόμενο μάθημα στις εισαγωγικές εξετάσεις των Α.Ε.Ι. Επιχειρούμε δηλαδή να ερμηνεύσουμε ένα πρόβλημα του παρόντος μένοντας προσκολλημένοι σε ένα "ένδοξο" παρελθόν που έχει παρέλθει ανεπιστρεπτί. Οι συνθήκες της διδασκαλίας και μάθησης τα τελευταία 40 χρόνια έχουν υποστεί δραματικές εξελίξεις και μόνο μια εμπεριστατωμένη ανάλυση των αλλαγών θα μπορούμε να μας δώσει δυνατότητα αντιμετώπισης των πολλαπλών προβλημάτων που συνδέονται με την επίτευξη των φιλόδοξων σκοπών του μαθήματος, όπως αυτοί περιγράφονται στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών.

2. Προβλήματα διδασκαλίας και μάθησης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας

Μια πρώτη σημαντική εξέλιξη αποτελεί το γεγονός ότι τα τελευταία χρόνια έχουν διεξαχθεί και στην Ελλάδα αρκετές εμπειρικές έρευνες, που μας παρέχουν μια αξιόπιστη εικόνα για το γνωστικό επίπεδο των αποφοίτων του Γυμνασίου, οι οποίοι καλούνται να μυηθούν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία. Λαμβάνοντας υπόψη όλα τα δημοσιευμένα στοιχεία, μπορούμε να υποστηρίξουμε ότι οι έρευνες αυτές επιβεβαιώνουν – και μάλιστα προς το χειρότερο – την απογοητευτική εικόνα που περιγράφει ο Tall στο προηγούμενο απόσπασμα. Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών εισέρχεται στο Λύκειο χωρίς να διαθέτει το γνωστικό υπόβαθρο που είναι απαραίτητο για την κατανόηση της θεωρητικής Γεωμετρίας, ενώ ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας, μόνο το ένα τέταρτο περίπου των

μαθητών είναι σε θέση να διατυπώσει ορθές αποδείξεις απλών γεωμετρικών προτάσεων (Αργύρη, 2010· Δημητριάδου, 2004· 2005· Ζάχος, 2000· Θωμαΐδης, 1998· 2000· Τζίφας, 2005).

Το γεγονός αυτό φέρνει άμεσα στο προσκήνιο το πρώτο μεγάλο πρόβλημα που έχουμε να αντιμετωπίσουμε και το οποίο διατυπώνουμε ως εξής:

2.1. Η ασυνέχεια ανάμεσα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.

Η οργάνωση του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας κατά το πρότυπο ανάπτυξης ενός θεωρητικού μαθηματικού συστήματος, οδηγεί σε μια διδασκαλία από "μηδενική βάση" που εκμηδενίζει την αξία των προηγούμενων γνώσεων των μαθητών. Κατά τη διάρκεια του καθοδηγητικού έργου στα Λύκεια έχουμε διαπιστώσει επανειλημμένα αυτό το γεγονός (που επιβεβαιώνεται και από τις έρευνες), το οποίο οι διδάσκοντες αιτιολογούν με το επιχείρημα ότι οι γυμνασιακές γνώσεις των μαθητών είναι ανύπαρκτες ή ασύμβατες με την αξιωματική θεμελίωση και αυστηρότητα που απαιτεί η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Το διδακτικό αδιέξοδο αυτής της πρακτικής μπορεί να διαπιστωθεί με ένα απλό παράδειγμα: Βασικές προϋποθέσεις για την απόδειξη μιας γεωμετρικής πρότασης (θεωρήματος ή άσκησης) είναι η κατανόηση της εκφώνησης, η διάκριση δεδομένων και ζητουμένων, και η κατασκευή ενός σχήματος. Αυτά τα τρία στοιχεία (υποτίθεται ότι) έχουν συζητηθεί επαρκώς στο Γυμνάσιο και αποτελούν το κύριο προπαιδευτικό υλικό πάνω στο οποίο θα στηριχτεί η διδασκαλία στην Α΄ Λυκείου, ώστε να μυηθούν οι μαθητές στο ρόλο των βοηθητικών γραμμών και στους λεπτούς λογικούς χειρισμούς που απαιτεί η αποδεικτική διαδικασία. Αν, αντίθετα, η διδασκαλία στην Α΄ Λυκείου πρέπει να οικοδομήσει εκ του μηδενός <u>και</u> το προπαιδευτικό υλικό <u>και</u> την αποδεικτική διαδικασία, τότε το αδιέξοδο είναι αναπόφευκτο.

Το εύλογο επιχείρημα που προβάλλεται είναι ότι οι γεωμετρικές γνώσεις των μαθητών από το Γυμνάσιο έχουν έναν εμπειρικό χαρακτήρα που δεν είναι συμβατός με τη θεωρητική δομή της Ευκλείδειας Γεωμετρίας· αυτό το ζήτημα φέρνει στο προσκήνιο ένα άλλο σημαντικό διδακτικό πρόβλημα, το οποίο διατυπώνουμε ως εξής:

2.2. Ο μονομερής θεωρητικός προσανατολισμός της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.

Η ουσιαστική περιθωριοποίηση των προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών και γεωμετρικών τόπων από την τρέχουσα διδακτική πρακτική, έχει στερήσει από τη διδασκαλία ένα ουσιαστικό πεδίο εφαρμογών που αποδίδουν νόημα και ενδιαφέρον στη γεωμετρική θεωρία. Η έννοια της γεωμετρικής κατασκευής αποτελεί κυρίαρχο

επιστημολογικό χαρακτηριστικό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας και όλη η δομή των *Στοιχείων* είναι διαποτισμένη από αυτήν. Στη διατύπωση των αξιωμάτων ο Ευκλείδης ουσιαστικά "αιτείται" τη δυνατότητα κατασκευής ορισμένων βασικών γεωμετρικών σχημάτων, η χρήση βοηθητικών γραμμών στις διάφορες αποδείξεις γίνεται εφόσον έχει εξασφαλιστεί προηγουμένως η δυνατότητα κατασκευής τους, ενώ η έκθεση της θεωρίας στα διάφορα βιβλία των *Στοιχείων* συγκλίνει προς την επίτευξη κάποιας σημαντικής κατασκευής (με αποκορύφωμα την κατασκευή των πέντε κανονικών πολυέδρων που ολοκληρώνει τη μεγαλειώδη Ευκλείδεια σύνθεση). Από διδακτική άποψη υπάρχει βέβαια το σταθερό επιχείρημα της έλλειψης του απαραίτητου χρόνου που θα επιτρέψει να δημιουργηθεί η αναγκαία θεωρητική υποδομή και η εμπειρία, πάνω στις οποίες θα στηριχτεί η διδασκαλία των γεωμετρικών κατασκευών. Αυτό το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί πολύ εύκολα με την απολύτως ρεαλιστική πρόταση που συνοψίζεται στη φράση: "μείωση της θεωρίας και έμφαση στις κατασκευές". Ένα πιο ισχυρό επιχείρημα είναι ότι οι γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη αποτελούν θεωρητικό ζήτημα που υπερβαίνει τις γνωστικές δυνατότητες των σημερινών μαθητών του Λυκείου. Αν και για το επιχείρημα αυτό θα μπορούσαν να διατυπωθούν ορισμένες εύλογες αντιρρήσεις (Πούλος, 2009), είναι γεγονός ότι η δυσκολία του εγχειρήματος δεν μπορεί να υποβαθμιστεί. Σε κάθε περίπτωση, παραμένει ανοικτό διδακτικό πρόβλημα ότι η Ευκλείδεια Γεωμετρία αναπτύσσεται στο Λύκειο ως ένα θεωρητικό σύστημα με αυτοτελές μαθηματικό ενδιαφέρον, χωρίς τα κίνητρα μάθησης που προσφέρει ένα σαφές πεδίο εφαρμογών. Αν αυτό το πεδίο δεν μπορεί να είναι εξίσου θεωρητικό (όπως οι γεωμετρικές κατασκευές), τότε χρειάζεται να εμπλουτίσουμε τη διδασκαλία με εφαρμογές των γεωμετρικών προτάσεων σε πιο πρακτικά ζητήματα. Αυτό είναι ένα ζήτημα με πολύ ενδιαφέρουσες ιστορικές, επιστημολογικές και διδακτικές προεκτάσεις, μία των οποίων θα συζητήσουμε στην επόμενη ενότητα.

2.3. Η έλλειψη διαύλων επικοινωνίας ανάμεσα σε Ευκλείδεια Γεωμετρία και Άλγεβρα που διδάσκονται ως χωριστοί κλάδοι στην Α΄ και Β΄ Λυκείου.

Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο (και ιδιαίτερα στην Α΄ τάξη) επιχειρεί παραδοσιακά να διατηρήσει μια "καθαρότητα", με την έννοια κυρίως ότι αποφεύγει να χρησιμοποιήσει αλγεβρικά ή τριγωνομετρικά εργαλεία στις αποδείξεις των γεωμετρικών προτάσεων, αλλά και την απουσία εφαρμογών σε άλλους κλάδους ή στην καθημερινή ζωή. Είναι εδώ εμφανής η διαφορά με τη διδασκαλία της Άλγεβρας, στην οποία γίνεται συχνή χρήση βασικών γεωμετρικών γνώσεων, τόσο την εποπτική αιτιολόγηση ή ερμηνεία διαφόρων προτάσεων όσο και για τη δημιουργία ελκυστικών

αλγεβρικών προβλημάτων που αφορούν την επίλυση εξισώσεων ή τη μελέτη συναρτήσεων. Υποστηρίζουμε ότι η επιδίωξη της "καθαρότητας" στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, συνδυαζόμενη και με τις απαιτήσεις εσωτερικής συνέπειας και λογικής αλληλουχίας των προτάσεων,[3] έχει σημαντικό μερίδιο στην αποκοπή του μαθήματος από τον πραγματικό κόσμο και τις εμπειρίες των μαθητών. Η πρότασή μας για την αντιμετώπιση αυτού του προβλήματος, συνίσταται σε μια ουσιαστική σύζευξη Ευκλείδειας Γεωμετρίας και Άλγεβρας που θα έχει διπλό στόχο. Με την ενσωμάτωση στη διδασκαλία της Γεωμετρίας ορισμένων κατάλληλων εφαρμογών μπορούν να αναδειχθούν, αφενός οι δυνατότητες των γεωμετρικών προτάσεων ως εργαλείων διερεύνησης και ερμηνείας και αφετέρου να κατανοηθούν βαθύτερα ορισμένες λεπτές αλγεβρικές έννοιες, όπως αυτή του άρρητου αριθμού και των δεκαδικών προσεγγίσεων του. Οι εφαρμογές αυτού του είδους αφορούν κυρίως προβλήματα μέτρησης γεωμετρικών σχημάτων, επιδέχονται πολλαπλές προσεγγίσεις και λύσεις στις οποίες οι μαθητές μπορούν να αξιοποιήσουν ένα ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών και μεθόδων. Η πρόθεση δεν είναι να διαταραχθεί η θεωρητική ανάπτυξη της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αλλά να ενσωματωθούν σε ορισμένα κομβικά σημεία της ύλης προβλήματα και εφαρμογές που δείχνουν ότι αυτή η ανάπτυξη δεν αποτελεί αυτοσκοπό. Στη μελέτη προβλημάτων αυτού του είδους μπορεί επίσης να παίξει καθοριστικό ρόλο η χρήση των ΤΠΕ, και ιδιαίτερα των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας τα οποία αποτελούν μια σύγχρονη εξέλιξη που δημιουργεί νέα δεδομένα στη διδασκαλία του μαθήματος. Η αξιοποίησή τους όμως, παρά τις προσπάθειες που καταβάλλονται, αντιμετωπίζει εγγενείς και μεγάλες δυσχέρειες τις οποίες επιχειρούμε να συνοψίσουμε στον τίτλο της επόμενης ενότητας.

2.4. Η ασυμβατότητα της ύλης και των στόχων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την ουσιαστική χρήση των ΤΠΕ στη διδασκαλία της.

Τα τελευταία χρόνια έχει δημοσιευθεί ένας μεγάλος αριθμός εργασιών και ερευνών που ασχολούνται με διάφορες όψεις της ενσωμάτωσης των ΤΠΕ (και ιδιαίτερα των λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας) στη διδασκαλία της Γεωμετρίας. Παρά το γεγονός ότι έχουν διαφορετικές θεωρητικές αφετηρίες για τη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών, και αναφέρονται σε διαφορετικές εκπαιδευτικές βαθμίδες, οι εργασίες αυτές προβάλουν με έμφαση το χαρακτηριστικό γνώρισμα της αξιοποίησης των ΤΠΕ στη διδασκαλία. Δηλαδή υιοθετούν μια διδακτική προσέγγιση που ενσωματώνει όλες εκείνες

[3] Οι οποίες έχουν ως συνέπεια να μη μπορούν οι μαθητές να χρησιμοποιήσουν επί μακρό χρονικό διάστημα, απλές και εδραιωμένες από το Γυμνάσιο γεωμετρικές γνώσεις, όπως π.χ. το σταθερό άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου της Ευκλείδειας γεωμετρίας..

τις διαδικασίες διερεύνησης, διατύπωσης εικασιών, ελέγχου, απόρριψης και γενίκευσης που χαρακτηρίζουν τη μαθηματική ερευνητική δραστηριότητα.[4] Αυτή η "γενετική" προσέγγιση όμως βρίσκεται ακριβώς στον αντίποδα της παραδοσιακής διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, η οποία ακολουθώντας τα βήματα της αξιωματικής θεμελίωσης και λογικής ανάπτυξης μιας μαθηματικής θεωρίας, διαγράφει κάθε ίχνος της ερευνητικής δραστηριότητας που προηγήθηκε. Ανεξάρτητα από την κριτική που έχει δεχθεί αυτή η μέθοδος διδασκαλίας (ιδιαίτερα μετά την κατάρρευση της μεταρρύθμισης των "Νέων Μαθηματικών"), η αξιωματική θεμελίωση αποτελεί σήμερα κυρίαρχο υπόδειγμα παρουσίασης των Μαθηματικών και το ερώτημα που τίθεται είναι αν θα πρέπει να αποτελεί συστατικό της μαθηματικής παιδείας που παρέχει η δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Εκείνο όμως που γίνεται άμεσα φανερό από τα παραπάνω είναι ότι υπάρχει πλήρης ασυμβατότητα ανάμεσα στους στόχους του μαθήματος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, όπως αυτοί αποτυπώνονται στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών και διδακτικό βιβλίο, με τις γενετικές αρχές διδασκαλίας και μάθησης που υποστηρίζονται από τη χρήση των ΤΠΕ. Άρα για την ουσιαστική και αποτελεσματική ενσωμάτωση των ΤΠΕ στη διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας απαιτείται ριζική αναθεώρηση των προγραμμάτων σπουδών και των διδακτικών βιβλίων, τα οποία έχουν σχεδιαστεί σύμφωνα με το παραδοσιακό πρότυπο της αξιωματικής οργάνωσης μιας μαθηματικής θεωρίας. Αυτή η παρατήρηση δε σημαίνει ότι πρέπει να παραμεριστεί η χρήση των ΤΠΕ μέχρι να δημιουργηθούν τα νέα προγράμματα· θα πρέπει όμως να οργανωθεί με τέτοιο τρόπο ώστε να συμβαδίζει με την ύλη του διδακτικού βιβλίου και να εξυπηρετεί το βασικό σκοπό της διδασκαλίας που είναι η μύηση των μαθητών στην αποδεικτική διαδικασία. Η δυσκολία του εγχειρήματος έγκειται, μεταξύ άλλων, στην ανεπάρκεια του διδακτικού χρόνου που εμποδίζει εδώ και πολλά χρόνια την ολοκλήρωση της διδακτέας ύλης της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο. Αυτή η ανεπάρκεια συνιστά ένα άλλο μείζον πρόβλημα της διδασκαλίας το οποίο θα θίξουμε στην επόμενη και τελευταία ενότητα αυτής της εισήγησης.

2.5. Η ασυμβατότητα διδακτέας ύλης και διαθέσιμου διδακτικού χρόνου.

Η συρρίκνωση της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από τέσσερα έτη σε δύο, έχει προκαλέσει μια διαχρονική αδυναμία ολοκλήρωσης της ύλης, με αποκορύφωμα την ουσιαστική κατάργηση της στερεομετρίας. Η αδυναμία αυτή αφαιρεί επίσης από τους

[4] Αποτελεί ένα πολύ ενδιαφέρον θέμα για μελλοντική έρευνα αν οι διδασκαλίες με χρήση λογισμικών δυναμικής γεωμετρίας που περιγράφονται στις συγκεκριμένες εργασίες προωθούν πράγματι αυτές τις μαθηματικές δραστηριότητες, ή εξαντλούνται στη δημιουργία εντυπωσιακών γεωμετρικών σχημάτων που προκαλούν μία αμφιλεγόμενη "κινητοποίηση" του ενδιαφέροντος των μαθητών. Σε μια τέτοια περίπτωση η διδασκαλία των Μαθηματικών, και ιδιαίτερα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, αποκλίνει σοβαρά από τους διακηρυγμένους επίσημα στόχους της.

εκπαιδευτικούς οποιαδήποτε δυνατότητα διδακτικής παρέμβασης, ακόμη και όταν διαπιστώνουν την αδυναμία των περισσότερων μαθητών να ανταποκριθούν στιες υψηλές απαιτήσεις του μαθήματος. Επειδή προφανώς κάθε αίτημα για αύξηση των διδακτικών ωρών βρίσκεται εκτός πραγματικότητας, θα πρέπει να εξεταστούν πολύ σοβαρά ορισμένες εναλλακτικές προτάσεις για την αναδιοργάνωση της διδακτέας ύλης, ή ακόμη και προτάσεις που επιβάλουν ριζικές αλλαγές στις μεθόδους διδασκαλίας και την επίτευξη των στόχων του μαθήματος. Σ' αυτές περιλαμβάνονται κάποιες ενδιαφέρουσες απόπειρες μάχιμων εκπαιδευτικών, που έχουν εισηγηθεί σχέδια προγραμματισμού και οργάνωσης της διδασκαλίας αξιοποιώντας τις γεωμετρικές γνώσεις των μαθητών από το Γυμνάσιο και επιλεγμένες αποδείξεις θεωρητικών προτάσεων (Μακάριος & Κωνσταντινίδου, 2011). Μια άλλη επίσης πρόταση, που έχει υποστηριχθεί από διακεκριμένους μαθηματικούς και παιδαγωγούς, είναι να εγκαταλειφθεί η ιδέα της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας ως ένα αυτοτελές και ολοκληρωμένο αξιωματικό σύστημα, και να δοθεί έμφαση στη διδασκαλία ορισμένων θεωρητικών "νησίδων", δηλαδή γεωμετρικών προτάσεων που συνδέονται εννοιολογικά και οι μαθητές τις έχουν διδαχθεί στο Γυμνάσιο σε λιγότερο τυπικό επίπεδο. Τέτοιες "νησίδες" αποτελούν π.χ. οι ιδιότητες των παράλληλων ευθειών, των εγγεγραμμένων γωνιών κ.α. (Freudenthal, 1973, κεφάλαιο XVI· Howson & Wilson, 1986, σσ.60–61).

3. Μια σύντομη ανασκόπηση

Υπάρχουν ισχυροί παιδαγωγικοί, διδακτικοί και πολιτιστικοί λόγοι που συνηγορούν για τη διατήρηση ενός ανεξάρτητου μαθήματος Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο. Αλλά για να επιτύχει το μάθημα τους στόχους του και να αποκτήσει το αντίστοιχο κύρος, δεν αρκεί η αναζήτηση κάποιου "ιδανικού" (και ενδεχομένως ανέφικτου) προγράμματος σπουδών ή διδακτικού βιβλίου, όπως επί τρεις δεκαετίες επιχειρούσε το Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. Πρέπει πρωτίστως να αναζητηθούν ρεαλιστικές απαντήσεις στα προβλήματα που επισημάνθηκαν παραπάνω, τα οποία επαναλαμβάνουμε επιγραμματικά ώστε να αποτελέσουν τη βάση της σχετικής συζήτησης:

- Η ασυνέχεια ανάμεσα στη διδασκαλία της Γεωμετρίας στο Γυμνάσιο και το Λύκειο.
- Ο μονομερής θεωρητικός προσανατολισμός της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.

- Η έλλειψη διαύλων επικοινωνίας ανάμεσα σε Ευκλείδεια Γεωμετρία και Άλγεβρα που διδάσκονται ως χωριστοί κλάδοι στην Α΄ και Β΄ Λυκείου.
- Η ασυμβατότητα της ύλης και των στόχων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας με την ουσιαστική χρήση των ΤΠΕ στη διδασκαλία της.
- Η ασυμβατότητα διδακτέας ύλης και διαθέσιμου διδακτικού χρόνου.

Οι απαντήσεις στα προβλήματα αυτά θα καθορίσουν σε μεγάλο βαθμό τη δέσμη των προτάσεων που είναι αναγκαίες για τη δημιουργία ενός πραγματικά νέου και ρεαλιστικού προγράμματος σπουδών Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

(Παρατίθενται κατά χρονολογική σειρά)

J. Dieudonné: New Thinking in School Mathematics. In Organisation for European Economic Cooperation and Development [ed.] *New Thinking in School Mathematics*, pp.31–46. Paris, 1961.

H. Freudenthal: *Mathematics as an Educational Task*. Reidel, Dordrecht, 1973

S. Senk: How well do students write geometry proofs? *Mathematics Teacher* 78, pp.448–456, 1985.

G. Howson & B. Wilson [eds]: *School Mathematics in the 1990s*. ICMI Study Series. Cambridge University Press, Cambridge, 1986.

D. Tall: The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity and Proof. In D. Grouws (ed.), *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*, pp.495–511. National Council of Teachers of Mathematics & Macmillan, New York, 1992.

Ι. Θωμαΐδης: Μερικές όψεις της αποτυχίας στην κατανόηση βασικών εννοιών της Ευκλείδειας θεωρητικής Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [επιμ.] *Πρακτικά 1ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σσ.119–127. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης, Ρέθυμνο, 1998.

Ι. Θωμαΐδης: Η κατανόηση της αξιωματικής θεμελίωσης και η αποδεικτική ικανότητα των μαθητών στο μάθημα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [επιμ.] *Πρακτικά 2ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, σσ.127–136. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης, Ρέθυμνο, 2000.

Ι. Ζάχος: Αξιολόγηση του επιπέδου γεωμετρικής σκέψης van Hiele των μαθητών της Β΄ τάξης του Λυκείου. Στο Φ. Καλαβάσης & Μ. Μεϊμάρης [επιμ.] *Θέματα Διδακτικής*

Μαθηματικών IV: Αξιολόγηση και Διδασκαλία των Μαθηματικών, σσ.161–179. Πανεπιστήμιο Αιγαίου – Gutenberg, 2000.

Ε. Δημητριάδου: Η διδασκαλία της Γεωμετρίας: Μερικές απόψεις εκπαιδευτικών σχετικά με τα αναλυτικά προγράμματα και τα σχολικά βιβλία Γυμνασίου και Λυκείου. *Πρακτικά 21ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ.15–27. Ε.Μ.Ε., Τρίκαλα, 2004.

Ε. Δημητριάδου: Η αποτελεσματικότητα των μαθητών της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης σε στοιχειώδεις γεωμετρικές κατασκευές. Στο Μ. Κούρκουλος *et al* [επιμ.] *Πρακτικά 4ης Διημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*. Τόμος Ι, σσ.263–273. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης, Ρέθυμνο, 2005.

Ν. Τζίφας: Μια έρευνα για την αποτύπωση των επιπέδων γεωμετρικής σκέψης των Ελλήνων μαθητών/τριών σύμφωνα με τη θεωρία επιπέδων van Hiele. *Το φ* τεύχος 2, σσ.111–121, 2005.

Α. Πούλος: Επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών στην Α΄ τάξη του Λυκείου. Παρατηρήσεις και συμπεράσματα. *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, σσ.542–552. Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη, 2009.

Π. Αργύρη: *Οι πεποιθήσεις των μαθητών και των εκπαιδευτικών για την απόδειξη στη Γεωμετρία*. Διπλωματική Εργασία. στο Πρόγραμμα Μεταπτυχιακών Σπουδών "Διδακτική και Μεθοδολογία των Μαθηματικών". Πανεπιστήμιο Αθηνών, Τμήμα Μαθηματικών, 2010.

Θ. Μακάριος & Ο. Κωνσταντινίδου: Η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στο Λύκειο. Αδιέξοδο και υπέρβαση. *Πρακτικά 3ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, σσ.659–676. Ε.Μ.Ε., Παράρτημα Κ. Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 2011.

Υπουργείο Παιδείας, Δια Βίου Μάθησης & Θρησκευμάτων: *Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών Α΄ τάξης Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β΄ 1168, 8 Ιουνίου 2011.