ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ ΚΑΛΑΜΑΡΙ
1ο ΣΥΝΕΔΡΙΟ ΓΙΑ ΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΤΗ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑ ΤΟΥΣ

Πρακτικά

Επιμέλεια
Ιωάννης Σαράφης
Αθανάσιος Πέρδος
Νίκος Παλάζης

Περιεχόμενα

Πρόλογος

Μετά την πραγματοποίηση δέκα (10) Ημερίδων Μαθηματικών κατά την περίοδο 2011 - 2023, η Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί της Θεσσαλονίκης αξιοποιώντας τη σημαντική εμπειρία που αποκτήθηκε, προχωράει σε έναν επόμενο κύκλο σχετικών εκδηλώσεων. Η «Ημερίδα Μαθηματικών» μετασχηματίζεται σε «Συνέδριο για τα Μαθηματικά και τη Διδασκαλία τους».
Ο κύκλος ξεκινάει με το $1^{\text{ο}}$ Συνέδριο στις 30 Μαρτίου 2024 με θέμα:

Καινοτόμες προτάσεις για τη διδασκαλία των Μαθηματικών σε Δημοτικό, Γυμνάσιο και Λύκειο
(Νέα Προγράμματα Σπουδών – Διδακτικά Βιβλία – Εξετάσεις)

Στόχος του $1^{\text{ου}}$ Συνεδρίου είναι η ενημέρωση της εκπαιδευτικής κοινότητας για καινοτόμες διδακτικές προτάσεις στα νέα προγράμματα σπουδών. Οι εργασίες που παρουσιάζονται, αφορούν σε τμήματα της νέας ύλης των Μαθηματικών ώστε οι σύνεδροι να αποκομίσουν ιδέες για τη διδασκαλία τους.

Με εκτίμηση
Η οργανωτική επιτροπή

130 χρόνια
Καλαμαρί
ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

Επιτροπές

ΕΠΙΣΤΗΜΟΝΙΚΗ

- Ελευθερίου Πρόδρομος, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Νήσων Βορείου Αιγαίου.
- Ζαχαριάδης Θεοδόσης, Ομότιμος Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.
- Θωμαΐδης Γιάννης, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Δυτικής Θεσσαλονίκης & Κιλκίς (Συντονιστής της Επιστημονικής Επιτροπής).
- Καρκάνης Βασίλης, Καθηγητής Μαθηματικών 2ου Πρότυπου Λυκείου Αθήνας.
- Κόσυβας Γεώργιος, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Β Αθήνας.
- Λάμπρου Μιχάλης, Ομότιμος Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Πανεπιστημίου Κρήτης.
- Μάγκος Αθανάσιος, Καθηγητής Μαθηματικών στο 1ο Πρότυπο Λύκειο Θεσσαλονίκης.
- Μαυρογιάννης Νίκος, Καθηγητής Μαθηματικών, τ. Σύμβουλος Α΄ Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής.
- Μιχαηλίδης Τεύκρος, Καθηγητής Μαθηματικών – Συγγραφέας.
- Μιχαηλίδου Χριστίνα Σύμβουλος Εκπαίδευσης Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης.
- Μουρούκος Βαγγέλης, Καθηγητής Μαθηματικών Μουσικού Σχολείου Αγρινίου.
- Μπαλόγλου Γεώργιος, τ. Αναπληρωτής Καθηγητής Πολιτειακού Πανεπιστημίου Νέας Υόρκης.
- Ντρίζος Δημήτρης, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Τρικάλων – Καρδίτσας.
- Πάπιστας Θανάσης, Καθηγητής Τμήματος Μαθηματικών Α.Π.Θ.

- Πολύζος Γεώργιος, Πρώην Μόνιμος Πάρεδρος του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου.
- Πούλος Ανδρέας, τ. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης.
- Ρίζος Γεώργιος, Καθηγητής Μαθηματικών 7^{ου} Γυμνασίου Κέρκυρας.
- Συγκελάκης Αλέξανδρος, Καθηγητής Μαθηματικών στο Ευρωπαϊκό Σχολείο Βρυξελλών.
- Τασσόπουλος Γεώργιος, Επίτιμος. Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών.

ΟΡΓΑΝΩΤΙΚΗ

- Σαράφης Ιωάννης
- Παλάζης Νικόλαος
- Τίκβα Χριστίνα
- Καρδάκου Ιωάννα
- Πέρδος Αθανάσιος
- Δελιγκάς Γραμμένος
- Φιλιππίδης Χαράλαμπος
- Πράσινου Άννα
- Μάλλη Αθηνά
- Καρεμφύλλης Κωνσταντίνος
- Νικολαΐδης Ιωάννης

Η επίλυση των εξισώσεων με ριζικά: Μερικά ιστορικά και διδακτικά σχόλια με αφορμή τις βασικές αρχές των νέων προγραμμάτων σπουδών

Γιάννης Θωμαΐδης

Πεσόντων Ηρώων 1Α, 56430 Θεσσαλονίκη

6977580844, gthom54@gmail.com

Περίληψη

Με αφετηρία ορισμένες βασικές αρχές των νέων προγραμμάτων σπουδών επιχειρούμε στην εργασία αυτή μια ιστορική αναδρομή στην επίλυση των εξισώσεων με ριζικά και τις υποκείμενες αντιλήψεις για την έννοια και το σύμβολο της ρίζας. Εξετάζουμε χαρακτηριστικά παραδείγματα από την ξένη και Ελληνική βιβλιογραφία και προτείνουμε τον εμπλουτισμό της διδασκαλίας αυτών των εξισώσεων με βιωματικές δραστηριότητες.

Abstract

With some basic principles of the new curricula as a starting point, we attempt in this paper a historical review of the solution of equations with radicals and the underlying conceptions on the meaning and symbol of the root concept. We examine characteristic examples from foreign and Greek literature and propose the enrichment of the teaching of these equations with experiential activities.

1. Εισαγωγή

Η επίλυση των εξισώσεων με ριζικά αποτελεί μια παραδοσιακή ενότητα της στοιχειώδους Άλγεβρας, η διαπραγμάτευση της οποίας στα σχολικά βιβλία χαρακτηρίζει διαχρονικά και σε σημαντικό βαθμό το επίπεδο της διδακτέας ύλης και της διδασκαλίας.

Στην Ελλάδα τα τελευταία 40 χρόνια οι εξισώσεις αυτές διδάσκονται σταθερά στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου, στην ενότητα «Εξισώσεις που ανάγονται σε πολυωνυμικές» του κεφαλαίου «Πολυωνυμικές Εξισώσεις». Στα δύο όμως σχολικά βιβλία Άλγεβρας που χρησιμοποιήθηκαν αυτή την περίοδο (το [1] από το 1983 μέχρι το 1990 και το [2] από το 1991 μέχρι σήμερα), η διαπραγμάτευση των συγκεκριμένων εξισώσεων γίνεται με εντελώς διαφορετικό τρόπο.

Στο [1] οι εξισώσεις με ριζικά μετασχηματίζονται σε ισοδύναμα συστήματα εξισώσεων και ανισώσεων που προκύπτουν από τους περιορισμούς της θετικότητας για τα υπόρριζα και το σύμβολο της ρίζας. Με τον τρόπο αυτό ανάγονται στην επίλυση μιας πολυωνυμικής εξίσωσης και στον έλεγχο των ριζών της τελευταίας με βάση τις ενδιάμεσες ανισοτικές σχέσεις.

Στο [2] οι εξισώσεις με ριζικά περιέχουν μόνο τετραγωνικές ρίζες και μετασχηματίζονται με διαδοχικούς τετραγωνισμούς μέχρι να προκύψει μια πολυωνυμική εξίσωση. Ο έλεγχος των ριζών της τελευταίας γίνεται με αντικατάσταση και επαλήθευση στην αρχική εξίσωση (χωρίς όμως κάποιο παράδειγμα ή σχόλιο που αναδεικνύει την ανεπάρκεια αυτής της μεθόδου όταν οι ρίζες δεν είναι απλοί ακέραιοι ή ρητοί αριθμοί).

Το [1] συνέχιζε στο συγκεκριμένο ζήτημα μια παράδοση αυστηρότητας και ακριβολογίας που είχε καθιερωθεί στα σχολικά Μαθηματικά τη δεκαετία του 1960, στο πλαίσιο της μεταρρύθμισης των «Νέων Μαθηματικών». Η παράδοση αυτή εγκαινιάστηκε στον ανώτερο κύκλο της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης το 1968 με την έκδοση βιβλίων υψηλού γνωστικού επιπέδου για τα τμήματα θετικής κατεύθυνσης. Η επίλυση των εξισώσεων με ριζικά αποτελούσε διδακτέα ύλη της Δ΄ Γυμνασίου και η διαπραγμάτευσή της στο [3] περιελάμβανε τη μελέτη γενικών μορφών και επεκτείνονταν στο σύνολο των μιγαδικών αριθμών (οι οποίοι διδάσκονταν επίσης στην ίδια τάξη).[1]

Το νέο πρόγραμμα σπουδών διατηρεί την επίλυση των εξισώσεων με ριζικά στην Άλγεβρα της Β΄ Λυκείου και συγκεκριμένα στη θεματική ενότητα «Αλγεβρικές Σχέσεις». Τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα από τη διδασκαλία των εξισώσεων και ανισώσεων στη συγκεκριμένη τάξη περιγράφονται στο πρόγραμμα ως εξής ([4], σ.15573):[2]

Αλ.Σχ.11.1. Επιλύουν αλγεβρικά και ερμηνεύουν γραφικά τις λύσεις πολυωνυμικών και ρητών εξισώσεων.

Αλ.Σχ.11.2. Επιλύουν αλγεβρικά και ερμηνεύουν γραφικά τις λύσεις πολυωνυμικών και ρητών ανισώσεων.

Αλ.Σχ.11.3. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια πολυωνυμικών και ρητών εξισώσεων.

Αλ.Σχ.11.4. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα με τη βοήθεια πολυωνυμικών και ρητών ανισώσεων.

Αλ.Σχ.11.5. Υπολογίζουν προσεγγιστικά ρίζες πολυωνυμικών συναρτήσεων μέσω οπτικοποίησης του θεωρήματος Bolzano και χρήσης ψηφιακών εργαλείων.

Αλ.Σχ.11.6. Επιλύουν εξισώσεις με ριζικά.

Όπως βλέπουμε, τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα εξαιρούν τις εξισώσεις με ριζικά από τη μοντελοποίηση και επίλυση προβλημάτων, όπως

---

[1] Αναφέρουμε χαρακτηριστικά ότι στο συγκεκριμένο βιβλίο γίνεται λεπτομερής μελέτη της γενικής μορφής $\sqrt{\mathrm{A}(x)}+\sqrt{\mathrm{B}(x)}=\sqrt{\Gamma(x)}$ και στη συνέχεια επιλύεται ως παράδειγμα η εξίσωση $\sqrt{x-8}+\sqrt{x-5}=\sqrt{3x-21}$. Στην τελευταία γίνεται δεκτή όχι μόνο η ρίζα x = 8 αλλά και η x = 4. ([3], σσ.193-195).

[2] Ο κωδικός «Αλ.Σχ.11» υποδηλώνει την ενότητα «Αλγεβρικές Σχέσεις» της τάξης 11 (δηλαδή της Β΄ Λυκείου).

απαιτείται για τις πολυωνυμικές και ρητές εξισώσεις και ανισώσεις. Επίσης στο πρόγραμμα δεν γίνεται καμία υπόδειξη για τον τρόπο επίλυσης των συγκεκριμένων εξισώσεων, γεγονός που σημαίνει ότι ζήτημα επαφίεται στην κρίση των διδασκόντων και των συγγραφέων των διδακτικών βιβλίων.

Επειδή οι εξισώσεις με ριζικά αποτελούν μια παραδοσιακή ενότητα της σχολικής Άλγεβρας, όλα τα προηγούμενα θέτουν ένα ερώτημα η μελέτη του οποίου θα μας απασχολήσει στη συνέχεια της εργασίας:

Πότε και για ποιο λόγο ξεκίνησε η μελέτη των εξισώσεων με ριζικά στα Μαθηματικά;

2. Οι πρώτες εξισώσεις με ριζικά στην Ιστορία των Μαθηματικών

Οι εξισώσεις με ριζικά αρχίζουν να εμφανίζονται – κυρίως ως προβλήματα εφαρμογής των μεθόδων επίλυσης δευτεροβάθμιων εξισώσεων – στο πλαίσιο ορισμένων σημαντικών εξελίξεων που πραγματοποιήθηκαν στην Άλγεβρα κατά τη διάρκεια του 16^{ου} αιώνα (επίλυση τριτοβάθμιων εξισώσεων και επινόηση των φανταστικών αριθμών).

Το επόμενο είναι ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από το βιβλίο *L' Algebra* του Ιταλού Rafael Bombelli (1526-1572), που κυκλοφόρησε το 1572 (και σε δεύτερη έκδοση το 1579). Στο κεφάλαιο που επιγράφεται «Δυνάμεις και ποσότητες ίσες με αριθμό» προτείνεται προς επίλυση η ακόλουθη:

$$4.\text{p.R.q}\left[24.\text{m.}20\underset{\smile}{1}\right] \text{ eguale à } 2\underset{\smile}{1}$$

Λαμβάνοντας υπόψη ότι τα σύμβολα p. και m. (από τα αρχικά των λέξεων piu και meno) δηλώνουν αντίστοιχα την πρόσθεση και αφαίρεση, το R.q (από τα αρχικά των λέξεων radix και quadratum) την τετραγωνική ρίζα και τα σύμβολα $\underset{\smile}{1}$, $\underset{\smile}{2}$, ...τις αντίστοιχες δυνάμεις του αγνώστου, διαπιστώνουμε εύκολα ότι πρόκειται για την εξίσωση που σήμερα γράφουμε

$$4+\sqrt{24-20x}=2x\ .$$[3]

Ο Bombelli περιγράφει αρχικά την πορεία της επίλυσης και στη συνέχεια εκθέτει όλα τα βήματα της διαδικασίας, τα οποία με χρήση τη σύγχρονης συμβολικής αναπαράστασης έχουν ως εξής ([5], p.251): [4]

[1] $\sqrt{24-20x}=2x-4$

[2] $24-20x=4x^2-16x+16$

[3] $24+16x=4x^2+20x+16$

[4] $24=4x^2+4x+16$

[5] $8=4x^2+4x$

[6] $2=x^2+x$

[7] $2+\frac{1}{4}=x^2+x+\frac{1}{4}$

[8] $\frac{3}{2}=x+\frac{1}{2}$

[9] $1=x$

Τρία κομβικά σημεία που πρέπει να επισημανθούν είναι τα εξής:

Δεν ασχολείται με τον περιορισμό για το υπόρριζο ($24 - 20x \geq 0$) ούτε με τον περιορισμό για την τιμή της ρίζας στο δεύτερο βήμα ($2x - 4 \geq 0$). Και οι δύο αυτές «παραλείψεις» του Bombelli είναι πλήρως συμβατές με τα εννοιολογικά εργαλεία που χρησιμοποιεί. Το βιβλίο του είναι το πρώτο στο οποίο γίνεται χρήση μιγαδικών αριθμών, στη μορφή ενός συστηματικού λογισμού με τετραγωνικές ρίζες αρνητικών αριθμών, και επιπλέον θεωρείται αυτονόητο ότι για κάθε αριθμό υπάρχουν δύο τετραγωνικές ρίζες. Κατά συνέπεια δεν υφίσταται κανένας λόγος επιβολής των ασφυκτικών περιορισμών που ισχύουν

[3] Ένα ακόμη σημείο που πρέπει να επισημανθεί είναι ότι το σύγχρονο σύμβολο (=) της ισότητας, που εκφράζει μία <u>σχέση</u> ισοδυναμίας, δεν έχει την ίδια ακριβώς σημασία με τη φράση του Bombelli “eguale à” που εκφράζει κυρίως μια <u>διαδικασία</u> «εξίσωσης».

[4] Η αρίθμηση των βημάτων είναι δική μας

σήμερα στη σχολική Άλγεβρα. Το τρίτο σημείο αφορά τα βήματα [6] – [9], όπου ο Bombelli υπολογίζει τη μία ρίζα (x = 1) της δευτεροβάθμιας εξίσωσης $2 = x^2 + x$ στην οποία ανάγεται η επίλυση της αρχικής.[5] Με τον ίδιο τρόπο θα μπορούσε φυσικά να υπολογίσει και τη ρίζα x = –2, αλλά δεν το κάνει, επειδή μάλλον ακολουθεί την καθιερωμένη εκείνη την εποχή πρακτική να θεωρείται αρκετή η εύρεση μιας μόνο λύσης σε ένα προτεινόμενο πρόβλημα. Όλα τα παραπάνω καθιστούν φανερό ότι δεν απαιτείται καμία αντικατάσταση και επαλήθευση των ριζών 1 και –2 στην αρχική εξίσωση, δεδομένου ότι οι (αδύνατες σήμερα) ισότητες

$$4+\sqrt{4}=2 \quad \text{και} \quad 4+\sqrt{64}=-4$$

που προκύπτουν είναι πλήρως αποδεκτές από τον Bombelli. Στη δική του εννοιολογική εργαλειοθήκη δεν υφίσταται η σύγχρονη διάκριση μεταξύ «έννοιας» και «συμβόλου», που επιβάλλει την απόδοση μονοτιμίας στο σύμβολο της δίτιμης έννοιας «τετραγωνική ρίζα».

Ένα άλλο ενδιαφέρον ιστορικό παράδειγμα περιέχεται στο βιβλίο του William Frend (1757-1841) *The Principles of Algebra* (1796). Αν και μεταγενέστερο κατά δύο αιώνες από εκείνο του Bombelli, το βιβλίο του Frend θα μπορούσε να χαρακτηριστεί «οπισθοδρομικό» επειδή αποτελεί μια από τις τελευταίες απόπειρες εξοβελισμού των αρνητικών αριθμών από τα Μαθηματικά (βλ. [7]). Μια εξίσωση με ριζικά από το βιβλίο αυτό – που εμφανίζεται επίσης ως πρόβλημα εφαρμογής της μεθόδου «συμπλήρωση τετραγώνου» για την επίλυση δευτεροβάθμιων εξισώσεων – είναι η

$$x+\sqrt{5x+10}=8.$$

[5] Όπως βλέπουμε, για την επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης ο Bombelli εκθέτει αναλυτικά τη διαδικασία συμπλήρωσης του τετραγώνου. Αυτό ήταν μια κοινή πρακτική εκείνη την περίοδο, που δεν είχε επινοηθεί ακόμη η χρήση εγγράμματων παραμέτρων και αλγεβρικών τύπων, όπως π.χ. ο «τύπος της διακρίνουσας».

Το περίεργο είναι ότι ο πλήρης εξοβελισμός των αρνητικών αριθμών από το βιβλίο του Frend καθιστά την επίλυση αυτής της εξίσωσης απόλυτα συμβατή με όσα ισχύουν σήμερα. Δεν απαιτείται κανείς περιορισμός για τη θετικότητα το υπόρριζου ή του συμβόλου, οπότε η απομόνωση του ριζικού, ο τετραγωνισμός και η επίλυση της δευτεροβάθμιας εξίσωσης που προκύπτει οδηγούν αισίως στη μοναδική λύση x = 3.

3. Μια ιδιαίτερη περίπτωση στην ιστορία της Ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης

Η «Ποσοτική» του Θεόφιλου Καΐρη (1784-1853), είναι ένα από τα εγχειρίδια Άλγεβρας που γράφτηκαν την προεπαναστατική περίοδο και συνέβαλαν στην ανάπτυξη της μαθηματικής εκπαίδευσης στη νεώτερη Ελλάδα.[6] Μεταξύ των πολυάριθμων παραδειγμάτων που χρησιμοποιεί ο συγγραφέας για να εξηγήσει τον τρόπο δημιουργίας και τα «γενικά σχημάτια» (δηλ. τύπους επίλυσης) των διάφορων μορφών εξισώσεων 2^{ου} βαθμού, περιέχεται το ακόλουθο πρόβλημα: ([8], σ.219):

> Εάν φερ' ειπείν, ζητηθή αριθμός, ούτινος το τετράγωνον και το επταπλάσιον, τω 44 εξισούται, ονομάσαντες φ τον τοιούτον αριθμόν έξομεν $φ^2 + 4φ = 44$.

Ο Καΐρης επιλύει την εξίσωση με χρήση του τύπου που αντιστοιχεί στη μορφή $αφ^2 + βφ = γ$ και σημειώνει:

> Όθεν δήλον γίνεται ότι ο 4, και ο –11 το πρόβλημα επιλύουσι.

Μία μάλλον απροσδόκητη επανεμφάνισή αυτού του προβλήματος γίνεται 150 χρόνια αργότερα στο σχολικό βιβλίο [3] που εκδόθηκε το 1968. Στο κεφάλαιο XIV που επιγράφεται «Εξισώσεις αναγόμεναι εις εξισώσεις β΄ βαθμού» προτείνεται προς λύση το επόμενο ([3], σ.204):

> 406) Να ευρεθή αριθμός, ο οποίος αυξανόμενος κατά το 7/πλάσιον της τετραγωνικής ρίζης του γίνεται 144.

---

[6] Οι επιμελητές της έκδοσης του έργου του Καΐρη αναφέρουν στο [8] ότι η «Ποσοτική» γράφτηκε πριν το 1818.

Πρόκειται ουσιαστικά για το ίδιο πρόβλημα, διατυπωμένο ως σχέση μεταξύ ενός αριθμού και τετραγωνικής ρίζας του (αντί ενός αριθμού και του τετραγώνου του όπως στο βιβλίο του Καΐρη). Στο αντίστοιχο τεύχος με τις λύσεις των ασκήσεων του βιβλίου, το πρόβλημα ανάγεται σε μία εξίσωση με ριζικά και επιλύεται ως εξής ([9], σ.200):[7]

> Εάν x είναι ο ζητούμενος αριθμός, όστις δέον να είναι θετικός, τότε έχομεν $x+7\sqrt{x}=44$. Θέτομεν όπου $\sqrt{x}=y$, οπότε $y^2+7y-44=0$, εξ' ής $y_1=-11$, $y_2=4$. Άρα $\sqrt{x}=-11$, ήτις είναι αδύνατος και $\sqrt{x}=4 \Rightarrow x=16$.
>
> Ώστε ο αριθμός είναι ο 16.

Η προηγούμενη λύση του προβλήματος φαίνεται ακριβής και πλήρης αλλά υπάρχει ένα επίμαχο σημείο, αν λάβουμε υπόψη όσα αναφέρονται στο ίδιο βιβλίο για το πλήθος και το συμβολισμό των ριζών ενός πραγματικού αριθμού ([3], σ.117):

> Πάς πραγματικός αριθμός α έχει 1) μίαν μόνην πραγματικήν νυοστήν ρίζαν x περιττής τάξεως (ν = 2κ + 1) θετικήν ή αρνητικήν, καθ' όσον ο α είναι θετικός ή αρνητικός αντιστοίχως, ήτις καλείται πρωτεύουσα νυοστή ρίζα του α, 2) δύο πραγματικές νυοστάς ρίζας αντιθέτους αρτίας τάξεως (ν = 2κ), αν ο α > 0, εκ των οποίων η θετική καλείται πρωτεύουσα νυοστή ρίζα του α και 3) ουδεμίαν πραγματικήν νυοστήν ρίζαν αρτίας τάξεως, αν α < 0.
>
> Την πρωτεύουσαν νυοστήν ρίζαν του α συμβολίζομεν $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Όπως διαπιστώνουμε, στο συγκεκριμένο σχολικό βιβλίο γίνεται ένας σαφής διαχωρισμός ανάμεσα στην έννοια και το σύμβολο της τετραγωνικής ρίζας: Κάθε θετικός αριθμός έχει δύο τετραγωνικές ρίζες, που είναι αντίθετοι αριθμοί ενώ το αντίστοιχο σύμβολο αναπαριστά μόνο τη θετική, η οποία φέρει ιδιαίτερο όνομα («πρωτεύουσα ρίζα»). Τα προηγούμενα ήταν συμβατά με την ακριβολογία των «Νέων Μαθηματικών» που εξέφραζε το συγκεκριμένο

---

[7] Υπενθυμίζουμε ότι μέχρι τα τέλη της δεκαετίας του 1970, τα διδακτικά βιβλία Μαθηματικών παρέχονταν δωρεάν, αλλά στο εμπόριο κυκλοφορούσαν οι λύσεις των ασκήσεων ως ανεξάρτητα τεύχη με τα ονόματα των συγγραφέων είτε κάποιων «εκπροσώπων» τους.

βιβλίο, αλλά ο συντάκτης της προηγούμενης λύσης φαίνεται ότι αγνοούσε. Η εκφώνηση του προβλήματος στο [3] αναφέρεται σε «τετραγωνική ρίζα» και όχι «πρωτεύουσα τετραγωνική ρίζα», το σύμβολο της οποίας εμφανίζεται στην επίλυση του προβλήματος στο [9]. Για να είναι συνεπής με όσα αναφέρονται στο σχολικό βιβλίο όφειλε να διατυπώσει τη λύση ως εξής:

> Έστω x μία από τις δύο τετραγωνικές ρίζες του ζητούμενου αριθμού. Τότε ο ζητούμενος αριθμός είναι x^2 και σύμφωνα με τα δεδομένα του προβλήματος θα ισχύει: $x^2 + 7x = 44 \Leftrightarrow x^2 + 7x - 44 = 0$. Οι ρίζες της τελευταίας είναι οι αριθμοί 4 και -11 και άρα ο ζητούμενος αριθμός είναι $4^2 = 16$ ή $(-11)^2 = 121$.

Σύμφωνα λοιπόν με το πνεύμα της ακριβολογίας που αποτελούσε «σημαία» των «Νέων Μαθηματικών», το πρόβλημα έχει δύο λύσεις, τους αριθμούς 16 και 121 και δεν απαιτείται η χρήση του συμβόλου της τετραγωνικής ρίζας στην επίλυσή του. Αυτό το συμπέρασμα αποκαλύπτει την ουσιαστική ταύτιση του προβλήματος με εκείνο που είχε διατυπώσει ο Καΐρης πριν 150 χρόνια, αλλά φέρνει ταυτόχρονα στην επιφάνεια ένα ενδιαφέρον ερώτημα:

Ποια απάντηση θα ήταν δεκτή στη σχολική Άλγεβρα <u>σήμερα</u>;

Οι ορισμοί της τετραγωνικής ρίζας που δίνονται στα σημερινά βιβλία Μαθηματικών της Γ΄ Γυμνασίου και Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου είναι οι εξής:

> Η τετραγωνική ρίζα ενός θετικού αριθμού x συμβολίζεται με $\sqrt{x}$ και είναι ο θετικός αριθμός που όταν υψωθεί στο τετράγωνο μας δίνει τον αριθμό x. (βλ. [10], σ.20)
>
> Η τετραγωνική ρίζα ενός μη αρνητικού αριθμού α συμβολίζεται με $\sqrt{\alpha}$ και είναι ο μη αρνητικός αριθμός που, όταν υψωθεί στο τετράγωνο δίνει τον α. (βλ. [11], σ.69) [8]

---

[8] Ο δραστικός περιορισμός της έννοιας «τετραγωνική ρίζα» που εισάγεται με αυτό τον ορισμό γίνεται φανερός αν συγκριθεί με εκείνον που υπήρχε στο αμέσως προηγούμενο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου που αντικαταστάθηκε από το [11]:

> Έστω α πραγματικός αριθμός και η εξίσωση $x^2 = \alpha$ στο $\mathbb{R}$. Κάθε ρίζα της εξισώσεως αυτής λέγεται τετραγωνική ρίζα του α. ([12], σ.126).

Δηλαδή, μέχρι το 1989 που χρησιμοποιήθηκε το [12], κάθε θετικός αριθμός είχε δύο τετραγωνικές ρίζες ενώ από το 1990 που κυκλοφόρησε το [11] έχει μόνο μία!

Όπως είναι φανερό, οι συγκεκριμένοι ορισμοί ταυτίζουν την έννοια της τετραγωνικής ρίζας με το σύμβολό της και κατά συνέπεια, σε ένα πρόβλημα όπως το προηγούμενο στο [3], θα ήταν δεκτή μόνο μία λύση.

4. Μερικές παρατηρήσεις και ένα ερώτημα

Μια βασική διαπίστωση που προκύπτει από τα προαναφερθέντα είναι η διαρκής επιβολή αυστηρών περιορισμών στη χρήση της έννοιας της ρίζας και του αντίστοιχου συμβόλου, με αποκορύφωμα την ταύτισή τους στα σημερινά σχολικά βιβλία Μαθηματικών Γ΄ Γυμνασίου [10] και Άλγεβρας Α΄ Λυκείου [11]. Η διαπραγμάτευση όμως των εξισώσεων με ριζικά στο βιβλίο Άλγεβρας Β΄ Λυκείου [2] (η οποία στηρίζεται στον ορισμό της ρίζας του [11]), δεν είναι συνεπής με αυτό το πνεύμα καθώς αναγάγει την επίλυσή τους σε διαδικασία διαδοχικών τετραγωνισμών και επαληθεύσεων.

Οι αναφορές στην ιστορική εξέλιξη δείχνουν ότι η παραδοσιακή εικόνα που προβάλουν τα διδακτικά βιβλία, εμφανίζοντας τα Μαθηματικά ως ένα σύνολο από αιώνιες και αμετάβλητες γνώσεις, δεν έχει καμιά σχέση με την πραγματικότητα και καλλιεργεί στρεβλές αντιλήψεις για τη διδασκαλία και μάθηση. Αυτή η εικόνα επιβάλλεται σε διδάσκοντες και διδασκόμενους καθιερώνοντας ένα αντίστοιχο μοντέλο διδασκαλίας που «τιμωρεί» κάθε παρέκκλιση από την καθιερωμένη γνώση.

Η μακρά ιστορία των μεταβαλλόμενων αντιλήψεων για την έννοια και το σύμβολο της ρίζας, και η επίδρασή τους στην επίλυση των εξισώσεων με ριζικά, αποτελεί ένα μικρό αλλά βασικό μέρος των ειδικών γνώσεων που διευρύνουν τα στενά πλαίσια της «διδακτέας ύλης» και συμβάλουν στην ουσιαστική κατάρτιση όσων διδάσκουν Μαθηματικά. Ένα παράδειγμα τέτοιας γνώσης αποτελεί το θέμα που εξετάζουμε σε αυτή την εργασία, το οποίο συνδέεται άμεσα με τους προβληματισμούς που εγείρει η επικείμενη εφαρμογή των νέων προγραμμάτων σπουδών αν διατυπωθεί στη μορφή του επόμενου ερωτήματος:

Ποιο σκοπό εξυπηρετούσε στο παρελθόν και ποιον εξυπηρετεί σήμερα η ένταξή των εξισώσεων με ριζικά στη διδακτέα ύλη της σχολικής Άλγεβρας;

5. Μια πρόταση βιωματικής διδασκαλίας των εξισώσεων με ριζικά

Εκείνο που μπορούμε να υποστηρίξουμε με βεβαιότητα είναι ότι ουδέποτε στο παρελθόν οι εξισώσεις με ριζικά χρησιμοποιήθηκαν στα σχολικά βιβλία για τη μοντελοποίηση και επίλυση κάποιου πραγματικού προβλήματος. Η παρουσία τους στη σχολική ύλη, ιδιαίτερα τις τελευταίες δεκαετίες, φαίνεται να εξυπηρετεί αποκλειστικά δύο ακραίες όψεις του αλγεβρικού λογισμού: Από τη μια μεριά τη σχολαστική εφαρμογή των κανόνων της λογικής στο μετασχηματισμό των εξισώσεων και τον έλεγχο του συνόλου των λύσεων και από την άλλη, τη χρήση διαδοχικών μετασχηματισμών (βασικά τετραγωνισμών) που ανάγουν την επίλυση σε μία επαλήθευση.

Αν μελετήσουμε τη νεώτερη διεθνή βιβλιογραφία της σχολικής Άλγεβρας, διαπιστώνουμε ότι καμία από τις προηγούμενες επιλογές δεν τίθεται ως προτεραιότητα στη διδασκαλία της συγκεκριμένης κατηγορίας εξισώσεων. Αντίθετα, αναζητούνται βιωματικές προβληματικές καταστάσεις μέσα από τις οποίες αναδεικνύεται η ανάγκη επίλυσης σχετικά απλών εξισώσεων ή ανισώσεων με ριζικά. Μια τέτοια περίπτωση, στην οποία αξιοποιείται η έννοια του γεωμετρικού μέσου εμφανίζεται στο επόμενο πρόβλημα: [9]

Σε ένα επαναληπτικό διαγώνισμα Άλγεβρας σημειώθηκε μεγάλη αποτυχία και τα περισσότερα γραπτά βαθμολογήθηκαν με λιγότερες από 50 μονάδες (στην κλίμακα 0–100). Ο καθηγητής αποφάσισε να βελτιώσει τη βαθμολογία των γραπτών, αντικαθιστώντας κάθε βαθμό x με το $10\sqrt{x}$ (δηλαδή το γεωμετρικό μέσο μεταξύ του x και του 100). Έτσι π.χ. οι βαθμοί 25 και 64 θα γίνουν αντίστοιχα $10\sqrt{25}=50$ και $10\sqrt{64}=80$.

[9] Βλ. [13], σ.17-18.

Ο επόμενος πίνακας περιέχει μια σειρά από ερωτήματα που εγείρει η συγκεκριμένη πρωτοβουλία του καθηγητή καθώς και τα αντίστοιχα μαθηματικά προβλήματα στα οποία οδηγεί η απάντησή τους:

Ερωτήματα	Αντίστοιχο πρόβλημα
Υπάρχουν βαθμοί που δεν θα αλλάξουν;	Επίλυση της εξίσωσης $10\sqrt{x} = x$
Θα βελτιωθούν όλοι οι βαθμοί ή κάποιοι βαθμοί ενδέχεται να μειωθούν;	Επίλυση της ανίσωσης $10\sqrt{x} < x$
Μήπως κάποιοι βαθμοί ευνοούνται περισσότερο από άλλους (π.χ. οι μικρότεροι από τους μεγαλύτερους);	Μελέτη της συνάρτησης $f(x) = 10\sqrt{x} - x$

Στο συγκεκριμένο πρόβλημα η επίλυση τριών απλών σχετικά ασκήσεων (επίλυση εξίσωσης και ανίσωσης και μελέτη συνάρτησης) δεν αποτελεί αυτοσκοπό, αλλά προκύπτει από συγκεκριμένα ερωτήματα που έχουν οικείο περιεχόμενο, ενώ τα αποτελέσματα της επίλυση αποτελούν εργαλεία για να δοθούν οι αντίστοιχες απαντήσεις.

Τα προηγούμενα ερωτήματα (καθώς και άλλα συναφή με αυτά)[10] θα μπορούσαν να γίνουν αφετηρία μιας ενδιαφέρουσας δραστηριότητας στην τάξη, η οποία κατά τη γνώμη μας έχει πολύ περισσότερα να προσφέρει στη μαθηματική παιδεία και κατάρτιση των μαθητών από τη μονότονη ασκησιολογία των εξισώσεων με ριζικά που κατακλύζει σχολικά βιβλία και βοηθήματα.

Βιβλιογραφία

[1] Ν. Βαρουχάκης, κ.α. (1983). *Μαθηματικά Β΄ Λυκείου. Άλγεβρα*. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

[2] Σ. Ανδρεαδάκης, κ.α. (1991). *Άλγεβρα Β΄ Λυκείου*. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

[3] Θ. Βαβαλέτσκος & Γ. Μπούσγος (1968). *Μαθηματικά Δ΄ Γυμνασίου (Θετικής Κατευθύνσεως)*. Τόμος Πρώτος (Άλγεβρα). Ο.Ε.Δ.Β., Αθήναι.

[10] Π.χ., τι συμβαίνει αν για την βελτίωση της βαθμολογίας χρησιμοποιηθεί ο αριθμητικός μέσος αντί του γεωμετρικού μέσου;

[4] Υ.Α. 23523/Δ2 (2023). *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄, και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου*. Φ.Ε.Κ. Β΄ 1326, 8 Μαρτίου 2023.

[5] R. Bombelli (1579). *L' Algebra*. Bologna.

[6] W. Frend (1796). *The Principles of Algebra*. London.

[7] A. Arcavi & M. Bruckheimer (1983). *The Negative Numbers. An historical source-work collection for in-service and pre-service mathematics teacher courses*. The Weizmann Institute of Science, Rehovot.

[8] Κ. Μαυρομάτης & Δ. Χριστόπουλος (1994). *Η Ποσοτική (Άλγεβρα) του Θεόφιλου Καΐρη*. Έκδοση 1ου Λυκείου Βόλου.

[9] Υπό Ενώσεως Καθηγητών Συγγραφέων (χ.χ.). *Λύσεις των ασκήσεων των Μαθηματικών Δ΄ Γυμνασίου του εγκεκριμένου βιβλίου του Ο.Ε.Δ.Β. υπό Θ. Βαβαλέτσκου – Γ. Μπούσγου*. Τεύχος Β΄. Εκδόσεις Ι. Σιδέρης, Αθήναι.

[10] Δ. Αργυράκης, κ.α. (2022). *Μαθηματικά Γ΄ Γυμνασίου*. Ι.Τ.Υ.Ε. «Διόφαντος», Αθήνα.

[11] Σ. Ανδρεαδάκης, κ.α. (2022). *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α΄ Γενικού Λυκείου*. Ι.Τ.Υ.Ε. «Διόφαντος», Αθήνα.

[12] Ν. Βαρουχάκης, κ.α. (1980). *Μαθηματικά Α΄ Λυκείου. Άλγεβρα*. Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

[13] A. Arcavi, P. Drijvers & K. Stacey (2017). *The Learning and Teaching of Algebra. Ideas, Insights, and Activities*. Routledge, London.

Αξιοποιώντας θέματα του PISA 2022 στο νέο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών

Θεματική ενότητα: Νέα Αναλυτικά Προγράμματα Μαθηματικών.

Ρίζος Γιώργος
Σπ. Νικοκάβουρα 7, 49132, Κέρκυρα
email: rizosgeo@gmail.com

Περίληψη

Στην εισαγωγική έκθεση του νέου Προγράμματος Σπουδών (Π.Σ.) για τα Μαθηματικά του Γυμνασίου (Ιανουάριος 2023) αναφέρεται ότι:

> *Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών φιλοδοξεί να προσφέρει σε όλους τους μαθητές την ευκαιρία να είναι σε θέση να: (...) αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα (...)*

Μια σημαντική πηγή ιδεών και δραστηριοτήτων που θα μπορούσαν να στηρίξουν τον παραπάνω στόχο βρίσκονται στο **νέο** μαθηματικό περιεχόμενο του προγράμματος PISA, στα οποία δίνεται μεγαλύτερη βαρύτητα στην κατανόηση, εφαρμογή των μαθηματικών εννοιών και στη μαθηματική αιτιολόγηση, άξονες που αποτελούν τους πυλώνες του νέου Π.Σ. των Μαθηματικών της Δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης μας. Στην εργασία περιγράφεται, μέσω της παρουσίασης συγκεκριμένων παραδειγμάτων, ο τρόπος με τον οποίον θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν τέτοια θέματα για την υποστηριξη των νέων Π.Σ. των Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου.

Summary

In the introductory report of the new Curriculum for High School Mathematics (Jan. 2023) it is stated that

> The new Curriculum aspires to offer all students the opportunity to be able to: (…) develop mathematical processes and practices, such as reasoning, modeling, communication and reflection, that empower the learning of Mathematics and support important skills and skills for the 21st century citizen (…)

An important source of ideas and activities that could support the above objective can be found in the new mathematical content of the PISA program, in which more weight is given to the understanding, application of mathematical concepts and mathematical reasoning, the axes that are the pillars of of new Curriculum of Mathematics in our Secondary Education. This paper describes, through the presentation of specific examples, the way in which such

issues could be used to support the new Curriculum of High School Mathematics.

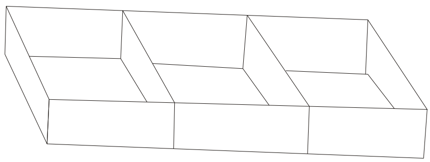
Η σημερινή πραγματικότητα στα σχολικά Μαθηματικά μέσα από δύο «στιγμιότυπα»

Το 2019 δημοσιεύθηκε μια έρευνα στελεχών του Ι.Ε.Π. με τίτλο *Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση και αξιολόγηση PISA* (ΙΕΠ, 2019) με σκοπό: «*τη συνεξέταση των στόχων της έρευνας PISA, των θεμάτων που τίθενται και των στόχων των υπαρχόντων Προγραμμάτων Σπουδών (ΠΣ) και Αναλυτικών Προγραμμάτων Σπουδών (ΑΠΣ), όπως εφαρμόζονται, σε συνδυασμό με τα διδακτικά βιβλία που τα υποστηρίζουν (...) με έμφαση στη σύγκριση του Πλαισίου αξιολόγησης του Προγράμματος PISA με τους στόχους του ΠΣ/ΑΠΣ, ιδίως ως προς το τι μπορούν να κάνουν οι μαθητές/μαθήτριες με αυτά που μαθαίνουν: α) στη μεταφορά και διαχείριση γνώσης, μεθόδων και δεξιοτήτων σε μη οικεία (για την τάξη και τη διδασκαλία) πλαίσια, και β) σε ό,τι αφορά στη σύνδεση του κόσμου της εμπειρίας με το μαθηματικό περιεχόμενο*».[11]

Παρουσιάζουμε δύο παραδείγματα από αυτήν την έρευνα:

Ένα πρόβλημα που περιλαμβανόταν στο πρόγραμμα PISA 2012 έθετε το εξής ερώτημα συμπλήρωσης κενού (ανοιχτού τύπου, δίχως επιλογή και δίχως αιτιολόγηση).

Με 120 μέτρα συρματόπλεγμα κατασκευάζουμε τρεις τετράγωνες περιφράξεις, όπως φαίνονται στην εικόνα. Ποιο είναι το εμβαδόν της επιφάνειας κάθε περίφραξης;
Απάντηση: ……….. τετρ. μέτρα.



Ορθή απάντηση έδωσε το 9,18% των μαθητών, εσφαλμένη το 63,27% και το 27,55% δεν έδωσε απάντηση.

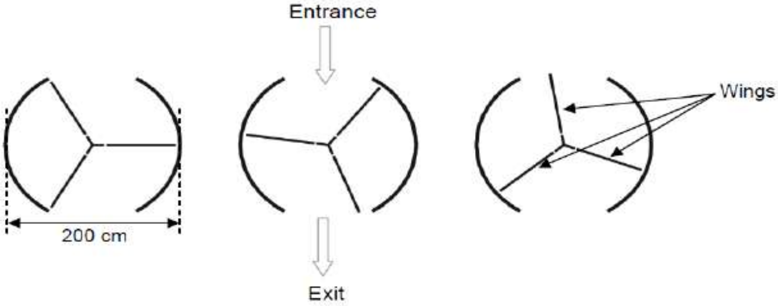
Οι ερευνητές του Ι.Ε.Π. παρατηρούν ότι: (…) *Υποδεικνύεται πολύ μεγάλη αδυναμία επίλυσης του – σχετικά απλού – αυτού προβλήματος. Στη δειγματοληψία εντοπίστηκε στατιστικά σημαντική* ***σύγχυση περιμέτρου και εμβαδού****. Η περιγραφή για «κατασκευή περίφραξης από δεδομένο μήκος για τρία ίσα χωρία», οδήγησε σε μεγάλο, στατιστικά, ποσοστό στη διαίρεση του μήκους σε τρία ίσα τμήματα, αν και ζητούμενο ήταν το εμβαδόν των προκυπτόντων χωρίων*. (…) *Το «πρόβλημα της* ***σύγχυσης μεταξύ εμβαδού και περιμέτρου****» αποτελεί αντικείμενο (άρα και αίτημα η άρση της σύγχυσης) των εγχειριδίων (εκτιμούμε, και της διδασκαλίας) των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού, αλλά και της Β΄ Γυμνασίου.*[12]

Ένα δεύτερο πρόβλημα στο ίδιο πρόγραμμα ήταν το εξής:

Μια περιστρεφόμενη πόρτα περιλαμβάνει τρία πτερύγια (wings) που περιστρέφονται μέσα σε ένα κυκλικό χώρο. Η εσωτερική διάμετρος αυτού του χώρου είναι 2 μέτρα (200 εκατοστά). Τα τρία πτερύγια της πόρτας χωρίζουν το

[11] [1], σ.1.
[12] [1], σ.17 και 22.

χώρο σε τρεις ίσους τομείς.[13] *Το παρακάτω σχέδιο δείχνει τα πτερύγια της πόρτας σε τρεις διαφορετικές θέσεις όπως φαίνονται από πάνω.*



Ποιο είναι το μέγεθος σε μοίρες της γωνίας που σχηματίζουν δύο πτερύγια πόρτας;

Ορθή απάντηση έδωσε το 48,45% των μαθητών, εσφαλμένη το 38,39% και το 13,06% δεν έδωσε απάντηση.

Οι ερευνητές που Ι.Ε.Π. παρατηρούν ότι: *Το πρόβλημα αφορά τον επιμερισμό κυκλικού χωρίου (σε τρία ίσα μέρη), και θα ανέμενε κανείς την ευχερή απάντηση των μαθητών. Η σχηματική αναπαράσταση αφορά κάτοψη και περιγραφές. (…) Εκτιμούμε ότι το πρόβλημα είναι η αναφορά σε τρισδιάστατο αντικείμενο και δεν αναγνωρίζεται η προφανής τριχοτόμηση της γωνίας, παρόλο που παρίσταται στην κάτοψη.*

Υποδεικνύεται μια αδυναμία αντιμετώπισης προβλημάτων-κειμένων (word problems) που προσιδιάζουν προς «προβλήματα της καθημερινότητας», αφού δεν διατυπώνουν, απλώς, λεκτικά το μαθηματικό πρόβλημα ως τύπο, αλλά αναφέρονται σε «εφαρμογές» που χρήζουν «μαθηματικής αντιμετώπισης» (problematic problems). Ειδικότερα, επισημαίνεται μια αδυναμία στον εντοπισμό της «κρίσιμης» πληροφορίας σε κείμενα κάποιου μεγέθους.[14]

Με αυτά τα δύο χαρακτηριστικά παραδείγματα αναδεικνύεται ένα σημαντικό θέμα που αφορά τη ουσία της διδασκαλίας των μαθηματικών εννοιών. Για την κατανόηση των εννοιών δεν επαρκεί η παρουσίασή τους και ο έλεγχος για το αν μπορούν οι μαθητές να επιλύουν απλές ασκήσεις ρουτίνας εφαρμογής των τύπων και των κανόνων. Οι μαθητές κατανοούν καλύτερα τις έννοιες, όταν χρειάζεται να αποφασίσουν πώς θα τις εφαρμόσουν σε προβλήματα της καθημερινότητας ή σε κατάλληλα κατασκευασμένα μαθηματικά προβλήματα. Πιστεύουμε ότι η έλλειψη τέτοιου προσανατολισμού στην εκπαίδευσή μας είναι από τις σημαντικές αιτίες της υστέρησής μας σε επιδόσεις στη Διεθνή έρευνα PISA.

Η ομάδα του ΙΕΠ καταλήγει στην εξής πρόταση: *Θεωρούμε ότι, αν είναι επιθυμητό να επιτευχθεί σύγκλιση της εκπαιδευτικής διαδικασίας με τις αρχές που αξιολογούνται από το PISA,* ***είναι ουσιώδες να αναδειχθεί η ενασχόληση με τα προβλήματα ως βασικό στοιχείο της μαθηματικής εκπαίδευσης.***[15] *Επισημαίνεται ότι η εκτίμησή μας για την αξία της ενασχόλησης των μαθητών με προβλήματα στο μάθημα των Μαθηματικών και, συναφώς, για την κατάλληλη διαμόρφωση των ΑΠΣ των Μαθηματικών, είναι ανεξάρτητη από την προσέγγιση των στόχων του*

---

[13] Παρατηρήστε ότι ενώ στο πρώτο πρόβλημα η ισότητα των χωρίων αφήνεται να φανεί στο σχήμα, δίχως να διατυπώνεται σαφώς στην εκφώνηση, αντιθέτως στο δεύτερο γίνεται ρητή αναφορά στην εκφώνηση.

[14] [1], σ.14 και 22-23.

[15] Η επισήμανση με υπογράμμιση δική μας.

PISA, και νοείται ως παιδαγωγική και μαθησιακή διεργασία με αυταξία, ευρύτερη, μάλιστα, του ειδικού αντικειμένου του μαθήματος των Μαθηματικών. Προς αυτή την κατεύθυνση βραχυπρόθεσμα μπορούν να συμβάλλουν οι ακόλουθες άμεσες ενέργειες:
1) Ενθάρρυνση των διδασκόντων να προχωρήσουν σε μια διδακτική μετατόπιση, εντάσσοντας τα προβλήματα στο καθημερινό διδακτικό ρεπερτόριο. Χρειάζεται ***εκπόνηση ειδικού οδηγού με τεκμηρίωση και υλικό.***
2) Συστηματική ***ένταξη των προβλημάτων στις τελικές εξετάσεις****, ένταξη που, μεταξύ άλλων, σηματοδοτεί την αξία τους.*[16]

Τι κάναμε ως τώρα, τι πρέπει και τι μπορούμε να κάνουμε;

Τα βιβλία Μαθηματικών του Γυμνασίου, τόσο της περιόδου 1987-2006, όσο και τα νεώτερα που χρησιμοποιούνται από το 2007, περιέχουν μεγάλο αριθμό πραγματικών προβλημάτων και οι οδηγίες διδασκαλίας τονίζουν κάθε χρόνο τη σημασία της επίλυσης προβλήματος. Αντικειμενικά, λοιπόν, τιθεται το ερώτημα για ποιο λόγο δεν έχει εδραιωθεί μια «κουλτούρα» επίλυσης προβλήματος στις πρακτικές των διδασκόντων;

Ποια ουσιαστικά μέτρα μπορούσαν να λάβουν και δεν έλαβαν όλα αυτά τα χρόνια τα θεσμικά όργανα της εκπαίδευσης (Π.Ι. και Ι.Ε.Π.) για την αντιμετώπιση του προβλήματος ***διδασκαλίας*** και ***μάθησης*** που αναδεικνύουν τα αποτελέσματα του προγράμματος PISA, εφόσον τέσσερα χρόνια μετά τη δημοσίευση της έρευνας του Ι.Ε.Π. δεν υλοποιήθηκαν οι παραπάνω προτάσεις, ούτε βελτίωση των επιδόσεών μας είχαμε στο πρόγραμμα του 2022.

Στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών των Μαθηματικών (Π.Σ.) διαφαίνεται η πρόθεση των συντακτών του να προχωρήσουν στην κατεύθυνση που προτείνει η μελέτη του Ι.Ε.Π. Στην εισαγωγική έκθεσή του αναφέρεται:

Το νέο Π.Σ. φιλοδοξεί να προσφέρει σε όλους/-ες τους/ τις μαθητές/-τριες την ευκαιρία να είναι σε θέση, μέσα από τη συμμετοχή τους στα μαθήματα, να: (...) αναπτύσσουν μαθηματικές διεργασίες και πρακτικές, όπως ο συλλογισμός, η μοντελοποίηση, η επικοινωνία και ο αναστοχασμός, που ενδυναμώνουν τη μάθηση των Μαθηματικών και υποστηρίζουν σημαντικές ικανότητες και δεξιότητες για τον πολίτη του 21ου αιώνα.[17]

Γενικότερα, το ζητούμενο είναι έργα που εμπλέκουν τους/τις μαθητές/-τριες στην αναζήτηση ιδιοτήτων και σχέσεων, στη δημιουργία συνδέσεων και σε δράσεις διερεύνησης, πειραματισμού και αναστοχασμού. Το μαθηματικό έργο μπορεί να είναι ένα παιχνίδι ή μια άσκηση ή ένα πρόβλημα ή ακόμα και μια ερώτηση που θα θέσει ο/η εκπαιδευτικός στην τάξη. Ωστόσο, η απλή εμπλοκή των μαθητών/-τριών σε ένα μαθηματικό έργο (π.χ. επίλυση εξίσωσης), δεν είναι αρκετό για να θεωρηθεί ότι οι μαθητές/-τριες αναπτύσσουν μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα. Μια πλούσια μαθηματική δραστηριότητα προσφέρει στους/στις μαθητές/-τριες την ευκαιρία να αναπτύξουν ποικιλία μαθηματικών και κοινωνικο-πολιτισμικών πρακτικών που θα τους/τις οδηγήσουν στις μεγάλες ιδέες των Μαθηματικών (όπως είναι η απόδειξη, η ισοδυναμία και οι μετασχηματισμοί), στην ανάπτυξη των αντίστοιχων μαθηματικών νοημάτων και, εν τέλει, αυθεντικής μαθηματικής σκέψης.[18]

Στροφή στο περιεχόμενο των θεμάτων του PISA (2022)

Τα **νέα** μαθηματικά θέματα του **PISA 2022** είναι μια πηγή τέτοιων **μαθηματικών δραστηριοτήτων** που θα μπορούσαν να αξιοποιηθούν στη σχολική τάξη. Στην έρευνα πού

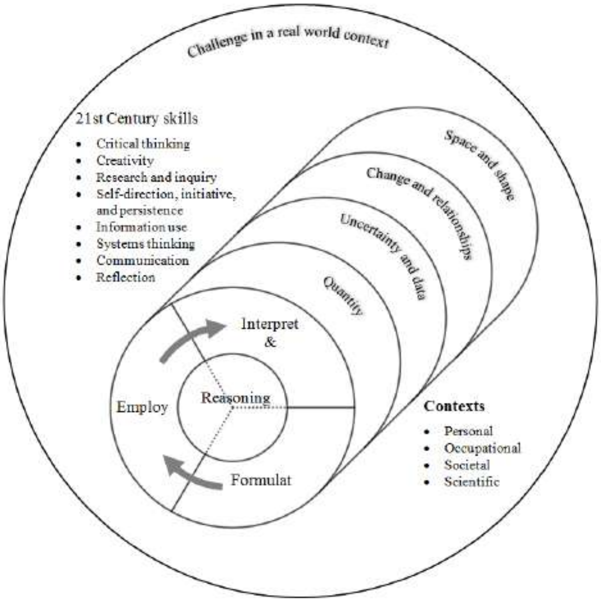
---

16 [1], σ.23-24.
17 [2], σ.2728
18 [3], σ.11564-11565

έγινε το 2022 (αντί για το 2021, λόγω πανδημίας) παρατηρούμε μια στροφή στο περιεχόμενο των Μαθηματικών θεμάτων.

Η ομάδα που ανέλαβε την εκπόνηση του μαθηματικού προγράμματος της έρευνας PISA 2022 δίνει μικρότερη βαρύτητα στην απομνημόνευση ορισμών, τύπων, θεωρίας και μεγαλύτερη βαρύτητα στην εφαρμογή τους σε καταστάσεις (ρεαλιστικές ή μη). Συνήθως δίνεται μια σύντομη περιγραφή της θεωρίας που θα χρησιμοποιηθεί και ζητείται η εφαρμογή της.

Το νεότερο που αναδεικνύεται στα εγχειρίδια τεκμηρίωσης στο πρόγραμμα του 2022 είναι η αιτιολόγηση-τεκμηρίωση (reasoning) που τιθεται στο επίκεντρο των θεμάτων.[19]



Στο πρόγραμμα του 2022, το 57% των θεμάτων επιλέχθηκε από τα νέα θέματα και το 43% από τα παλαιότερα θέματα.[20]

Ας δούμε ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα από το τεύχος «PISA 2022, Μαθηματικό πλαίσιο», OECD 2018.[21]

Το θέμα ελέγχει αν οι 15χρονοι μαθητές έχουν κατανοήσει τις «αληθείς» και «ψευδείς προτάσεις». Αρχικά δίνονται οι ορισμοί και παραδείγματα. Ξεκινά με απλές ερωτήσεις της καθημερινής ζωής και σταδιακά τα ερωτήματα δυσκολεύουν και καλύπτουν ευρύ φάσμα μαθηματικών εννοιών.[22]

«Πάντα, μερικές φορές, ποτέ»

Οι δηλώσεις που κάνουμε μπορούν να ομαδοποιηθούν σε τρεις κατηγορίες:

Δηλώσεις που είναι **πάντοτε** αληθείς,
Δηλώσεις που είναι **μερικές φορές** αληθείς, και
Δηλώσεις που δεν είναι **ποτέ** αληθείς.

---

19 [4], p.5-6 και [5] p.8-10

20 Κ. Στουραΐτης στην Ημερίδα του ΙΕΠ για τον PISA, 30-11-2023 https://www.youtube.com/watch?v=bBO_NuAGCl8 στο 1.27.20.

21 [5], p. 60-63

22 Εδώ θα πρέπει να δηλώσουμε ότι στο νέο Π.Σ. του Λυκείου **δεν εντοπίσαμε** αναφορές στις βασικές έννοιες λογικής: «συνεπαγωγή», «ισοδυναμία», στους συνδέσμους «ή», «και», στους ποσοδείκτες: «για κάθε», «υπάρχει» και στις μεθόδους απόδειξης. Πιστεύουμε ότι οι συγγραφικές ομάδες θα (πρέπει να) συμπεριλάβουν στα σχολικά εγχειρίδια τις παραπάνω έννοιες με εκτενή παραδείγματα και ασκήσεις.

- Η δήλωση: «Ένας αριθμός που διαιρείται με το 4, επίσης διαιρείται με το 2» είναι **πάντοτε** αληθής, γιατί το 2 είναι παράγοντας του 4.
- Η δήλωση: «Ένας αριθμός που διαιρείται με το 9, επίσης διαιρείται με το 6» είναι **μερικές φορές** αληθής.
  Για παράδειγμα, το 36 διαιρείται και με το 9 και με το 6, αλλά το 27 διαιρείται με το 9, αλλά δεν διαιρείται με το 6.
- Η δήλωση «Το άθροισμα δύο περιττών αριθμών είναι περιττός αριθμός» δεν είναι **ποτέ** αληθής, επειδή το άθροισμα δύο περιττών είναι πάντοτε άρτιος.

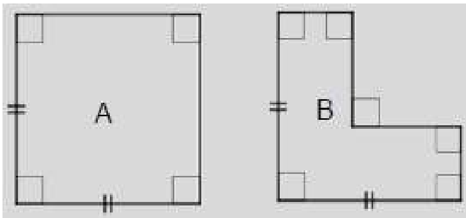
Ερωτήσεις

1/3 Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε αν είναι **πάντοτε** αληθείς, **μερικές φορές** αληθείς, ή δεν είναι **ποτέ** αληθείς.

Πρόταση	**πάντοτε** αληθής	**μερικές φορές** αληθής	**ποτέ** αληθής
Ένα 14-χρονο κορίτσι είχε τουλάχιστον μια φορά στη ζωή της το μισό από σημερινό της ύψος.			
Ένα 14-χρονο κορίτσι είναι πιο ψηλό από ένα 10-χρονο κορίτσι			

2/3 Για καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, επιλέξτε αν είναι **πάντοτε** αληθείς, **μερικές φορές** αληθείς, ή δεν είναι **ποτέ** αληθείς.

Πρόταση	**πάντοτε** αληθής	**μερικές φορές** αληθής	**ποτέ** αληθής
Όταν ένας ακέραιος αριθμός πολλαπλασιάζεται με τον εαυτό του το γινόμενο είναι άρτιος αριθμός			
Διπλασιάζοντας έναν ακέραιο αριθμό, προκύπτει άρτιος αριθμός.			
Το μισό ένος περιττού ακέραιου αριθμού είναι ακέραιος αριθμός			
$3x + 1 = \frac{6x + 2}{2}$			

Η περίμετρος του σχήματος Α είναι μεγαλύτερη από την περίμετρο του σχήματος Β.			
Σε 50 ρίψεις ενός νομίσματος, θα εμφανιστούν 25 κεφαλές.			

3/3 Καθεμία από τις παρακάτω προτάσεις, είναι **μερικές φορές** αληθείς. Για κάθε μία από τις προτάσεις γράψτε ένα παράδειγμα ώστε η πρόταση να είναι αληθής κι ένα ώστε η πρόταση να μην είναι αληθής.

Πρόταση	**Παράδειγμα** ώστε η πρόταση να είναι αληθής	**Παράδειγμα** ώστε η πρόταση να μην είναι αληθής
Το άτομο με το μεγαλύτερο πλήθος νομισμάτων έχει το μεγαλύτερο ποσό χρημάτων		
Α – Β = Β – Α		
Αν προσθέσεις τον ίδιο αριθμό στον αριθμητή και στον παρονομαστή ενός κλάσματος, το νέο κλάσμα είναι ίσο με το αρχικό		

Παρατηρήστε ότι για τον PISA είναι επαρκής η εύρεση ενός παραδείγματος κατά περίπτωση.[23] Πιστεύουμε ότι έχει προστιθέμενη μαθηματική αξία η προέκταση αυτών των ερωτημάτων. Θα πρέπει στόχος της διδασκαλίας μας στο Λύκειο να είναι τουλάχιστον ένα σημαντικό ποσοστό των μαθητών να μπορεί να διερευνήσει με ισοδυναμίες πότε είναι αληθής ο τελευταίος προτασιακός τύπος. Δηλαδή να μπορεί να διατυπώσει με αλγεβρικές σχέσεις και να λύσει την άσκηση:

[23] Η έρευνα του PISA γίνεται σε επιλεγμένο δείγμα μαθητών της Α΄ Λυκείου αλλά αφορά τις μαθηματικές γνώσεις που αποκτήθηκαν στο Γυμνάσιο. Οι προεκτάσεις που προτείνουμε αφορούν τη διδασκαλία μας σε επίπεδο μαθητών Λυκείου.

Αν προσθέσεις τον ίδιο αριθμό στον αριθμητή και στον παρονομαστή ενός κλάσματος, σε ποιες περιπτώσεις το νέο κλάσμα είναι ίσο με το αρχικό;

Απάντηση:

Έστω το κλάσμα $\frac{\alpha}{\beta}$, $\beta \neq 0$. Η σχέση που θέλουμε να ελέγξουμε αν είναι αληθής γράφεται

$$\frac{\alpha}{\beta}=\frac{\alpha+x}{\beta+x} \Leftrightarrow \alpha\beta+\alpha x=\alpha\beta+\beta x \quad \Leftrightarrow \alpha x=\beta x$$

$$\Leftrightarrow \quad (\alpha-\beta)x=0 \qquad \Leftrightarrow \alpha=\beta \text{ ή } x=0$$

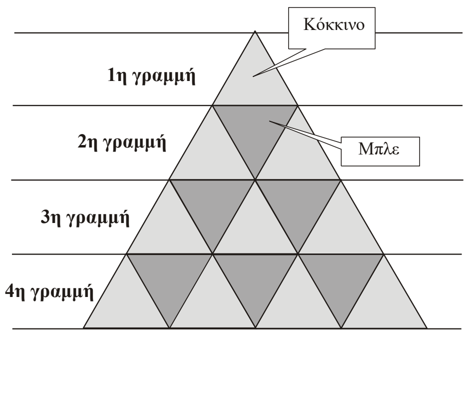
οπότε η πρόταση είναι αληθής είτε αν $\alpha=\beta$ είτε αν $x=0$.

Παραδείγματα αντιστοίχισης νέου Π.Σ. με θέματα PISA

Στο νέο Π.Σ. του Γυμνασίου προστίθενται ενότητες που ασχολούνται με τη μελέτη κανονικοτήτων (μοτίβα). Ας δούμε δύο τέτοια σχετικά προβλήματα από τον PISA, που μπορούν να υποστηρίξουν τη διδασκαλία αυτών των εννοιών.

Στόχοι Κ.7.3. – Κ.7.5. *της Άλγεβρας Α΄ Γυμνασίου*
Να αναπαριστούν κανονικότητες με διάφορους τρόπους, όπως εικόνες ή γεωμετρικά σχήματα, πίνακες τιμών κ.α. (...) Να λύνουν προβλήματα που συναντούν στα Μαθηματικά και την καθημερινή ζωή με κανονικότητες.

ΤΡΙΓΩΝΙΚΟ ΜΟΤΙΒΟ[24]



Δίνεται το σχήμα και ζητείται στην πρώτη ερώτηση ποιο είναι το ποσοστό των μπλε τριγώνων (πιο σκούρων σε αποχρώσεις του γκρι), με δυνατές απαντήσεις 37,5%, 50%, 60%, 62,5%

Στην 1η ερώτηση έχουμε 6 μπλε τρίγωνα σε σύνολο 16, δηλαδή ποσοστό $\frac{6}{16}\cdot 100=37,5\%$.

Στη δεύτερη ερώτηση δίνεται το ίδιο σχήμα και ζητείται το ποσοστό των μπλε τριγώνων στο σύνολο των τριγώνων, αν προσθέσουμε μια επιλέον γραμμή. Δυνατές απαντήσεις 40%, 50%, 60%, 66,7% . Στις δύο πρώτες ερωτήσεις δεν ζητείται αιτιολόγηση.

Σχεδιάζοντας την 5η γραμμή παρατηρούμε ότι τα μπλε τρίγωνα είναι 10 σε σύνολο 25, δηλαδή ποσοστό $\frac{10}{25}\cdot 100=40\%$.

24 [7]. Όλα τα θέματα είναι μεταγλωτισμένα και στα ελληνικά.

Στην τρίτη ερώτηση, ζητείται η εκτίμηση αν το ποσοστό των μπλε τριγώνων θα είναι πάντα μικρότερο του 50%, αν συνεχίσουμε να προσθέτουμε και άλλες γραμμές στο μοτίβο. Εδώ ζητείται επιλογή ΝΑΙ ή ΟΧΙ, με αιτιολόγηση.

Θα βοηθήσει την κατανόηση της κανονικότητας (μοτίβου) η συμπλήρωση ενός πίνακα όπου θα καταγράφεται ο αριθμός των τριγώνων ανά γραμμή

Γραμμή	**Μπλε**	**Κόκκινο**	**Σύνολο**
1	0	1	1
2	1	2	3
3	2	3	5
4	3	4	7
5	4	5	9
……	….	….	….
ν	ν – 1	ν	2ν – 1

Προφανώς, στο διαγωνισμό η απάντηση και η αιτιολόγηση θα δοθούν **παρατηρώντας** ότι σε κάθε βήμα τα κόκκινα είναι ***πάντα*** κατά ένα περισσότερα από τα μπλε, άρα δεν θα μπορούσε στο άθροισμά τους να υπερισχύσουν τα μπλε.[25]

Το παραπάνω θέμα μπορεί να αξιοποιηθεί και στο Λύκειο, στην ενότητα της Αριθμητικής Προόδου, όπου θα μπορούμε, πλέον, να δώσουμε και αλγεβρική απάντηση: Τα σύνολα υπολογίζονται με τη βοήθεια του τύπου αθροίσματος αριθμητικής προόδου.

Τώρα το σύνολο των μπλε είναι ίσο με $\frac{0+\nu-1}{2}\cdot\nu=\frac{\nu(\nu-1)}{2}$, ενώ το σύνολο των τριγώνων είναι $\frac{1+2\nu-1}{2}\cdot\nu=\nu^2$.

Το πηλίκο τους είναι $\frac{\nu(\nu-1)}{2\nu^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\nu-1}{\nu}<\frac{1}{2}$ για κάθε ν.

Έχει ενδιαφέρον η συμπλήρωση ενός εκτεταμένου πίνακα, όπου θα φαίνεται σε κάθε γραμμή και το άθροισμα των τριγώνων (αθροιστική συχνότητα). Στην τελευταία στήλη μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι το σύνολο είναι σε κάθε γραμμή ίσο με το τετράγωνο του αριθμού της γραμμής.

Γραμμή	**Μπλε**	**Άθροισμα γραμμών**	**Κόκκινο**	**Άθροισμα γραμμών**	**Σύνολο**	**Άθροισμα γραμμών**
1	0	0	1	1	1	1
2	1	1	2	3	3	4
3	2	3	3	6	5	9
4	3	6	4	10	7	16

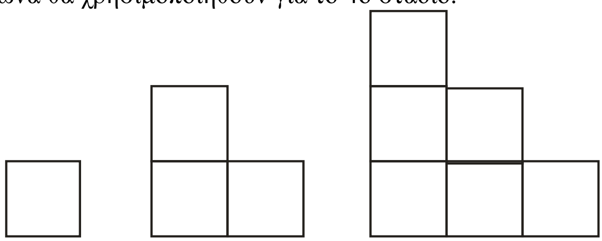
25 Λέμε ότι η απάντηση θα δοθεί με απλή «παρατήρηση», εφόσον το θέμα απευθύνεται σε μαθητές που **δεν** έχουν διδαχθεί Αριθμητική πρόοδο. Να σημειώσουμε εδώ ότι **δεν** έχουμε εντοπίσει στα νέα Π.Σ. του Γυμνασίου κάποια αναφορά στην έννοια του **ποσοστού**. Πιστεύουμε ότι οι συγγραφικές ομάδες θα εντάξουν την έννοια του ποσοστού και τις εφαρμογές της στο κεφάλαιο των κλασματικών αριθμών, με ικανό αριθμό παραδειγμάτων και ασκήσεων.

5	4	10	5	15	9	25
……	….		….		….	
ν	$\nu-1$	$\frac{(\nu-1)\nu}{2}$	ν	$\frac{(\nu+1)\nu}{2}$	$2\nu-1$	ν^2

Αλγεβρικά απαντάμε στο ερώτημα με τη χρήση των τύπων των αθροισμάτων και την ανισοτική σχέση $\frac{\nu(\nu-1)}{2\nu^2} \leq \frac{1}{2} \Leftrightarrow \nu^2 - \nu \leq \nu^2$ που ισχύει για κάθε φυσικό ν. Παρατηρούμε επίσης ότι το ποσοστό των μπλε , σε άπειρες επαναλήψεις, προσεγγίζει το 50%, αφού $\lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{\nu(\nu-1)}{2\nu^2} = \lim\limits_{\nu\to+\infty} \frac{\nu^2}{2\nu^2} = \frac{1}{2}$.

ΣΧΕΔΙΟ ΣΚΑΛΑΣ

Ένα παλιότερο θέμα (PISA 2003) έδινε τα τρία πρώτα στάδια ενός μοτίβου και ζητούσε απλώς πόσα τετράγωνα θα χρησιμοποιηθούν για το 4ο στάδιο.[26]



Στάδιο 1 Στάδιο 2 Στάδιο 3

Τη σωστή απάντηση (10 τετράγωνα) στατιστικά έδωσαν το 66% των παγκοσμίως συμμετεχόντων μαθητών στο πρόγραμμα PISA 2003. Το ερώτημα αντιστοιχεί σε επίπεδο δυσκολίας 484 βαθμών της κλίμακας βαθμολογίας του PISA (μέτρια).[27]

Για να έχουμε ένα μέτρο σύγκρισης, να αναφέρουμε ότι η μέση επίδοση των ελλήνων μαθητών στον PISA 2022 αντιστοιχεί σε 430 βαθμούς (44η θέση), ενώ κατά μέσο όρο 484 βαθμούς πέτυχαν οι μαθητές της Φινλανδίας (20η θέση το 2022).[28]

Τι να κάνουμε

Μπορούμε, βεβαίως, να συνεχίσουμε να κάνουμε αυτό που ως τώρα κάνουμε. Να μην κάνουμε, δηλαδή, τίποτα, περιμένοντας στωικά τα επόμενα αποτελέσματα ως «το χρονικό ενός προαναγγελθέντος θανάτου». Έτσι, για κάποιο διάστημα, μέχρι να (ξανα)ξεχαστεί το θέμα, θα παρακολουθούμε τα δημοσιεύματα για τα χάλια της παιδείας μας, για τις ευθύνες των εκπαιδευτικών, για «μαχαίρια που θα φτάσουν στο κόκκαλο», για μεταρρυθμίσεις που θα

---

26 [8], p.171. Δόθηκε στους μαθητές στην κυρίως έρευνα του 2003.

27 Περισσότερα για τη μέθοδο και τις κλίμακες βαθμολόγησης του PISA υπάρχουν και στο [9], σσ. 29-34.

28 Μια ανάλυση για τα αποτελέσματα του PISA, τις επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών και τους παράγοντες που τις επηρεάζουν περιέχεται στο [10].

ανατρέψουν τα πάντα κ.λπ.[29]

Μπορούμε, απ' την άλλη, να εντάξουμε κάποια ατόφια θέματα του PISA στη διδασκαλία μας, δήθεν προετοιμάζοντας τους μαθητές μας για τους επόμενους διαγωνισμούς.
Είναι σαφές ότι μια αποσπασματική, συνοπτική προετοιμασία ούτε αποτελέσματα θα φέρει, αντιθέτως θα προκαλέσει σύγχυση σε εκπαιδευτικούς και μαθητές.

Μήπως να αφαιρέσουμε κάτι από τα Αναλυτικά Προγράμματα; Λέμε όχι στην ισοπέδωση προς τα κάτω. Όσο πιο χαμηλά θέτουμε τον πήχυ, ώστε «να τον περνούν όλοι», τόσο θα χαμηλώνει και ο μέσος όρος της απόδοσης και θα χάνουμε κι όσους μαθητές θα μπορούσαν να ξεχωρίσουν.

Σε αντιδιαστολή με τα παραπάνω, πιστεύουμε ότι προβλήματα σαν αυτά του PISA 2022 (και κάποια από τα παλαιότερα), θα μπορούσαν να προσθέσουν κάποιες ιδέες και να πλουτίσουν το μάθημα, δίνοντας παραδείγματα σύνδεσης των μαθηματικών με την καθημερινή πραγματικότητα.
Χρειάζεται, λοιπόν, είτε **η προσθήκη στα βιβλία των μαθητών**, είτε **η παραγωγή νέου έντυπου –και σε ηλεκτρονική μορφή– υλικού**, που θα υποστηρίζει την υλοποίηση των διδακτικών στόχων του νέου Π.Σ. μέσω της ενασχόλησης με θέματα του ύφους και της δομής του PISA. Δεν αρκεί, όμως κάτι τέτοιο. Η εμπειρία του παρελθόντος δείχνει ότι χωρίς την υιοθέτηση μηχανισμών συντονισμού και ελέγχου της εφαρμογής των νέων προγραμμάτων, οι καινοτομίες που εισάγουν θα παραμείνουν «ευσεβείς πόθοι» των συντακτών τους.

Πιστεύουμε ότι είναι απαραίτητη η δημιουργία δικτύων επιμόρφωσης, η παροχή κινήτρων και η λήψη μέτρων με τα οποία θα ασκείται έλεγχος από τα θεσμικά όργανα για την υλοποίηση των στόχων των νέων προγραμμάτων σπουδών, καθώς και η υλοποίηση της πρότασης του Ι.Ε.Π. για ένταξη των προβλημάτων στις τελικές εξετάσεις του Γυμνασίου.[30]

Βιβλιογραφία

[1] ΙΕΠ, (2019) Ελληνική Μαθηματική Εκπαίδευση και αξιολόγηση PISA, http://iep.edu.gr/images/IEP/EPISTIMONIKI_YPIRESIA/Epist_Grafeia/Graf_Ereynas_B/PISA/2016_Apologismos_IEP.pdf

[2] Π.Σ. Μαθηματικών Γυμνασίου, (2023) Εφημερίδα της κυβερνήσεως, ΑΠΟ-ΦΑΣΕΙΣ Αριθμ. 4362/Δ2 Τεύχος Β' 235/20.01.2023, *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α', Β' και Γ' τάξεων Γυμνασίου.*

[29] Εκτός των φανταχτερών τίτλων κάποιων Μ.Μ.Ε. που ενδιαφέρονται μόνο για τη δημιουργία εντυπώσεων και αντιμετωπίζουν εντελώς επιφανειακά το θέμα με αφορισμούς και επικίνδυνες ισοπεδωτικές γενικεύσεις, υπάρχουν διαδικτυακές συζητήσεις που συνδέονται στενά με το θέμα της εργασίας και έχουν διεξαχθεί τα τελευταία χρόνια σε Ελληνικούς μαθηματικούς ιστότοπους. Οι συζητήσεις αυτές αποτυπώνουν σε μεγάλο βαθμό τις αντιλήψεις και στάσεις της μαθηματικής εκπαιδευτικής κοινότητας για το πρόγραμμα PISA καθώς και τον τρόπο με τον οποίο προσλαμβάνει τις χαμηλές επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών. Χαρακτηριστικά παραδείγματα από τον μαθηματικό ιστότοπο mathematica.gr στο [11].

[30] Στο Ι.Ε.Π. έχει συνταχθεί από το 2017 σχετική πρόταση για το νομοθετικό πλαίσιο. Δείτε στο [1], σ.σ. 27-28 (Προσάρτημα 1).

https://www.esos.gr/sites/default/files/articles-legacy/fek-2023-tefxos_b-00235-downloaded_-23_01_2023.pdf

[3] Π.Σ. Μαθηματικών Λυκείου, (2023) Εφημερίδα της κυβερνήσεως, ΑΠΟΦΑΣΕΙΣ Αριθμ. 23523/Δ2 Τεύχος Β' 1326/08.03.2023, *Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου.* https://www.alfavita.gr/sites/default/files/2023-03/ΦΕΚ-Β-1326_ΥΑ-23523_Δ2_2_3_23_ΠΣ-ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ-ΓΕΛ.pdf

[4] (PISA, 2021) *PISA 2021 MATHEMATICS: A BROADENED PERSPECTIVE*, OECD, 2018
https://www.oecd.org/pisa/pisaproducts/PISA2021_Mathematics_StrategicDirectionPaper.pdf

[5] (PISA, 2022), *PISA 2022 MATHEMATICS FRAMEWORK*, OECD, 2022
https://pisa2022-maths.oecd.org/ca/index.html#top
Το αρχείο με μορφή κειμένου:
https://pisa2022-maths.oecd.org/files/PISA%202022%20Mathematics%20Framework%20Draft.pdf

[6] CCR, (2016), P*ISA Mathematics in 2021 An analysis of the CENTER FOR CURRICULUM REDESIGN*.
Σε ηλεκτρονική μορφή βρίσκεται στη διεύθυνση:
https://curriculumredesign.org/wp-content/uploads/Recommendations-for-PISA-Maths-2021-FINAL-EXTENDED-VERSION-WITH-EXAMPLES-CCR.pdf

[7] PISA TEST, (2022), PISA 2022 Mathematics test questions, OECD, 2022
https://www.oecd.org/pisa/test/pisa-2022-mathematics-test-questions.htm

[8] (PISA, 2009), *Take The Test: Sample Questions From Oecd's Pisa Assessments* , OECD 2009.

[9] Ρίζος, Γ. (2009). *Στο δρόμο για τον PISA*. Θεσσαλονίκη: Εκδόσεις Μαυρίδη.
Σε ηλεκτρονική μορφή (με την ευγενική προσφορά του εκδότη) βρίσκεται στη διεύθυνση: https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?t=21795

[10] Σοφιανοπούλου Χ., Εμβαλωτής Α., Καρακολίδης Α., Πίτσια Β. (2019), *Μια ανάλυση των αποτελεσμάτων του PISA 2015: Οι επιδόσεις των Ελλήνων μαθητών και οι παράγοντες που τις επηρεάζουν*, ΔιαΝέοσις, Νοέμ. 2019.
Σε ηλεκτρονική μορφή βρίσκεται στη διεύθυνση:
https://www.dianeosis.org/wp-content/uploads/2019/11/final_pisa2015.pdf

[11] Διαδικτυακές συζητήσεις στον ιστότοπο mathematica.gr σχετικά με το μαθηματικό περιεχόμενο του προγράμματος PISA:
https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=6&t=56720&start=20

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=6&t=65386

https://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=45&t=68036

Επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών μέσω των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση στην Ελλάδα: μια πρόταση επιμορφωτικών δράσεων

Μιχαηλίδου Χριστίνα[1], Μπούτσκου Λεμονιά[2], Γραμματικοπούλου Αρχοντία[3]
[1]ΣΕ Μαθηματικών Αν.Θεσσαλονίκης, 6944548464, chrismichailidou@gmail.com
[2]ΣΕ Μαθηματικών Δυτ,Μακεδονίας, 6932459777, lemonmp3@gmail.com
[3]ΣΕ Μαθηματικών Πέλλας, 6973400747, arxontia@gmail.com

Περίληψη
Για να ανταποκριθούν οι εκπαιδευτικοί στις δυναμικές εξελίξεις τόσο στη σύγχρονη κοινωνία όσο και στη τεχνολογία, η επαγγελματική ανάπτυξη (ΕΑ) αποτελεί κρίσιμο στοιχείο. Στο πλαίσιο αυτό, τα νέα προγράμματα σπουδών (ΝΠΣ) στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση μπορούν να λειτουργήσουν ως εργαλεία για την ενίσχυση της ΕΑ των εκπαιδευτικών.Η επιμορφωτική δράση προορίζεται για εκπαιδευτικούς που διδάσκουν μαθηματικά στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση ενώ στοχεύει στην ενίσχυση των δεξιοτήτων και των γνώσεών τους σε πολλαπλούς τομείς.Οι άξονες της επιμορφωτικής δράσης ήταν: η επίλυση προβλήματος, η αποδεικτική διαδικασία η συμπερίληψη και η διαφοροποιημένη διδασκαλία, η διαχείριση του λάθους στην τάξη των μαθηματικών, η δεξιότητα της συνεργασίας και τέλος, οι εναλλακτικοί τρόποι διδασκαλίας.

Abstract
In order for teachers to respond to the dynamic developments in both modern society and technology, professional development (PD) is a critical element. In this context, new curricula (NCPs) in secondary education can serve as key tools for enhancing teachers' PD. The training activity is intended for teachers who teach mathematics in secondary education and aims to enhance their skills and knowledge in multiple areas. The axes of the training action were: problem solving, the evidence-based process, inclusion and differentiated teaching, error management in the mathematics classroom, collaborative skills and finally, alternative ways of teaching.

Εισαγωγή

Ο/η εκπαιδευτικός αποτελεί βασικό παράγοντα της εκπαιδευτικής διαδικασίας, παίζει πολύ σημαντικό ρόλο στην ποιότητα του έργου που παρέχεται κατά τη διαδικασία εκπαίδευσης και καλείται να επαναπροσδιορίσει την επαγγελματική του/της ταυτότητα, ώστε να ανταποκριθεί στους νέους, σύνθετους ρόλους και υποχρεώσεις, τις οποίες επιτάσσουν οι ανάγκες της εποχής (Πετρίδου, 2018). Ταυτόχρονα όμως με όλα τα παραπάνω, ο/η σύγχρονος εκπαιδευτικός καλείται όχι μόνο να κατέχει ένα σύνολο γνώσεων, εμπειριών και πρακτικών αλλά να αποτελεί και ο/η ίδιος/α υποκινητής και φορέας αλλαγών (Day 2003) και επομένως κρίνεται σημαντική η δημιουργία των προϋποθέσεων για την αλλαγή στάσεων, αντιλήψεων και συμπεριφορών του/της εκπαιδευτικού. Η διαδικασία της ΕΑ αποτελεί μια συνεχή διαδικασία, και αυτό επιτυγχάνεται μέσα από την επιμόρφωση. Στα πλαίσια της εκπαίδευσης ενηλίκων εντάσσεται και η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών, η οποία υιοθετεί τις αρχές της στο σχεδιασμό των επιμορφωτικών προγραμμάτων (Θεοδωρίτση&Καλογρίδη, 2020). Εννοιολογικά ως επιμόρφωση, ορίζεται η δυνατότητα παροχής μόρφωσης σε ενηλίκους είτε εξωσχολικά είτε μετασχολικά με σκοπό την κάλυψη κενών στο τομέα της εκπαίδευσης και την εξέλιξή τους επαγγελματικά, προσωπικά και κοινωνικά. Σύμφωνα με τις απαιτήσεις της σημερινής εποχής η ΕΑ δεν πραγματώνεται μόνο με τις παραδοσιακές πρακτικές συμμετοχής σε σεμινάρια και ημερίδες επιμόρφωσης αλλά αποτελεί αναπόσπαστο κομμάτι της προσωπικής ανάπτυξης του ατόμου, ως μια συνεχόμενη δυναμική διαδικασία δια βίου εκπαίδευσης, με ανάπτυξη δεξιοτήτων και επιστημονικών γνώσεων (Garetetal, 2001).

Η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών

Η ΕΑ του /της εκπαιδευτικού είναι η επαγγελματική πρόοδος που καταφέρνει ο/η εκπαιδευτικός, μέσω της οποίας αποκτά μεγαλύτερη εμπειρία σχετικά με το εκπαιδευτικό έργο και αναπτύσσει την κριτική του/της σκέψη με το να στοχάζεται σχετικά με τις διδακτικές μεθόδους (Glatthorn, 1995 όπως αναφέρεται στον Βασιλόπουλο, 2018). Η ΕΑ των εκπαιδευτικών ορίζεται ως μια διεργασία που στοχεύει στη βελτίωση των γνώσεων και των δεξιοτήτων από την μια πλευρά, αλλά και της ίδιας της προσωπικής στάσης των εκπαιδευτικών από την άλλη (Guskey, 2000). Σύμφωνα με τον Feiman-Nemser (2000) ο όρος ΕΑ αναφέρεται στην παροχή ενός συνόλου δυνατοτήτων μάθησης προς τους εκπαιδευτικούς, αποσκοπώντας στην καλλιέργεια στάσεων και ικανοτήτων, ώστε να εξελίξουν το εκπαιδευτικό τους έργο.Υπό αυτή την έννοια σχεδιάστηκε και οργανώθηκε και η 12ωρη επιμορφωτική δράση που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία. Η χάραξη εκπαιδευτικής πολιτικής, η οποία έχει ως στόχο την αναβάθμιση της εκπαίδευσης, δεν είναι δυνατό να πραγματοποιηθεί δίχως την ενίσχυση των εκπαιδευτικών (Φωτοπούλου (2013), όπως αναφέρεται στον Βασιλόπουλο (2018)). Άλλωστε, η ενεργή συμμετοχή και δραστηριοποίηση στη διαμόρφωση επαγγελματικής ταυτότητας του/της εκπαιδευτικού συσχετίζεται άμεσα με τους προσωπικούς και επαγγελματικούς του/της στόχους. Συχνά, το ενδιαφέρον για τη βελτίωση της ποιότητας του έργου τους λειτουργεί εξίσου ως κίνητρο για περαιτέρω εκπαίδευση (Πετρίδου, 2018).

Το ερευνητικό ενδιαφέρον για την ΕΑ των εκπαιδευτικών στα μαθηματικά έχει στραφεί στα δρώμενα στην τάξη, αλλά και στη συμμετοχή των εκπαιδευτικών σε κοινότητες πρακτικής, στις οποίες επικοινωνούν και μοιράζονται τις εμπειρίες τους από την τάξη και συνεργάζονται με εκπαιδευτικούς ή ερευνητές/ερευνήτριες για να διερευνήσουν, να επανεξετάσουν, να τροποποιήσουν και να βελτιώσουν γενικότερα τις διδακτικές τους πρακτικές (Σακονίδης, 2012). Προκειμένου λοιπόν οι εκπαιδευτικοί να ενημερώνονται κατάλληλα για τις εξελίξεις σε ζητήματα που αφορούν το αντικείμενό τους, για άλλα σύγχρονα θέματα που αναπτύσσονται με ταχύτατους ρυθμούς και σχετικά με τις νέες διδακτικές μεθόδους, είναι απαραίτητη η προώθηση μηχανισμών συνεχούς επιμόρφωσης και υποστήριξης των εκπαιδευτικών (Δούκας κ.ά., 2007, όπως αναφέρεται στον Βασιλόπουλο (2018)).

Η επιμόρφωση ως κομμάτι της επαγγελματικής ανάπτυξης

Η επιμόρφωση είναι ένας βασικός παράγοντας που διασφαλίζει ότι οι μεταρρυθμίσεις σε οποιοδήποτε επίπεδο θα είναι αποτελεσματικές, καθώς έχει σημαντικά θετική επίδραση στη βελτίωση και στον εκσυγχρονισμό του εκπαιδευτικού συστήματος και στην απόδοση και τη μάθηση των μαθητών. Ωστόσο, στα περισσότερα εκπαιδευτικά συστήματα οι παραδοσιακές ενδοϋπηρεσιακές δραστηριότητες επιμόρφωσης θεωρούνται γενικές παρά συγκεκριμένες, εστιάζοντας στην ακρόαση παρά στην πράξη, ενώ στερούνται αποτελεσματικών μοντέλων και γενικά δεν έχουν καμία πρόβλεψη για ανατροφοδότηση (Bayrakcı, 2009). Είτε επίσημα είτε ανεπίσημα, όλα τα συστήματα ΕΑ πρέπει να είναι ευέλικτα και ικανά να ανταποκρίνονται στις μεταβαλλόμενες ανάγκες των εκπαιδευτικών. Είναι καθοριστικής σημασίας, οι εκπαιδευτικοί να βρίσκονται στο κέντρο της αλλαγής και η επιμόρφωση να αποτελείται από οργανωμένες δραστηριότητες που συμπληρώνουν την κύρια εκπαίδευση και στοχεύει στην απόκτηση δεξιοτήτων και πρόσθετων σύγχρονων γνώσεων στον τομέα κάθε επιμορφούμενου/ης (Bayrakcı, 2009; Δουλκερίδου, 2015).

Ο Guskey (2000) ανέπτυξε ένα μοντέλο που περιλαμβάνει πέντε επίπεδα αξιολόγησης της ΕΑ τα οποία αναφέρονται στις αντιδράσεις των συμμετεχόντων (ικανοποίηση των συμμετεχόντων από την ΕΑ, χρησιμότητα πληροφοριών, βέλτιστη χρήση του χρόνου τους), στη μάθηση των συμμετεχόντων (μέτρηση των γνώσεων, των δεξιοτήτων και των στάσεων που απέκτησαν), στον αντίκτυπο του προγράμματος στο κλίμα και στα προβλήματα στο σχολείο, στη χρήση των νέων γνώσεων και δεξιοτήτων από τους συμμετέχοντες και τέλος, στα μαθησιακά αποτελέσματα των μαθητών/μαθητριών (αντίκτυπος της ΕΑ στους/στις μαθητές/τριες γνωστικά και στη συμπεριφορά τους). Η Day (2003) επισημαίνει πως οι σχεδιαστές της εκπαιδευτική πολιτικής πρέπει να λαμβάνουν υπόψη τους ότι οι εκπαιδευτικοί σε μια επιμορφωτική διαδικασία είναι οι ίδιοι/ες φορείς γνώσεων και εμπειριών, επιζητούν ενεργό συμμετοχή στη μαθησιακή διαδικασία, χαρακτηρίζονται από προσωπική επαγγελματική θεωρία και συχνά, ως ενήλικες, αντιμετωπίζουν διάφορα προβλήματα.

Ο σχεδιασμός της επιμορφωτικής δράσης και ο άξονες της επιμόρφωσης

Λαμβάνοντας υπόψη τις αλλαγές στη φιλοσοφία των ΝΠΣ,σχεδιάστηκε και οργανώθηκε ένα σύντομο πρόγραμμα επιμόρφωσης 12 ωρών, σύμφωνα με τον "προς τα πίσω" σχεδιασμό του περιεχομένου του εκπαιδευτικού προγράμματος. Αυτό υποδηλώνει ότι πρώτα καθορίζεται το επιθυμητό αποτέλεσμα της επιμόρφωσης, όπως είναι η ανάπτυξη υψηλού επιπέδου μαθηματικού συλλογισμού, επίλυσης προβλημάτων και γενικά η διαμόρφωση στάσεων και πεποιθήσεων που βοηθούν τους μαθητές να αντιμετωπίσουν με αποτελεσματικό τρόπο προβλήματα στα μαθηματικά όπως και εκτός αυτών. Είναι ουσιώδες να καθοριστεί ποιες γνώσεις και δεξιότητες απαιτούνται στο εκπαιδευτικό προσωπικό ενώ ταυτόχρονα πρέπει να επιλεγούν οι καλύτερες δραστηριότητες επαγγελματικής μάθησης για τους εκπαιδευτικούς. Οι άξονες της επιμορφωτικής δράσης «Καλλιέργεια δεξιοτήτων μέσα από τα νέα αναλυτικά προγράμματα σπουδών των μαθηματικών: παραδείγματα και καλές πρακτικές» ήταν οι ακόλουθοι έξι: η επίλυση προβλήματος, η αποδεικτική διαδικασία στο νέο πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά, η συμπερίληψη και η διαφοροποιημένη διδασκαλία, η διαχείριση του λάθους στην τάξη των μαθηματικών, η δεξιότητα της συνεργασίας και τέλος, οι εναλλακτικοί τρόποι διδασκαλίας (clil-Συνδυασμένη Εκμάθηση Επιστημονικού Αντικειμένου και Ξένης Γλώσσας,δημιουργικότητα και μαθηματικά, ανεστραμμένη τάξη, το παιχνίδι στην τάξη των μαθηματικών).

α) Επίλυση προβλήματος

Σύμφωνα με τον οδηγό του εκπαιδευτικού για τα ΝΠΣ τόσο του Γυμνασίου όσο και του Λυκείου

> *Οι μαθητές/-τριες πρέπει να έχουν την ευκαιρία να προτείνουν τις δικές τους λύσεις σε νέες προβληματικές καταστάσεις, αλλά και σε προβλήματα που έχουν διατυπώσει οι ίδιοι/-ες. Οι εκπαιδευτικοί καλούνται να ενθαρρύνουν τα παιδιά να χρησιμοποιούν μια ποικιλία στρατηγικών για την επίλυση ενός προβλήματος.*

Ο άξονας “επίλυση προβλήματος” ήταν ο πρώτος της επιμόρφωσης με κεντρική ομιλήτρια την Ομότιμη Καθηγήτρια, του Παιδαγωγικού Τμήματος του ΑΠΘ, κ. Μαριάννα Τζεκάκη ενώ ταυτόχρονα παρουσιάστηκαν τρεις εργασίες - προτάσεις διδασκαλίας από εκπαιδευτικούς, σε σχέση πάντα με την επίλυση προβλήματος. Κατά τη διάρκεια της επιμόρφωσης οι εκπαιδευτικοί που την παρακολουθούσαν είχαν τη δυνατότητα να θέσουν ερωτήματα στις/στους ομιλήτριες/ομιλητές και να αλληλεπιδράσουν μέσω chat. Επιπλέον, έγινε διαχωρισμός σε ομάδες και τους ζητήθηκε να σχολιάσουν προβλήματα μαθηματικών που αντλήθηκαν μέσα από τα σχολικά βιβλία και να προτείνουν τρόπους βελτίωσης του, εμπλουτισμού ή χρήσης τους στην τάξη των μαθηματικών. Στόχος της δραστηριότητας ήταν οι εκπαιδευτικοί να αποκτήσουν ενεργητικό ρόλο και να μην είναι απλοί θεατές των ομιλιών, να συνεργαστούν μεταξύ τους και να επικοινωνήσουν. Επιπλέον, ήταν σημαντικό να εφαρμόσουν στην πράξη αυτά που η κεντρική ομιλήτρια είχε τονίσει προηγουμένως. Στο ερωτηματολόγιο εξόδου που δόθηκε στους/στις εκπαιδευτικούς απάντησαν πως μόλις το 45,5% χρησιμοποιεί συχνά και σχετικά συχνά την επίλυση προβλήματος ως πλαίσιο και ως στόχο της μάθησης των μαθηματικών. Το 17,7% ακόμη και μετά το πέρας της δράσης δεν έχει ξεκαθαρίσει τη διαφορά ανάμεσα σε άσκηση και μαθηματικό πρόβλημα σύμφωνα πάντα με τα ΝΠΣ ενώ το 54% δηλώνει πως όσες φορές χρησιμοποίησαν το πλαίσιο της επίλυσης προβλήματος αντιμετώπισαν αντίσταση ή αρνητική στάση ορισμένων μαθητών/μαθητριών. Ωστόσο, το 85,4% των συμμετεχόντων και συμμετεχουσών δηλώνει πως οι μαθητές/τριες βρίσκουν εναλλακτικές λύσεις και αναπτύσσουν τη δημιουργικότητά τους αφού τους παρασχεθούν οδηγίες και στρατηγικές επίλυσης των προβλημάτων. Τέλος, οι εκπαιδευτικοί πιστεύουν ότι οι μαθητές/τριεςμπορούν να βελτιώσουν τις δεξιότητες επίλυσης προβλημάτων κυρίως με συνεργασία και ανταλλαγή ιδεών, με χρήση αναπαραστάσεων και γεωμετρικών σχημάτων και με ενίσχυση της δεξιότητας κατανόησης και ανάλυσης κειμένου. Είναι θεαματικό πως το 94,9% δηλώνει πως μετά από τη δίωρη αυτή επιμόρφωση έχουν σκοπό να εντάξουν στη διδασκαλία τους την προσέγγιση επίλυσης μαθηματικού προβλήματος ενώ το 70% περίπου εκφράζει το ενδιαφέρον του να συμμετάσχει και σε μια σχετική με το θέμα κοινότητα πρακτικής.

β) Η αποδεικτική διαδικασία στο νέο πρόγραμμα σπουδών για τα μαθηματικά

Σύμφωνα με τα κείμενα φιλοσοφίας από τα ΝΠΣ

> *Η Ιδέα της απόδειξης στη σχολική τάξη συνδέεται με τη χρήση παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων, αναλογικών και οπτικών συλλογισμών, διαδικασίες εγκυροποίησης, ελέγχου και επαλήθευσης αλλά και δικαιολόγησης και επεξήγησης. Η πορεία την οποία ακολουθεί ο μαθητής προς την κατάκτηση της έννοιας της απόδειξης περιλαμβάνει τα ενδιάμεσα στάδια κατασκευής σχημάτων δικαιολόγησης που έχουν διαισθητική – εμπειρική βάση.*

Κεντρικός ομιλητής για τον δεύτερο άξονα ήταν ο Ομότιμος Καθηγητής, του Μαθηματικού Τμήματος του ΕΚΠΑ, κ. Θεοδόσης Ζαχαριάδης ο οποίος ανέπτυξε το θέμα και ασχολήθηκε και με την παρουσίαση της αναπτυξιακής εξέλιξης τεκμηρίωσης ισχυρισμών στα σχολικά μαθηματικά.Το παράδειγμα με το άθροισμα των γωνιών σε ένα τρίγωνο προκάλεσε το ενδιαφέρον των εκπαιδευτικών και δόθηκε έτσι το πέρασμα στη δραστηριότητα στις ομάδες όπου θα έπρεπε οι ίδιοι/ίδιες να σχολιάσουν μια απόδειξη σχετικά με τη σχέση που συνδέει εγγεγραμμένη και επίκεντρη γωνία όταν βαίνουν σε ίδιο τόξο. Η συζήτηση που ακολούθησε είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον ενώ στη συνέχεια δυο εκπαιδευτικοί παρουσίασαν τις δικές τους προτάσεις σε σχέση με το θέμα. Παρουσιάστηκε η απόδειξη θεωρημάτων μέσα από ομαδοσυνεργατικές διαδικασίες τύπου jigsawκαι η οπτικοποίηση ως μέθοδος απόδειξης. Η Συνεργατική Συναρμολόγηση (Jigsaw) είναι μία μέθοδος συνεργατικής μάθησης και θεωρείται από τις πιο δημοφιλείς τεχνικές για την προώθηση της συνεργασίας και συζήτησης μεταξύ των μελών μιας κοινότητας αφού κάθε κομμάτι-μαθητής/τρια είναι αναγκαίο και απαραίτητο για την επιτυχή συμπλήρωση και το σχηματισμό της συνολικής εικόνας (επίλυσης προβλήματος ή ολοκλήρωσης του έργου).Από το ερωτηματολόγιο εξόδου που δόθηκε διαπιστώθηκε πως η συντριπτική πλειοψηφία (97,3%) πιστεύουν ότι η διδακτική προσέγγιση της επίλυσης προβλημάτων συνδέεται με την έννοια της μαθηματικής απόδειξης και το 93,8% πως η κατασκευή απόδειξης είναι μια εργασία επίλυσης προβλήματος. Ωστόσο, είναι μάλλον διχασμένοι/διχασμένες σχετικά με το αν οι μεγάλες σε έκταση υποβοηθούμενες από Η/Υ αποδείξεις πρέπει να θεωρούνται σαν μαθηματικοί υπολογισμοί παρά σαν μαθηματικές αποδείξεις (49,3% ναι και 45,9% όχι). Το 75,3% θεωρεί πως με τη μορφή που δίνονται στα σχολικά εγχειρίδια οι αποδείξεις οι μαθητές ταυτίζουν την απόδειξη με τη βασική ευθεία απόδειξη. Το 18,5% θεωρεί πως το αντιπαράδειγμα δεν είναι απόδειξη. Το παραπάνω εύρημα καλό θα ήταν να ερευνηθεί περαιτέρω σε ένα επόμενο στάδιο. Στα ΝΠΣ οι μαθητές εισάγονται στην αποδεικτική διαδικασία. Το 93,8% των εκπαιδευτικών απάντησαν πως πιστεύουν ότι αυτό συμβάλλει στην καλύτερη κατανόηση της αποδεικτικής διαδικασίας στο Γυμνάσιο.

γ) Η συμπερίληψη και η διαφοροποιημένη διδασκαλία

Το ΠΣ υποστηρίζει διδακτικές στρατηγικές συμπερίληψης και διαφοροποίησης αναγνωρίζοντας ότι οι μαθητές/τριες διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο και τον ρυθμό που μαθαίνουν, ως προς τα ενδιαφέροντά τους, τις προηγούμενες γνώσεις και τις εμπειρίες τους, την κουλτούρα τους και τη γλώσσα τους. Πιο συγκεκριμένα, σύμφωνα με το ΝΠΣ:

> *Το ΠΣ υποστηρίζει διδακτικές στρατηγικές συμπερίληψης και διαφοροποίησης αναγνωρίζοντας ότι οι μαθητές/-τριες διαφέρουν μεταξύ τους ως προς τον τρόπο και τον ρυθμό που μαθαίνουν, τα ενδιαφέροντά τους, τις προηγούμενες γνώσεις και τις εμπειρίες τους, την κουλτούρα και τη γλώσσα τους.*

Στον τρίτο άξονα της επιμόρφωσης κεντρική ομιλήτρια ήταν η κ. Ιωάννα Ντέρη, Ψυχολόγος – Φιλόλογος και τ. Υπεύθυνη Προγραμμάτων Αγωγής Υγείας της ΔΔΕ Ανατολικής Θεσσαλονίκης. Ανέλυσε τη σημασία του όρου «συμπερίληψη», το θεωρητικό/υποστηρικτικό υπόβαθρο, τις συγγενείς έννοιες και το πώς ένα σχολείο γίνεται συμπεριληπτικό. Τέλος, αναφέρθηκε στις δυσκολίες που υπάρχουν για την εφαρμογή της συμπεριληπτικής εκπαίδευσης και έκλεισε την ομιλία της με ένα infographic (μια οπτική αναπαράσταση κάθε είδους πληροφορίας ή δεδομένων) που περιγράφει εύγλωττα ότι το μόνο κοινό στοιχείο που έχουν όλοι οι άνθρωποι μεταξύ τους είναι οι διαφορές τους. Μετά την ομιλία ακολούθησε συζήτηση και το παιχνίδι ρόλων onestepforward (κάνε ένα βήμα μπροστά), το οποίο αποτελεί ψηφιακή προσαρμογή και προσαρμογή ως προς το αντικείμενο της αντίστοιχης δραστηριότητας του Compass. Οι εκπαιδευτικοί μοιράστηκαν σε 14 ομάδες και μπήκαν στα αντίστοιχα δωμάτια όπου συζήτησαν για τον ρόλο που τους έχει δοθεί, για τις συνθήκες τα αντίστοιχα σχολεία και τα προβλήματα που ενδεχομένως να είχαν στον εικονικό τους ρόλο. Ο κάθε ρόλος αφορούσε εκπαιδευτικό σε κάποιο σχολείο επαρχίας ή μεγαλούπολης και μπορεί να ήταν ιδιωτικό, δημόσιο, ειδικό, γενικό, ημερήσιο, εσπερινό, με πλειοψηφία παιδιών ρομά, διαπολιτισμικό, με παιδιά πρόσφυγες, μουσικό, καλλιτεχνικό, τμήμα ένταξης κλπ. Στη συνέχεια οι εκπαιδευτικοί βγήκαν από τα εικονικά δωμάτια και απάντησαν σε ερωτήσεις ατομικά δηλώνοντας συμφωνία ή διαφωνία στις δηλώσεις που διάβαζε η ομιλήτρια. Στη συνέχεια παρουσιάστηκαν τρεις εργασίες με καλές πρακτικές από συναδέλφους με θέμα τη διαφοροποιημένη διδασκαλία στα μαθηματικά με σκοπό την συμπερίληψη. Από το ερωτηματολόγιο προέκυψε ότι περίπου το 73,7% των συμμετεχόντων χρησιμοποιούν αρκετά ή πολύ πρακτικές συμπερίληψης στην τάξη τους ωστόσο το 80,3% δηλώνουν ότι βρίσκουν εμπόδια στην εφαρμογή πρακτικών συμπερίληψης λόγω κουλτούρας του σχολείου. Το 75% θεωρεί πως οι συμπεριληπτικές τακτικές σε μια τάξη εφαρμόζονται με ομαδικές εργασίες, με την ανάπτυξη διαλόγου και με την παρουσίαση εργασιών με βιωματικό τρόπο. Το 86,8% πιστεύει πως η χρήση από τον/την εκπαιδευτικό διαφορετικής μεθόδου καθημερινά, όπως μετωπική, συνεργατική μέθοδο και χρήση ποικίλων υλικών όπως βιβλίο, διαδίκτυο, μελέτη στατιστικών συνάδει με τις αρχές της διαφοροποιημένης διδασκαλίας.

δ) Η διαχείριση του λάθους στην τάξη των μαθηματικών

Σύμφωνα με τον οδηγό του εκπαιδευτικού για τα ΝΠΣ τόσο του Γυμνασίου όσο και του Λυκείου:

> *Τα λάθη οδηγούν σε νέες ερωτήσεις και απορίες. Συχνά επιτρέπουν να αναδειχθούν νοήματα που δεν έχουν επαρκώς συγκροτηθεί από τους μαθητές. Τα λάθη επιτρέπουν μια βαθύτερη κατανόηση των παρανοήσεων που έχουν αναπτύξει οι μαθητές, με αποτέλεσμα ο εκπαιδευτικός να διαμορφώνει πληρέστερη αντίληψη των αδυναμιών τους. Η αναζήτηση του λάθους μετατοπίζει το βάρος από το αποτέλεσμα προς το συλλογισμό και τη μαθηματική επιχειρηματολογία. Έτσι, οι μαθητές διευκολύνονται στη σταδιακή ανάπτυξη ορθών μαθηματικών συλλογισμών.*

Η καθημερινή διδακτική πράξη διέπεται από 'νόρμες' εργασίας του/της εκπαιδευτικού, όπως είναι η διαχείριση του λάθους και η διαχείριση της μαθηματικής επικοινωνίας. Πρόκειται για πρακτικές διδακτικής διαχείρισης της μάθησης των μαθηματικών σε μικρο-επίπεδο, οι οποίες διαδραματίζουν κρίσιμο ρόλο στην διαμόρφωση του μαθηματικού νοήματος από τους/τις μαθητές/τριες. Η αναγκαιότητα και σπουδαιότητα των παραπάνω έγινε εμφανής και από τη δομή των σεναρίων που δημιούργησαν οι επιμορφούμενοι/ες στις δύο φάσεις επιμόρφωσης στα ΝΠΣ όπου υπήρχε ξεχωριστό πεδίο στη διδακτική πλαισίωση και διαχείριση σε σχέση με τον/την μαθητή/τρια και τη μάθηση όπου ήταν απαραίτητο να γίνει παράθεση σύντομων βιβλιογραφικών δεδομένων για τον τρόπο σκέψης των μαθητών/τριων, τις δυσκολίες που αντιμετωπίζουν στην κατανόηση της μαθηματικής ιδέας (έννοια, διαδικασία, διεργασία) που αποτελεί αντικείμενο μάθησης στη συγκεκριμένη ενότητα.
Στον τέταρτο άξονα της επιμόρφωσης ομιλητής ήταν ο κ. Θωμαΐδης, Δρ. Μαθηματικών και τέως Σχολικός Σύμβουλος. Στην εισήγηση συζητήθηκαν ορισμένα παραδείγματα λαθών που οφείλονται σε έλλειψη εννοιολογικής κατανόησης ή σε παρανοήσεις βασικών μαθηματικών εννοιών. Δίνεται έμφαση στην αξιολόγηση διδακτικών παρεμβάσεων και δραστηριοτήτων που έχουν στόχο την αντιμετώπιση σημαντικών προβλημάτων της διδασκαλίας και μάθησης των Μαθηματικών. Επιπλέον, οι εκπαιδευτικοί κατά τη διάρκεια της εισήγησης δραστηριοποιούνται και αποκτούν ουσιαστικά ρόλο μελετητή της διδακτικής εργαζόμενοι σε ομάδες σε δυο διαφορετικές δραστηριότητες. Στην πρώτη έμφαση δόθηκε στο πρόβλημα της ανίχνευσης και αξιολόγησης του λάθους ενώ στη δεύτερη στο πρόβλημα της μετάβασης από την Αριθμητική στην Άλγεβρα.
Στο ερωτηματολόγιο εξόδου το 81,5% των εκπαιδευτικών απάντησε πως χρησιμοποιούν το λάθος του παιδιού κατά τη διδασκαλία ως εκπαιδευτική ευκαιρία για όλη την τάξη και το θεωρούν ευκαιρία για βελτίωση. Το 82,4% θεωρούν πως τα λάθη ο/η εκπαιδευτικός μέσα στην τάξη πρέπει να το διαχειρίζεται με δημιουργικές μεθόδους όπως ομαδική συζήτηση του λάθους ενώ το 16,9% με ενθάρρυνση και υποστήριξη. Η ενσωμάτωση του λάθους στην εκπαιδευτική διαδικασία επιτυγχάνεται κυρίως χρησιμοποιώντας τα λάθη ως παραδείγματα σε ολόκληρη την τάξη ή ενσωματώνοντας ασκήσεις αυτοδιόρθωσης. Ως αποτελεσματικές στρατηγικές για τη διόρθωση των λαθών οι εκπαιδευτικοί επισημαίνουν την ομαδική συζήτηση και ανάλυση του λάθους, την αυτοδιόρθωση από τον μαθητή/τρια και τέλος, τη χρήση τεχνολογικών εργαλείων για ανατροφοδότηση (σε φθίνουσα διάταξη σπουδαιότητας). Το 87,5% προσαρμόζει τις αντιδράσεις του/της στα λάθη ανάλογα με τις ατομικές ανάγκες του κάθε μαθητή/τριας ενώ οι περισσότεροι/περισσότερες κρίνουν καθοριστικό τον ρόλο της

ανατροφοδότησης στη διαχείριση των λαθών γιατί τους/τις βοηθά να βελτιώνονται. Οι στρατηγικές που εφαρμόζουν σε σχέση με την αντιμετώπιση των μαθητών/τριών που φοβούνται να κάνουν λάθη είναι η χρήση θετικής ενίσχυσης όταν προσπαθούν, ακόμα και αν κάνουν λάθη, η ενθάρρυνση να δοκιμάζουν ακόμα και αν κάνουν λάθη και τέλος, η βοήθεια στο να καταλάβουν ότι τα λάθη είναι φυσικό μέρος της μάθησης (σε φθίνουσα διάταξη σπουδαιότητας).

ε) Η δεξιότητα της συνεργασίας

Ένα από τα καινούργια στοιχεία των ΝΠΣ στα Μαθηματικά είναι οι κοινωνικές, πολιτισμικές και συναισθηματικές πρακτικές. Αυτές οι πρακτικές προωθούνται όταν οι εκπαιδευτικοί διευκολύνουν τη συνεργασία σε ομάδες αναπτύσσοντας έτσι συνήθειες όπως να ακούν και να προσπαθούν να κατανοούν τις εξηγήσεις των συμμαθητών τους, να συζητούν τις διαφωνίες τους στην ομάδα και να καταλήγουν σε κοινά αποδεκτές λύσεις.

Ένα συνεργατικό περιβάλλον επιταχύνει την ανάπτυξη μαθηματικών ιδεών και παράλληλα συνεισφέρει στην ανάπτυξη αυτοπεποίθησης, συναισθημάτων ικανοποίησης και δημιουργία δεσμών συνάφειας με τα υπόλοιπα μέρη του συνόλου. Η κοινωνική δυναμική που δημιουργείται συνεισφέρει θετικά στη συμπερίληψη όλων των μαθητών σε ένα σύνολο ισότιμης συμμετοχής και δημιουργίας.

Η συνεργασία επεκτείνεται και μεταξύ συναδέλφων με τη δυνατότητα της δημιουργίας κοινοτήτων πρακτικής εφαρμόζοντας μελέτες περίπτωσης όπου οι εκπαιδευτικοί συνεργάζονται για να σχεδιάσουν από κοινού μαθήματα, στήνουν το σχέδιο μαθήματος και τα φύλλα εργασίας. Ανάμεσα στα θετικά είναι η αλληλεπίδραση των εκπαιδευτικών, η υιοθέτηση νέων τρόπων σκέψης, η δυνατότητα που τους δίνεται να προβληματιστούν σχετικά με τη διδασκαλία και τη μάθηση των μαθηματικών ενώ ταυτόχρονα αναλαμβάνουν την ευθύνη για την ατομική τους επαγγελματική εξέλιξη. Στον πέμπτο άξονα της επιμόρφωσης ομιλήτριες ήταν οι σύμβουλοι εκπαίδευσης που την διοργάνωσαν. Δόθηκαν παραδείγματα διαφορετικών μεθόδων διδασκαλίας που στηρίζονται στην ομαδοσυνεργατική και οι εκπαιδευτικοί εργάσθηκαν σε ομάδες πάνω σε μια μελέτη περίπτωσης αναφορικά με την εφαρμογή της εργασίας σε ομάδες σε μια σχολική μονάδα και το αίσθημα ματαίωσης που αισθάνθηκε μια εκπαιδευτικός. Στο δεύτερο κομμάτι της επιμόρφωσης δόθηκε η δυνατότητα σε 7 εκπαιδευτικούς να παρουσιάσουν δικές τους προτάσεις που στηρίζονται στη συνεργασία είτε εκπαιδευτικών είτε μαθητών/τριών.

στ) Εναλλακτικοί τρόποι διδασκαλίας

Στο τελευταίο δίωρο της επιμόρφωσης ο λόγος δίνεται στους/στις εκπαιδευτικούς προκειμένου να παρουσιάσουν δικές τους προτάσεις εναλλακτικών τρόπων διδασκαλίας. Παρουσιάστηκαν δημιουργικές προτάσεις όπως ένας όμιλος μαθηματικών με στόχο την επαφή με τις τέχνες και τη δημιουργικότητα, μια πρόταση για Μαθηματικό Θέατρο, πρόταση δημιουργικής γραφής στα Μαθηματικά μέσα από ένα παραμύθι για τη γωνία και τέλος, η σύνδεση των μαθηματικών με την μουσική. Επιπλέον, ανάμεσα στις καινοτόμες πρακτικές που παρουσιάστηκαν υπήρχαν και μαθήματα που στηρίζονται στις νέες τεχνολογίες και τα δυναμικά και διαδραστικά περιβάλλοντα όπως το GeogebraClassroom, ένα μάθημα που βασίζεται στην τεχνική CLIL καθώς και η χρήση της οπτικοποίησης ως αποδεικτική διαδικασία. Παράλληλα, οι επιμορφούμενοι/ες ήρθαν σε επαφή με μια διδασκαλία μέσω ανεστραμμένης τάξης ενώ τέλος, παρουσιάστηκε η διδασκαλία των συναρτήσεων στη Β΄ Γυμνασίου μέσα από μια προσέγγιση που στηρίζεται στις ομαδοσυνεργατικές μεθόδους μέσω προβλημάτων της καθημερινής ζωής.

Συμπεράσματα - Συζήτηση

Η ΕΑ των εκπαιδευτικών μέσω των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών απαιτεί πολυδιάστατες δράσεις που καλύπτουν τις προκλήσεις της εκπαιδευτικής κοινότητας. Η επιμορφωτική δράση που παρουσιάζεται στην παρούσα εργασία αποτελεί μια πρόταση που μπορεί να βοηθήσει τους /τις εκπαιδευτικοί στην αποτελεσματικότερη εφαρμογή των ΝΠΣ για το κοινό καλό των μαθητών και της κοινωνίας. Ανάμεσα στα οφέλη της επιμόρφωσης είναι ο/η εκπαιδευτικός να μπορεί αφενός να αναστοχάζεται πάνω στην προσωπική του/της θεωρία για την εκπαίδευση, τον σκοπό της, τις διαδικασίες μάθησης και τα αποτελέσματά τους και αφετέρου να αξιοποιεί σύγχρονες παιδαγωγικές προσεγγίσεις, μεθόδους και τεχνικές για να βοηθήσει τους μαθητές/τριες να επιτύχουν τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα. Πειραματίζεται με τη βελτιστοποίηση του υλικού του μετατρέποντας ασκήσεις σε προβλήματα κριτικής σκέψης, μεταβαίνει από την ατομική μάθηση στην ομαδοσυνεργαστική, ενσωματώνει στη διδασκαλία του παιδαγωγικές προσεγγίσεις, τεχνικές διδασκαλίας και αξιολόγησης που αναπτύσσουν τις ικανότητες για δημοκρατικό πολιτισμό. Η αξιολόγηση της επιμορφωτικής διαδικασίας είναι βασική για τη διάκριση των θετικών και αρνητικών παραγόντων και αποτελεί αναπόσπαστο μέρος της. Η συστηματική συλλογή και ανάλυση των στοιχείων θα συμβάλλει σημαντικά στην επιτυχία των προσπαθειών επαγγελματικής ανάπτυξης (Guskey, 2000). Για το σκοπό αυτό στο τέλος κάθε επιμέρους άξονα της επιμορφωτικής δράσης οι εκπαιδευτικοί συμπλήρωναν ηλεκτρονικά ένα ερωτηματολόγιο προκειμένου να μελετηθούν οι στάσεις και οι απόψεις τους σε σχέση με το θέμα ενώ στο τελευταίο δίωρο δόθηκε ένα ερωτηματολόγιο αξιολόγησης της επιμορφωτικής δράσης.

Βιβλιογραφία

1. Βασιλόπουλος, Χ. (2018). Η επαγγελματική ανάπτυξη του εκπαιδευτικού ως μοχλός αποτελεσματικής διαχείρισης της σχολικής τάξης. EducationSciences, 2018(3), 68-81.
2. Δουλκερίδου, Π. (2015). Η επιμόρφωση των εκπαιδευτικών και διευθυντών των σχολικών μονάδων πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης. Επισκόπηση του νομοθετικού πλαισίου. Παιδαγωγική Επιθεώρηση. Τόμος 32, τ.59. σσ.83-98. Αθήνα: Διάδραση
3. Θεοδωρίτση, Δ., &Καλογρίδη, Σ.Σ. (2020). Η επιμόρφωση ως παράγοντας επαγγελματικής και προσωπικής ανάπτυξης των εκπαιδευτικών: Η περίπτωση του Μείζονος Προγράμματος Επιμόρφωσης. *Ανοικτή Εκπαίδευση,* 16(2), 110-127.
4. Πετρίδου, Α. (2021). Επαγγελματική ανάπτυξη εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης στα μαθηματικά στο πλαίσιο μιας κοινότητας πρακτικής. Έρευνα στη Διδακτική των Μαθηματικών, (15), 81–107.
5. Π.Σ. Γυμνασίου: (Φ.Ε.Κ. Β΄ 235, 20-1-2023)
6. Π.Σ. Λυκείου: (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1326, 8-3-2023)
7. Σακονίδης, Χ. (2012). Διαχείριση της μαθηματικής δραστηριότητας και συγκρότηση του μαθηματικού νοήματος στην τάξη: μια κρίσιμη σχέση για την ανάπτυξη της διδακτικής πρακτικής. *Στο Ε. Κολέζα, Α. Γαρμπής και Χ. Μαρκόπουλος (Εκδ.) Πρακτικά Συνεδρίου:"Καινοτόμες Προσεγγίσεις στην Εκπαίδευση: Σχεδιασμός και Δικτύωση*, 109-132.
8. Bayrakcı, M. (2009). In-service teacher training in Japan and Turkey: A comparative analysis of institutions and practices. Australian Journal of Teacher Education, 34(1), 2.
9. Day, C. (2003). Η εξέλιξη των εκπαιδευτικών: Οι προκλήσεις της δια βίου μάθησης. Αθήνα: ΕκδόσειςΤυπωθήτω
10. Feiman-Nemser, S. (2000). From preparation to practice: Designing a continuum to strengthen and sustain teaching. Occasional Paper Series, (5).
11. Garet, S. Michael., Porter, C. Andrew., Desimone, Laura, Birman, F. Beatrice. ,Cohen, L., Manion, L. & Morrison, K. (2008). Μεθοδολογία Εκπαιδευτικής Έρευνας. Αθήνα: Μεταίχμιο Goos, M., Dole, S., &Geiger, V. (2011). Improving numeracy education in rural schools: A professional development approach. *Mathematics Education Research Journal*, *23*, 129-148.
12. Guskey, T. R. (2000). Evaluating professional development. Corwin Press

Η αξιοποίηση της θεωρίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών στην διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας
Μία πρόταση με αφορμή τα νέα Προγράμματα Σπουδών

Νικόλαος Τερψιάδης
6948076933, Δημητσάνας 29, 56626 Θεσσαλονίκη
n.terpsiadis@gmail.com

Περίληψη

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, έχοντας ένα ιστορικό έρεισμα, προσφέρουν την δυνατότητα οπτικοποίησης και ταξινόμησης των γεωμετρικών κανονικοτήτων. Είναι δυνατόν να αποκαλύψουν το παρασκήνιο της γεωμετρικής σκέψης και να συμβάλλουν στην καλλιέργεια ενός οπτικού εγγραμματισμού που μπορεί να χρησιμεύσει ως υπόβαθρο στην διαπραγμάτευση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Abstract

Geometric transformations, having a historical foundation, offer the possibility of visualizing and classifying geometric regularities. They can reveal the background of geometric thinking and contribute to the cultivation of a visual literacy that can serve as a background for the negotiation of Euclidean Geometry.

Οι στόχοι της διδασκαλίας της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Α΄ Λυκείου, όπως καθορίζονται από την φιλοσοφία και από τα προσδοκώμενα μαθησιακά αποτελέσματα των νέων Προγραμμάτων Σπουδών των Μαθηματικών (ΙΕΠ, 2021α; Υπ. Απόφαση 4362/Δ2/2023; Υπ. Απόφαση 23523/Δ2/2023), ανήκουν στο επίπεδο 4 του μοντέλου vanHieleγια την διδασκαλία και την μάθηση της Γεωμετρίας (Usiskin, 1982; Θωμαΐδης & Πούλος, 2006), γεγονός που προϋποθέτει ότι οι μαθητές θα πρέπει να κατέχουν σε υψηλό βαθμό τις δεξιότητες που περιλαμβάνονται στα προηγούμενα επίπεδα. Οι μαθητές της Α΄ Λυκείου, πολύ συχνά δεν έχουν κατακτήσει τις δεξιότητες των προηγούμενων επιπέδων (Θωμαΐδης, 2014& 2015)και αυτό δημιουργεί προβλήματα και δυσκολίες στη διαπραγμάτευση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Καθώς τα επίπεδα του θεωρητικού μοντέλου των van Hiele δεν αποτελούν στοιχεία βιολογικής ωρίμανσης, όπως τα επίπεδα της θεωρίας του Piaget, αλλά είναι αποτέλεσμα μιας διαδικασίας μαθητείας (Usiskin, 1982), είναι φανερό ότι τέτοιου είδους προβλήματα και δυσκολίες είναι δυνατόν να αντιμετωπιστούν με κατάλληλες διδακτικές παρεμβάσεις.

Η διαπιστωμένα συχνή έλλειψη δεξιοτήτων που ανήκουν στα προηγούμενα επίπεδα του μοντέλου van Hiele(Θωμαΐδης, 2014 & 2015) μπορεί να συσχετιστεί με την έλλειψη οπτικής εξοικείωσης των μαθητών με τα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους (Πούλος, 2015). Πολλοί μαθητές, όταν κοιτούν ένα σχήμα δεν βλέπουν ότι μπορεί να δει σε αυτό το σχήμα ένας έμπειρος μαθηματικός και μάλιστα δεν βλέπουν όλοι οι μαθητές τα ίδια πράγματα όταν κοιτούν το ίδιο σχήμα. Έτσι δημιουργούνται ατομικές δυσκολίες στους μαθητές και συλλογικές δυσκολίες στην διαχείριση της τάξης οι οποίες μάλιστα δεν είναι εμφανείς καθώς βρίσκονται στο παρασκήνιο της γεωμετρικής σκέψης.Προκειμένου να επιτευχθεί μία όσο το δυνατόν κοινή αντιληπτική βάση πάνω στην οποία θα είναι δυνατόν να συζητηθεί στην τάξη η λύση ενός γεωμετρικού προβλήματος, είναι σημαντικό να ενισχυθεί η ικανότητα των μαθητών να παρατηρούν και να εντοπίζουντις κανονικότητες που υλοποιούνται στα σχήματα των γεωμετρικών προβλημάτων και να αντιλαμβάνονται γεωμετρικές ιδιότητες και γεωμετρικές σχέσεις που συχνά δεν είναι εμφανείς με την πρώτη ματιά. Η ανάγκη της οπτικής εξοικείωσης των μαθητών με τα γεωμετρικά σχήματα και τις γεωμετρικές σχέσεις έχει εμφατικά επισημανθεί (Πούλος, 2015) και η σημασία της έχει καταδειχθεί από διάφορες οπτικές. Δεδομένα της Εξελικτικής Ψυχολογίας ενισχύουν τα επιχειρήματα για την ανάγκη οπτικής εξοικείωσης με τα γεωμετρικά σχήματα, ως απαραίτητο στάδιο για σύνθετες δραστηριότητες, όπως είναι οι αποδείξεις και οι γεωμετρικές κατασκευές (Λούρια, 1992). Επίσης, ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών αναγνωρίζουν την παιδαγωγική αξία της οπτικής αναγνώρισης γεωμετρικών σχημάτων και προτείνουν εκπαιδευτικά προγράμματα που συμβάλλουν στη βελτίωση αυτής της ικανότητας (Πούλος, 2015). Θεωρείται ότι οι αναπαραστάσεις και η οπτικοποίηση αποτελούν τον πυρήνα της κατανόησης στα Μαθηματικά και ότι δεν είναι δυνατόν να υπάρξει κατανόηση χωρίς οπτικοποίηση(Duval, 1999 & 2006).

Η διαδικασία της οπτικής εξοικείωσης των μαθητών με τα γεωμετρικά σχήματα, τις ιδιότητές τους και τις μεταξύ τους σχέσεις συνδέεται με την έννοια του οπτικού εγγραμματισμού, που συνίσταται την ικανότητα δημιουργίας, χρήσης και κριτικής αποτίμησης οπτικών εννοιών και παραγωγής οπτικών μηνυμάτων (Kress&VanLeeuwen, 2001). Θα ήταν χρήσιμο και βοηθητικόγια την διαπραγμάτευση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας να αναπτυχθεί και να καλλιεργηθείένα είδος οπτικού εγγραμματισμούως υπόβαθρο για την εισαγωγή των μαθητών στις διαδικασίες των παραγωγικών συλλογισμών και της απόδειξης.Οι μελέτες της θεωρίας του οπτικού εγγραμματισμού αναφέρονται στην ανάγκη να οπτικοποιήσουμε μία πληροφορία προκειμένου να συζητήσουμε λογικά και κριτικά γύρω από αυτήν και να την τεκμηριώσουμε με επιχειρήματα (Πούλος, 2015) ενώ οι δεξιότητες που καθιστούν ένα άτομο οπτικά εγγράμματο, μπορούν και πρέπει να διδαχθούν με κάποιον τυπικό τρόπο (Duval, 1999).

Ένα μέσο για να καλλιεργηθεί η οπτική εξοικείωση των μαθητών με τα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους είναι οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί, οι οποίοι επανέρχονται στην διδακτέα ύλη του Γυμνασίου και του Λυκείου με τα νέα Προγράμματα Σπουδών (Υπ. Απόφαση 4362/Δ2/2023; Υπ. Απόφαση 23523/Δ2/2023). Η ιστορική εξέλιξη των γεωμετρικών μετασχηματισμών, συνδέεται με την οπτικοποίηση των γεωμετρικών ιδεών. Αυτό που στη σύγχρονη γλώσσα της θεωρίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών ονομάζουμε ισομετρίες έχει παίξει ιστορικά έναν σημαντικό ρόλο στην ανάπτυξη της τέχνης, της τεχνολογίας και εν τέλει, της ίδιας της Γεωμετρίας. Μπορούμε να πούμε ότι οι ισομετρίες αποτελούν μία παγκόσμια γλώσσα καθώς όλοι οι πολιτισμοί που άκμασαν στον πλανήτη από την μακρινή αρχαιότητα έως σήμερα, ακόμη και αυτοί που δεν είχαν αλληλεπιδράσεις μεταξύ τους, χρησιμοποίησαν στις διακοσμητικές τους τέχνες τις ίδιες μαθηματικές ιδέες που στην σημερινή γλώσσα των γεωμετρικών μετασχηματισμών αναφέρονται ως οι ισομετρίες της μετατόπισης, της στροφής, της ανάκλασης και της ολισθανάκλασης[31] (Stevens, 1985; Horne, 2000; Baloglou, 2007). Υπάρχουν αρχαιολογικά ευρήματα από την παλαιολιθική εποχή που μαρτυρούν μία ιδιαίτερη σχέση της σκέψης και των τεχνουργημάτων των πρώιμων ανθρώπων και του σύγχρονου ανθρώπου με τις συμμετρίες (Tyldesley, 1987;Pelegrin, 1993;Mithen, 2010) και δείχνουν ότι οι συμμετρίες βρίσκονται στις απαρχές της γεωμετρικής σκέψης καθώς ο προϊστορικός άνθρωπος αποτύπωσε όχι αντικείμενα του πραγματικού κόσμου που διαθέτουν συμμετρίες αλλά την ίδια την ιδέα της συμμετρίας σε αφηρημένη, οπτική μορφή (Vavilova&Tetyana, 2014; Τερψιάδης, 2023). Από την σκοπιά των γνωστικών νευροεπιστημών, υπάρχουν έρευνες που δείχνουν ότι αυτό που διαφοροποιεί τον ανθρώπινο νου από το υπόλοιπο ζωικό βασίλειο και τον κάνει μοναδικό, είναι οι γεωμετρικές διαισθήσεις που διαθέτει (Dehaene, 2005).

Γενικότερα, σημειώνεται ένα συνεχώς αυξανόμενο ενδιαφέρον για την εφαρμογή των μετασχηματισμών στην μαθηματική εκπαίδευση (Hollebrands, 2003; Portnoy, Grundmeier&Graham, 2006; Yanik&Flores, 2009) καθώς θεωρείται σημαντική για την ανάπτυξη γεωμετρικών συλλογισμών και χωρικών δεξιοτήτων (Hollebrands, 2003) ενώ παράλληλα σχετίζεται με ένα πλήθος δραστηριοτήτων στην ακαδημαϊκή και καθημερινή ζωή, όπως οι γεωμετρικές κατασκευές, η τέχνη, η αρχιτεκτονική, η ξυλουργική, η μηχανική και η πλοήγηση (Boulter&Kirby, 1994). Σύμφωνα με τις Αρχές και τα

[31]Ο όρος ολισθανάκλαση έχει προταθεί από τον Γιώργο Μπαλόγλου, πρ. Καθηγητή του StateUniversityofNewYork, Oswego ως μετάφραση του αγγλικού όρου glide-reflection και αποδίδει την σύνθεση δύο ισομετριών, της μετατόπισης και της ανάκλασης.

Πρότυπα του NCTM (2000), τα εκπαιδευτικά προγράμματα από την προσχολική αγωγή έως και το τέλος της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης θα πρέπει να δίνουν τη δυνατότητα σε κάθε μαθητή να εφαρμόζει γεωμετρικούς μετασχηματισμούς και να χρησιμοποιεί την έννοια της συμμετρίας για να αναλύει μαθηματικές καταστάσεις.

Οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί και ιδιαίτερα οι ισομετρίες βρίσκονται στο υπόβαθρο και στο παρασκήνιο της μαθηματικής σκέψης, στα πράγματα εκείνα που υπονοούνται και δεν αποκαλύπτονται ποτέ στις διαδικασίες των τυπικών μαθηματικών αποδείξεων. Ο Θαλής, που τοποθετείται στις απαρχές της θεωρητικής συλλογιστικής και της γένεσης της επιστήμης (Panchenko, 2005) ενσωματώνει τις ισομετρίες στην βάση της γεωμετρικής του σκέψης. Οι προτάσεις που αποδίδονται στον Θαλή μπορούν να παραχθούν μέσα από απλό στοχασμό σε θέματα συμμετρίας (Burkert, 1972; Καρασμάνης, 1990 & 2019; Karasmanis, 1992) ενώ η μέθοδος του Θαλή θεωρείται πως ήταν η εμπειρική μέθοδος της μετακίνησης και εφαρμογής (Szabo, 1973) και φαίνεται ότι σχετίζεται με την αξιωματική θεμελίωση της ισότητας των γεωμετρικών σχημάτων από τον Ευκλείδη, μέσω της ταύτισης (Σταμάτης, 1975).Την προσέγγιση της ταύτισης ακολουθεί και το σχολικό εγχειρίδιο αναφέροντας ότι δύο ευθύγραμμα σχήματα είναι ίσα αν μετά από κατάλληλη μετατόπιση ταυτίζονται. Δεν αποκαλύπτει όμως τι σημαίνει “κατάλληλη μετατόπιση” και ότι οι τρόποι με τους οποίους είναι δυνατόν να επιτευχθεί η ταύτιση είναι οι ισομετρίες της μετατόπισης, της ανάκλασης, της στροφής και οι συνδυασμοί αυτών. Εξάλλου, οι γεωμετρικοί μετασχηματισμοί αποτελούν ένα μέσο για την εξάσκηση των μαθητών σε ολιστικές συλλογιστικές διαδικασίες, δηλαδή σε συλλογισμούς που δεν διαπραγματεύονται μόνο στοιχειώδεις έννοιες αλλά σύνθετες και πολύπλοκες διαδικασίες, οι οποίες προσιδιάζουν ταυτόχρονα σε δομικά στοιχεία της καλλιτεχνικής δημιουργίας (Strantzalos, 2008).

Επειδή η τυπική γλώσσα της θεωρίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι δύσκολα προσεγγίσιμη από τους μαθητές της Α΄ Λυκείου και επειδή για την καλλιέργεια ενός οπτικού εγγραμματισμού είναι πιο κατάλληλη η οπτικοποιημένη-διαισθητική μορφή τους, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για την διαπραγμάτευσή τους στην τάξη μίαημι-τυπική προσέγγιση με την αξιοποίηση μαθηματικών-εικαστικών έργων του Ολλανδού εικαστικού καλλιτέχνη M.C. Escher, στα οποία οπτικοποιούνται οι βασικές ισομετρίες (μετατόπιση, στροφή, ανάκλαση, ολισθανάκλαση). Ο Escherσχετίζεταιάμεσα με μία τέτοια προσέγγιση καθώς είχε μελετήσει την εργασία του Polya για τις κρυσταλλογραφικές συμμετρίες ενώ παράλληλα είχε μελετήσει και είχε επηρεαστεί από τις διακοσμήσεις του παλατιού της Alhambra στη Γρανάδα της Ισπανίας, στις οποίες υλοποιούνται με εντυπωσιακό τρόπο οι 17 ομάδες συμμετρίας του επιπέδου.

Στο πλαίσιο αυτής της προσέγγισης αναπτύχθηκε ψηφιακό εκπαιδευτικό υλικό το οποίο αποτελείται από δύο ειδών ψηφιακά δομήματα: α) μικροπειράματα σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, που δίνουν την δυνατότητα διαπραγμάτευσης των ισομετριών που υλοποιούνται σε συγκεκριμένα έργα του Escher, και β) ψηφιακές εφαρμογές που υλοποιούν τα σχήματα επιλεγμένων ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, στα οποία εμφανίζονται οι ίδιες ισομετρίες με αυτές που υλοποιούνται στα έργα του Escher[32]. Η προστιθέμενη αξία των ψηφιακών δομημάτων συνίσταται στην οπτικοποίηση των ισομετριών σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας όπου οι μαθητές μπορούν να παρατηρούν και να διαχειρίζονται όλη την διαδικασία της κίνησης και όχι μόνον το τελικό αποτέλεσμα. Επίσης, στο πλαίσιο των προτεινόμενων προσεγγίσεων των νέων Προγραμμάτων Σπουδών, προτείνεται ως χειραπτικό εκπαιδευτικό υλικό το μαθηματικό παιχνίδι Wizzle[33], το οποίο διαπραγματεύεται τις μαθηματικές έννοιες των ισομετριών και των ψηφιδώσεων/πλακοστρώσεων και μπορεί να συμπληρώσει τα ψηφιακά εργαλεία με hands-on προσεγγίσεις(Τερψιάδης, 2023).

Με την διαπραγμάτευση των μικροπειραμάτων μέσα από κατάλληλα σχεδιασμένα μαθηματικά έργα και δραστηριότητες (ΙΕΠ, 2021α & 2021β), οι μαθητές μπορούν να ορίσουν τις βασικές ισομετρίες, δηλαδή την μετατόπιση, την ανάκλαση, την ολισθανάκλαση και τα κυριότερα είδη στροφών (διπλή, τριπλή, τετραπλή και εξαπλή) και να αποκτήσουν μία οπτική εξοικείωση με την δομή και τις ιδιότητές τους. Στη συνέχεια, θα διαπραγματευτούν επιλεγμένες ασκήσεις του σχολικού εγχειριδίου, στα σχήματα των οποίων υλοποιούνται οι ίδιες ισομετρίες. Με την βοήθεια των ψηφιακών εφαρμογών, οι μαθητές μπορούν να διαχειριστούν τα σχήματα των ασκήσεων σε περιβάλλον δυναμικής γεωμετρίας, να εντοπίσουν τις ισομετρίες που εμπεριέχουν και με την βοήθεια των ισομετριών να εντοπίσουν τις κανονικότητες που υλοποιούνται στο σχήμα. Οι κανονικότητες αυτές θα αποτελέσουν στη συνέχεια τα δομικά στοιχεία της απόδειξης.

Μέσω αυτών των δραστηριοτήτων επιτυγχάνεται μία οπτική εξοικείωση των μαθητών με τα γεωμετρικά σχήματα και τις ιδιότητές τους, ώστε να γίνουν σταδιακά ικανοί να “βλέπουν” σε ένα γεωμετρικό σχήμα ότι μπορεί να δει το μάτι ενός έμπειρου μαθηματικού. Τα “πλάσματα” τουEscher διαθέτουν

---

[32]Το ψηφιακό εκπαιδευτικό υλικό περιέχεται στην Ανοιχτή Εκπαιδευτική Πρακτική “Ισομετρίες, από την Τέχνη στην Γεωμετρία”, η οποία έχει αξιολογηθεί ως βέλτιστη και είναι αναρτημένη στο Φωτόδεντρο.

[33]Το Wizzle σχεδιάζεται και παράγεται από μαθήτριες και μαθητές του Πειραματικού Λυκείου του Πανεπιστημίου Μακεδονίας με την τεχνική της 3D εκτύπωσης (https://sites.google.com/view/wizzle) και έχει κατακτήσει το 2ο Βραβείο στον Παγκόσμιο Διαγωνισμό Κοινωνικής Καινοτομίας SocialInnovationRelay 2023 και το 1ο Βραβείο στον Πανευρωπαϊκό Διαγωνισμό του JuniorAchievementEurope.

γεωμετρικές ιδιότητες αντίστοιχες με αυτές που υλοποιούνται στα σχήματα των γεωμετρικών προβλημάτων και μπορούν να δημιουργήσουν ισχυρές πρωτογενείς αντιλήψεις που θα βοηθήσουν τους μαθητές στην ανακάλυψη των κανονικοτήτων που υλοποιούνται στα γεωμετρικά προβλήματα που θα κληθούν να επιλύσουν. Στη συνέχεια, κατά την επεξεργασία των γεωμετρικών προβλημάτων στην τάξη, παρεμβάλλεται μία συζήτηση για τις ισομετρίες που εμπεριέχονται στο σχήμα κάθε προβλήματος, στο πλαίσιο της οποίας αξιοποιείται η οπτική εξοικείωση που επιτεύχθηκε και καλλιεργείται παραπέρα με στόχο την ανάπτυξη ενός οπτικού εγγραμματισμού που μπορεί να λειτουργήσει ως υπόβαθρο στην διαπραγμάτευση της σχολικής Γεωμετρίας.

Οι ισομετρίες είναι δυνατόν να λειτουργήσουν ως μέσο κατανόησης και ομαδοποίησης των κανονικοτήτων που υλοποιούνται στα γεωμετρικά σχήματα και ως κριτήρια ταξινόμησης των προτάσεων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας σε μία εννοιολογική βάση που λαμβάνει υπόψιν τις γεωμετρικές τους ιδιότητες. Οι προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας διατάσσονται κατά την ανάπτυξη της θεωρίας σε μία σειρά που εξυπηρετεί την λογική της ανάπτυξης ενός παραγωγικού, αξιωματικού συστήματος. Η απόδειξη κάθε πρότασης βασίζεται στα αξιώματα και στα συμπεράσματα των προτάσεων που προηγούνται και έχουν ήδη αποδειχθεί. Αυτή η λογική οργάνωσης της θεωρίας εξασφαλίζει την εγκυρότητα των μαθηματικών προτάσεων και την αλήθεια των μαθηματικών ιδεών αλλά ταυτόχρονα συσκοτίζει τις ανακαλυπτικές διαδικασίες και το παρασκήνιο της μαθηματικής σκέψης και δεν βοηθά την εννοιολογική και ολιστική κατανόηση των γεωμετρικών ιδιοτήτων. Αυτό έχει ως αποτέλεσμα, η θεωρία να έχει μία αποσπασματική νοηματικά μορφή και να συγκροτείται από ένα μεγάλο πλήθος προτάσεων ασύνδετων εννοιολογικά μεταξύ τους με αποτέλεσμα να δημιουργείται μία ιδιαίτερη δυσκολία στην κατανόηση και τον χειρισμό των εργαλείων που έχει στην διάθεσή του ο μαθητής για να διαπραγματευτεί τα γεωμετρικά προβλήματα. Αυτός ο κατακερματισμός είναι δυνατόν να αποκατασταθεί με την βοήθεια των γεωμετρικών μετασχηματισμών.

Για παράδειγμα, οι προτάσεις που αφορούν στο ισοσκελές τρίγωνο και στις ιδιότητές του, οι οποίες είναι σκορπισμένες σε διάφορα σημεία του σχολικού εγχειριδίου λόγω της παραγωγικής οργάνωσης της ύλης, είναι δυνατόν να ενοποιηθούν σε μία ιδέα: Αν γνωρίζουμε ότι στο ισοσκελές τρίγωνο υλοποιείται η ισομετρία της ανάκλασης με άξονα ανάκλασης την μεσοκάθετο της βάσης του, τότε αυτή η ιδέα της ανάκλασης μπορεί νασυνοψίσει σε μία εικόνα όλες τις ιδιότητές του και τις προτάσεις που σχετίζονται με αυτό, δηλαδή ότι το ισοσκελές έχει δύο πλευρές και δύο γωνίες ίσες, το ύψος του προς την βάση είναι διάμεσος και διχοτόμος, η διάμεσος προς την βάση είναι διχοτόμος και ύψος, η διχοτόμος προς την βάση είναι διάμεσος και ύψος, καθώς και τις αντίστροφές τους. Ανάλογα, το ισόπλευρο τρίγωνο διαθέτει τρεις άξονες ανάκλασης (τις μεσοκαθέτους των τριών πλευρών του) και ένα κέντρο τριπλής στροφής (το σημείο τομής των τριών μεσοκαθέτων του). Με τον ίδιο τρόπο είναι δυνατόν να οπτικοποιηθούν και να συνοψιστούν οι ιδιότητες και οι προτάσεις που σχετίζονται με τα τετράπλευρα που διαπραγματεύεται η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Για παράδειγμα, όλες οι ιδιότητες (αυτές που αναγράφονται στο σχολικό εγχειρίδιο και άλλες που παραλείπονται αλλά είναι πιθανόν ο μαθητής να τις συναντήσει σε ασκήσεις, όπως οι ισότητες γωνιών που δημιουργούνται από τις πλευρές και τις διαγωνίους) και τα κριτήρια του παραλληλογράμμου, μπορούν να αναχθούν στο κέντρο διπλής στροφής που διαθέτει και να συνοψιστούν σε μία εικόνα. Με παρόμοιο τρόπο είναι δυνατόν να οργανωθούν οι ιδιότητες και τα κριτήρια του ορθογωνίου, του ρόμβου, του τετραγώνου, του τραπεζίου και του ισοσκελούς τραπεζίου μέσω των ισομετριών που υλοποιούνται καθολικά ή εν μέρει σε αυτά τα σχήματα (άξονες ανάκλασης και κέντρα διπλής και τετραπλής στροφής). Επίσης με παρόμοιο τρόπο είναι δυνατόν να οργανωθούν και άλλες κανονικότητες που υλοποιούνται σε προτάσεις της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Για παράδειγμα, στα θεωρήματα με δύο παράλληλες και μία τέμνουσα υλοποιούνται οι ισομετρίες της μετατόπισης και της διπλής στροφής. Στην ισομετρία της μετατόπισης οφείλεται η ισότητα των εντός-εκτός και επί τα αυτά γωνιών ενώ στην ισομετρία της διπλής στροφής οφείλεται η ισότητα των εντός εναλλάξ γωνιών. Σε αυτές τις ισομετρίες και σε συνθέσεις τους είναι δυνατόν να βασιστούν και άλλες σχετικές προτάσεις που δεν περιλαμβάνονται στο σχολικό εγχειρίδιο, όπως η ισότητα των εκτός εναλλάξ γωνιών.

Επιπλέον, υπάρχουν κανονικότητες που υλοποιούνται σε μέρος ενός σχήματος και όχι σε όλο το σχήμα, όπως οι διχοτόμοι ή οι μεσοκάθετοιενός τυχαίου τριγώνου οι οποίες αποτελούν άξονες ανάκλασης για ένα μέρος του τριγώνου. Το ίδιο μπορεί να συμβαίνει και με τα σχήματα των πιο πολύπλοκων ασκήσεων του σχολικού εγχειριδίου.

Συμπεράσματα

Με την βοήθεια των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι δυνατόν να αναπτυχθεί μία οπτική εξοικείωση των μαθητών με βασικές ισομετρίες οι οποίες υλοποιούνται στα θεωρήματα και στα προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας, με σκοπό να καλλιεργηθούν δεξιότητες αποκωδικοποίησης και εντοπισμού των κανονικοτήτων που περιέχονται σε αυτά και αποτελούν δομικά στοιχεία των αντίστοιχων αποδεικτικών διαδικασιών. Με αυτό τον τρόπο οι αφηρημένες γεωμετρικές σχέσεις μετατρέπονται σε εικόνες και οι μαθητές καλλιεργούν έναν οπτικό εγγραμματισμό και καθίστανται όλο και περισσότερο ικανοί να βλέπουν σε ένα γεωμετρικό σχήμα ότι μπορεί να διακρίνει το μάτι ενός έμπειρου μαθηματικού.

Προεκτάσεις

Η προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας μέσω της θεωρίας των γεωμετρικών μετασχηματισμών είναι δυνατόν να επεκταθεί πέρα από τις ισομετρίες στους μετασχηματισμούς που αλλοιώνουν το σχήμα. Η ομοιοθεσία, η οποία διατηρεί τις γωνίες και τις αναλογίες των πλευρών των σχημάτων, μπορεί να υποστηρίξει το μέρος της Ευκλείδειας Γεωμετρίας που ασχολείται με τις αναλογίες και την ομοιότητα και να συμβάλλει στην ανάπτυξη της αναλογικής σκέψης.

Πάνω στην ημι-τυπική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών που προτάθηκε μπορεί να στηριχτεί και η τυπική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών που προβλέπεται από τα νέα Προγράμματα Σπουδών (Υπ. Απόφαση 4362/Δ2/2023; 14. Υπ. Απόφαση 23523/Δ2/2023). Συγκεκριμένα, στο Πρόγραμμα Σπουδών της Α΄ Γυμνασίου προβλέπεται η διαπραγμάτευση της ισομετρίας της ανάκλασης, η οποία αναφέρεται ως συμμετρία ως προς άξονα (ΠΜΑ Γ.Μ.7.1 έως Γ.Μ.7.5.), στο Πρόγραμμα Σπουδών της Β΄ Γυμνασίου προβλέπεται η διαπραγμάτευση των ισομετριών της μετατόπισης, η οποία αναφέρεται ως μεταφορά, και της στροφής, ως ειδική περίπτωση της οποίας περιλαμβάνεται και η κεντρική συμμετρία (ΠΜΑ Γ.Μ.8.1. έως Γ.Μ.8.11.) και στο Πρόγραμμα Σπουδών της Γ΄ Γυμνασίου προβλέπεται η διαπραγμάτευση του μετασχηματισμού της ομοιοθεσίας και της ομοιότητας (ΠΜΑ Γ.Μ.9.1. έως Γ.Μ.9.6.). Μάλιστα, στο Πρόγραμμα Σπουδών της Β΄ Γυμνασίου προβλέπεται και η διαπραγμάτευση μοτίβων, σχεδίων, έργων τέχνης και πλακοστρώσεων (ΠΜΑ Γ.Μ.8.11.). Επίσης, στο Πρόγραμμα Σπουδών της Γ΄ Λυκείου (Γ.Μ.12.Π.1. έως Γ.Μ.12.Π.7.) προβλέπεται μία τυπική προσέγγιση των γεωμετρικών μετασχηματισμών με την διαπραγμάτευση πινάκων μετασχηματισμού για τις συμμετρίες ως προς τους άξονες και την αρχή των αξόνων, για την στροφή ως προς την αρχή των αξόνων, για την μεταφορά και την ομοιοθεσία. Επίσης γίνεται διαπραγμάτευση των εννοιών της ισομετρίας και της σύνθεσης δύο γεωμετρικών μετασχηματισμών.

Ενώ η ολισθανάκλαση αποτελεί μία από τις πρώτες έννοιες που διαπραγματεύεται η θεωρία των γεωμετρικών μετασχηματισμών (αν και αποτελεί σύνθεση δύο ισομετριών, της ανάκλασης και της μετατόπισης), εντούτοις την συναντούμε σπάνια στην θεωρία και στα προβλήματα της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Αυτό είναι άξιο προσοχής αν συνυπολογίσουμε ότι η ολισθανάκλαση αποτελεί μία από τις βασικές ισομετρίες που συναντούμε στις διακοσμητικές τέχνες και στα μοτίβα όλων ανεξαιρέτως των πολιτισμών που άκμασαν στον πλανήτη (Stevens, 1985).

Η οργάνωση της θεωρίας των Γεωμετρικών Μετασχηματισμών ακολουθεί μία πορεία από το ειδικό προς το γενικό. Μελετώνται αρχικά οι απλές ισομετρίες (μετατόπιση, ανάκλαση, στροφή) και στη συνέχεια οι πιο πολύπλοκες ισομετρίες που προκύπτουν ως συνθέσεις των απλών. Θα είχε ενδιαφέρον για διδακτικούς σκοπούς να διερευνηθεί η ανάποδη οργάνωση της θεωρίας, από το γενικό προς το ειδικό. Να θέσουμε ως βάση δύο ισομετρίες, την ολισθανάκλαση (η οποία στην τωρινή οργάνωση της θεωρίας αποτελεί σύνθεση των ισομετριών της ανάκλασης και της μετατόπισης) και την στροφολίσθιση (η οποία στην τωρινή οργάνωση της θεωρίας αποτελεί σύνθεση των ισομετριών της στροφής και της μετατόπισης) και όλες οι άλλες ισομετρίες να προκύπτουν ως ειδικές περιπτώσεις αυτών των δύο. Δηλαδή, η ανάκλαση μπορεί να θεωρηθεί ολισθανάκλαση με μηδενική μετατόπιση, η στροφή μπορεί να θεωρηθεί στροφολίσθιση με μηδενική μετατόπιση, η μετατόπιση μπορεί να θεωρηθεί ολισθανάκλαση με “μηδενική” ανάκλαση ή στοφολίσθιση με μηδενική στροφή. Μία τέτοια προσέγγιση προσφέρει μία πιο ολιστική οπτική και συνοψίζει καλύτερα την εικόνα των πολλών διαφορετικών περιπτώσεων ισομετριών. Επίσης είναι πιο κοντά στον τρόπο με τον οποίο υλοποιούνται οι ισομετρίες στον πραγματικό κόσμο καθώς δύο ίσα σχήματα αν τοποθετηθούν σε ένα επίπεδο με τυχαίο τρόπο, τότε το ένα θα είναι ή ολισθανάκλαση ή στροφολίσθιση του άλλου[34].

Βιβλιογραφία

1. Baloglou, G. (2007). *Isometrica*. New York: SUNY Oswego.
2. Boulter, D. & Kirby, J. (1994). Identification of strategies used in solving transformational geometry problems. *Journal of Educational Research, 87*(5), 298-303.
3. Burkert, W. (1972). *Lore and Science in Ancient Pythagoreanism*. London: Harvard University Press.
4. Dehane, S. (2005). Evolution of Human Cortical Circuits for Reading and Arithmetic: The "Neuronal Recycling" Hypothesis. S. Dehaene, J.R. Duhamel, M.D. Hauser & G. Rizzolatti (Eds): *From Monkey Brain to Human Brain: A Fyssen Foundation Symposium*. Cambridge, MA: Bradford Books-The MIT Press. DOI: https://doi.org/10.7551/mitpress/3136.001.0001
5. Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in Mathematical Thinking. Basic Issues for Learning. *Proceedings of the Annual Meeting of the International Group for the Psychology of Mathematics Education-NA 21, 1,* 3-26.

[34]Αυτή η σκέψη ανάγεται σε μία ιδέα του Γιώργου Μπαλόγλου, πρ. ΚαθηγητήτουStateUniversityofNewYorkOswego, σύμφωναμετηνοποία εκτελούμε ένα πείραμα τύχης με δύο τρίγωνα τα οποία είναι χρωματισμένα μαύρα από την μία πλευρά και άσπρα από την άλλη. Αν τοποθετήσουμε το ένα τρίγωνο στο επίπεδο με την μαύρη πλευρά πάνω και ρίξουμε στον αέρα το δεύτερο τρίγωνο, τότε υπάρχουν δύο δυνατά αποτελέσματα του πειράματος: το δεύτερο τρίγωνο να πέσει με την μαύρη πλευρά πάνω ή να πέσει με την άσπρη πλευρά πάνω.

6. Duval, R., (2006). A cognitive analysis of problems of comprehension in a learning of Mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 101-131.
7. Hollebrands, K. (2003). High school students' understandings of geometric transformations in the context of a technological environment. *Journal of MathematicalBehaviour, 22*(1), 55-72.
8. Horne, C.E. (2000). *Geometric symmetry in patterns and tilings*. Cambridge, U.K.: Woodhead Publishing.
9. Θωμαΐδης Γ. & Πούλος Α. (2006): *Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Εκδόσεις Ζήτη: Θεσσαλονίκη.
10. Θωμαΐδης, Ι. (2014). *Ορισμένες βασικές προϋποθέσεις για τη διδακτική αναβάθμιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. 4η Ημερίδα Μαθηματικών Ελληνογαλλικής Σχολής Καλαμαρί.
11. Θωμαΐδης, Ι. (2015). *Συνέχειες και ασυνέχειες κατά τη μετάβαση από το Γυμνάσιο στο Λύκειο: Η περίπτωση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. 5ηΗμερίδαΜαθηματικώνΕλληνογαλλικήςΣχολήςΚαλαμαρί.
12. Ινστιτούτο Εκπαιδευτικής Πολιτικής, (2021α). *Φιλοσοφία των Προγραμμάτων Σπουδών των Μαθηματικών*. Αθήνα: ΙΕΠ.
13. Υπ. Απόφαση 4362/Δ2/2023. *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Γυμνασίου*. Εφημερίδα της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (Φ.Ε.Κ. Β΄ 235, 20-1-2023).
14. Υπ. Απόφαση 23523/Δ2/2023. *Πρόγραμμα Σπουδών για το μάθημα των Μαθηματικών στις Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεις Λυκείου*. Εφημερίδα της Κυβερνήσεως της Ελληνικής Δημοκρατίας (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1326, 8-3-2023).
15. Καρασμάνης, Β. (1990). Δύο διαφορετικές παραδόσεις στα πρώιμα ελληνικά μαθηματικά. Στο Κ. Ι. Βουδούρης (επιμ.), *Ιωνική Φιλοσοφία (1ο Διεθνές Συνέδριο Ελληνικής Φιλοσοφίας)*.
16. Karasmanis, V. (19992). Thales and the Early Greek Mathematical Demonstration. In M. Assimakopoulos, K. Gavroglou, P. Nikolakopoulos (eds), *Historical Types of Rationality: Proceedings of the 1st Greek-Soviet Symposium on Science and Society*. Athens: National Technical University.
17. Καρασμάνης, Β. (2019). Ο Θαλής και η πρώτη ελληνική μαθηματική απόδειξη. Στο Β. Καρασμάνης, *Μαθηματικά και τεχνολογία στην αρχαία Ελλάδα*. Αθήνα: Λιβάνης
18. Λούρια, Α. Ρ., (1992). *Γνωστική Ανάπτυξη*. Αθήνα: Ελληνικά Γράμματα.
19. Mithen, S. (2010). *Η προϊστορία του νου*. Αθήνα: Εκδόσεις Βάνιας.
20. National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

21. Panchenko, D. (2005). *Θαλής, οι απαρχές της θεωρητικής συλλογιστικής και η γένεση της επιστήμης*. Αθήνα: Ευρασία.
22. Pelegrin, J. (1993). A framework for analysing prehistoric stone tool manufacture and a tentative application to some early stone industries. In A. Berthelet& J. Chavaillon (eds): *The use of tools by human and non-human primates (pp.302-314)*. Oxford: ClarendonPress. DOI:10.1093/acprof:oso/9780198522638.003.0018
23. Portnoy, N., Grundmeier, T.A, &Grahama, K. J. (2006). Students' understanding of mathematical objects in the context of transformational geometry: Implications for constructing and understanding proofs. *Journal of Mathematical Behavior, 25,* 196–207.
24. Πούλος, Α. (2015). Η παιδαγωγική σημασία της «οπτικής εξοικείωσης» με τα γεωμετρικά σχήματα. *Πρακτικά 7ης Διεθνούς Μαθηματικής Εβδομάδας*. Θεσσαλονίκη: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία, Παράρτημα Θεσσαλονίκης.
25. Σταμάτης, Ε. (1975). *Ευκλείδου Γεωμετρία, Στοιχεία*. Αθήνα: ΟΕΔΒ.
26. Stevens, P. (1985). *Handbook of regular patterns: An introduction to symmetry in two dimensions*. Massachusetts: The MIT Press.
27. Strantzalos, A. (2008). Geometric Transformations as a Means for the Introduction of Interdisciplinarity and of Educational Elements in High School. In E. Barbin, N. Stehlikova, & C. Tzanakis (eds.), *Proceedings of the 5th European Summer University on History and Epistemology in Mathematics Education* (ESU-5), pp. 125-139. Plzen: VydavatelskyServis.
28. Szabo, A. (1973). *Απαρχαί των ελληνικών μαθηματικών*. Αθήνα: Τεχνικό Επιμελητήριο της Ελλάδος.
29. Τερψιάδης, Ν. (2023). Ένα μαθηματικό παιχνίδι σκέψης και δημιουργικότητας. *Πρακτικά 38ου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*. Αθήνα: Ελληνική Μαθηματική Εταιρεία.
30. Tyldesley, J.A. (1987). *The Bout Coupé handaxe: a typological problem*. Oxford: B.A.R.
31. Usiskin, Z. (1982). *Van Hiele Levels and Achievement in Secondary School Geometry*. Chicago: UniversityofChicago.
32. Vavilova, I.B., &Tetyana, G.A (2014). Ancient astronomical culture in Ukraine: Finds relating to the Paleolithic era. *Journal of Astronomical History and Heritage, 17*(1), 29-38.
33. Yanik, H. B. & Flores, A. (2009). Understanding rigid geometric transformations: Jeff's learning path for translation. *The Journal ofMathematicalBehavior, 28*(1), 41-57.

Θα εδραιώσει η Γεωμετρία μία αξιοπρεπή θέση στο νέο Πρόγραμμα Σπουδών;

Αυτό είναι το μεγάλο στοίχημα.

Ανδρέας Πούλος
andremath.poulos@gmail.com

Θεματική περιοχή: Νέα Αναλυτικά Προγράμματα Σπουδών

Περίληψη:

Στο Νέο Πρόγραμμα Σπουδών του 2023 η Γεωμετρία εμφανίζεται ως αυτοτελής ενότητα μαθηματικών γνώσεων στην Γ΄ τάξη των ΓΕΛ. Αυτό θεωρείται παράδοξο για την ελληνική σχολική πραγματικότητα, διότι η Γεωμετρία ως εξεταστέα ύλη για την εισαγωγή στα Α.Ε.Ι.έχει εξαφανιστεί για τουλάχιστον τριάντα χρόνια. Το γεγονός αυτό δημιουργεί πολλά ερωτήματα, προβληματισμούς, αμφιβολίες, αλλά και προσδοκίες αν μπορεί να κερδηθεί το στοίχημα της «αναβάθμισής» της. Ο στόχος της εισήγησης αυτής είναι να φωτίσει και να τονίσει ορισμένες όψεις του προβληματισμού, διότι ο διάλογοςγια τη θέση της Γεωμετρίας στο Πρόγραμμα Σπουδών είναι από μόνος του εκτενέστατος. Στην εισήγηση επίσης, συζητείται εκτενώς το θέμα των γεωμετρικών κατασκευών.

Abstract:

In the New Curriculum of 2023, Geometry appears as an independent section of mathematical knowledge in the 3rd grade of High School. This is considered a paradox in the Greek school reality, since Geometry as an exam subject for admission to Higher Education Institutes has been missing for over thirty years. This developmentraises many questions, concerns, but also expectations on whether the role of Geometry can be upgraded. The aim of this presentation is to shed light on and emphasize certain aspects of the situation, sincethe discussion on the position of Geometry in the Curriculum is most extensive.In this presentation, the topic of geometric constructions is discussed at length.

Εισαγωγή:

Με το Νέο πρόγραμμα σπουδών για τα Μαθηματικά, (2023) φαίνεται η Γεωμετρία να έχει έναν αναβαθμισμένο ρόλο και μόνο από το γεγονός ότι αποτελεί μέρος της εξεταστέας ύλης για την Γ΄ τάξη των ΓΕ.Λ. Με απόλυτη σαφήνεια λοιπόν, θα αποτελέσει μέρος των αναγκαίων και βασικών γνώσεων για την εισαγωγή των μαθητών στα Α.Ε.Ι. Μάλιστα, είναι εντυπωσιακό το δεδομένο ότι οι γεωμετρικές κατασκευέςαποτελούν και αυτά θέματα αυτών των εξετάσεων. Αυτό ακούγεται πολύ παράξενο, διότι οι γεωμετρικές κατασκευές (Γ.Κ.),ενώ στα ήδη ισχύοντα Προγράμματα Σπουδών έχουν κάποια θέση, είναι ένα θέμα που δεν το αγγίζει ουσιαστικά κάποιος διδάσκων του σχετικού μαθήματος. Η απόδειξη αυτού του ισχυρισμού είναι πολύ απλή: Από τα 1.000 περίπου Γενικά Λύκεια που υπάρχουν στη χώρα, πολύ δύσκολα θα βρούμε ένα θέμα προαγωγικών εξετάσεων εδώ και τριάντα χρόνια για το μάθημα της Γεωμετρίας που να περιέχει κάποια γεωμετρική κατασκευή.

Φυσικά, οι συντάκτες του ΝέουΠρογράμματος Σπουδών προνόησαν ώστε να τεθούν οι βάσεις και οι στοιχειώδεις προϋποθέσεις για είναι σε θέση οι μαθητές και οι μαθήτριες στην Γ΄ τάξη των ΓΕ.Λ. να ανταποκριθούν στις νέες απαιτήσεις του μαθήματος. Για τον λόγο αυτό, η Γεωμετρία φαίνεται να είναι απαιτούμενη γνώση από το Γυμνάσιο ακόμα, (Π.Σ. Γυμνασίων 2023).Είναι μία από τις πιο σημαντικές καινοτομίες των νέων προγραμμάτων, η μεταφορά των τριών πρώτων κεφαλαίων της Ευκλείδειας Γεωμετρίας από την Α΄ τάξη του Λυκείου στη Γ΄ τάξη του Γυμνασίου. Αυτή η μεταφορά έχει σοβαρές συνέπειες για τη διδασκαλία του μαθήματος στο Γυμνάσιο και αντίστοιχα στην Α΄ τάξη του Λυκείου. Απαιτεί μεγαλύτερη υπευθυνότητα και προετοιμασία εκ μέρους των διδασκόντων στο Γυμνάσιο. Αυτό αποτελεί μία από τις βασικές προϋποθέσεις για την επιτυχία του εγχειρήματος.

Στη συνέχεια, καταγράφουμε συνοπτικά τα βασικά ζητούμενα και τις απαιτήσεις του Νέου Προγράμματος Σπουδών τόσο για το Γυμνάσιο, όσο και για το Λύκειο. Αυτό το θεωρούμε απαραίτητο ώστε να έχουμε μια γενική εικόνα αυτών των απαιτήσεων,να είμαστε σε θέση να κατανοήσουμε το μέγεθος και τις διαστάσεις αυτού του προβλήματος διδακτικής το οποίο θα συζητήσουμε.

Σημειώνουμε εκ των προτέρων ότι η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας στην Γ΄ Γυμνασίου σύμφωνα με το νέο Π.Σ. αναβαθμίζεται πολύ και προφανώς δεν εξαντλείται με την απλή παράθεση των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων.

Το Νέο Πρόγραμμα Σπουδών για την **Α΄ τάξη του Γυμνασίου**ζητά από τους μαθητές:

Γ.Ε.7.4. Να εφαρμόζουν τη χαρακτηριστική ιδιότητα της μεσοκαθέτου ευθύγραμμου τμήματος για να αναγνωρίζουν ιδιότητες του ισοσκελούς και του ισόπλευρου τριγώνου.

Γ.Ε.7.5. Να σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τη διχοτόμο γωνίας, τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και να περιγράφουν τη διαδικασία.

Γ.Ε.7.15. Να σχεδιάζουν με γεωμετρικά όργανα τρίγωνα και παραλληλόγραμμα με δεδομένα χαρακτηριστικά και να περιγράφουν τα βήματα της σχεδίασης.

Γ.Ε.7.16. Να αξιοποιούν τις ιδιότητες της μεσοκαθέτου, της παραλληλίας και της καθετότητας ευθειών και των παραλληλογράμμων στην επίλυση απλών προβλημάτων.

Γ.Ε.7.18. Να σχεδιάζουν με τη χρήση του γνώμονα την εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του.

Γ.Μ.7.5. Να σχεδιάζουν τα συμμετρικά γεωμετρικών σχημάτων ως προς διάφορους άξονες χρησιμοποιώντας μια ποικιλία εργαλείων και στρατηγικών.

Γ.Χ.7.2. Να σχεδιάζουν τις όψεις και τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων και πυραμίδων με ψηφιακά εργαλεία, ισομετρικό χαρτί, γεωπίνακα ή με ελεύθερη σχεδίαση.

Για τη **Β΄ τάξη του Γυμνασίου**ζητά από τους μαθητές:

Γ.Ε.8.3. Να σχεδιάζουν κανονικά πολύγωνα χρησιμοποιώντας γεωμετρικά όργανα ή ψηφιακά εργαλεία.

Μ.Ε.8.1. Να μετασχηματίζουν επιφάνειες σε ισοδύναμες με τη διαδικασία διάσπασης και ανασύνθεσης επιφάνειας.

Μ.Ε.8.4. Να χρησιμοποιούν τη διάσπαση και ανασύνθεση επιφανειών για τον προσδιορισμό του τύπου του εμβαδού παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου.

Για την **Γ΄ τάξη του Γυμνασίου** ζητά από τους μαθητές:

Γ.Μ.9.6. Να σχεδιάζουν ομοιόθετα και όμοια σχήματα χρησιμοποιώντας μια ποικιλία υλικών, εργαλείων και στρατηγικών.

Μ.Ε.9.1. Να αξιοποιούν τα αναπτύγματα ορθών πρισμάτων, πυραμίδων, κυλίνδρων και κώνων για να προσδιορίσουν το εμβαδόν της επιφάνειάς τους.

Για την **Α΄ τάξη των ΓΕ.Λ.** ζητά από τους μαθητές:

Γ.Ε.10.9. Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τρίγωνα με δεδομένα βασικά τους στοιχεία (γωνίες, πλευρές).

Γ.Ε.10.13. Κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη τη διχοτόμο γωνίας και τη μεσοκάθετο ευθύγραμμου τμήματος και αιτιολογούν τη διαδικασία.

Γ.Ε.10.14. Βρίσκουν απλούς γεωμετρικούς τόπους εξηγώντας τον συλλογισμό τους.

Γ.Ε.10.17. Κατασκευάζουν εφαπτομένη κύκλου σε σημείο του με κανόνα και διαβήτη.

Γ.Ε.10.25. Μοντελοποιούν και επιλύουν προβλήματα χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των παραλληλογράμμων και τραπεζίων.

Για την **Β΄ τάξη των ΓΕ.Λ.**ζητά από τους μαθητές:

Γ.Ε.11.1. Διερευνούν και αποδεικνύουν τη σχέση εγγεγραμμένης και επίκεντρης γωνίας που βαίνουν στο ίδιο τόξο.

Γ.Ε.11.2. Διερευνούν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που βλέπουν υπό συγκεκριμένη γωνία σταθερό ευθύγραμμο τμήμα και αποδεικνύουν την περίπτωση που η γωνία είναι ορθή.

Γ.Ε.11.5. Διαιρούν ευθύγραμμο τμήμα σε ν ίσα μέρη.

Γ.Ε.11.8. Χρησιμοποιούν την ομοιότητα τριγώνων για να επιλύσουν μαθηματικά και ρεαλιστικά προβλήματα.

Γ.Ε.11.9. Αποδεικνύουν τις μετρικές σχέσεις σε ένα ορθογώνιο τρίγωνο. Διατυπώνουν το αντίστροφο του Πυθαγόρειου θεωρήματος και το αναγνωρίζουν ως κριτήριο καθετότητας.

Γ.Ε.11.13. Διερευνούν τις ιδιότητες κανονικών πολυγώνων και κατασκευάζουν με κανόνα και διαβήτη ισόπλευρο τρίγωνο, τετράγωνο και κανονικό εξάγωνο εγγεγραμμένα σε κύκλο.

Για την **Β΄ τάξη θετικού προσανατολισμού των ΓΕ.Λ.**ζητά από τους μαθητές:

ΑΓ.Κ.11.Π.1. Αποδεικνύουν την εξίσωση του κύκλου μέσω του ορισμού του ως γεωμετρικού τόπου.

ΑΓ.Κ.11.Π.2. Αποδεικνύουν την εξίσωση εφαπτομένης κύκλου με κέντρο την αρχή των αξόνων σε σημείο αυτού.

Για την **Γ΄ τάξη των ΓΕ.Λ.**ζητά από τους μαθητές:

Γ.Ε.12.Π.1. Αναπτύσσουν εικασίες για γεωμετρικούς τόπους αξιοποιώντας και λογισμικά δυναμικής Γεωμετρίας.

Γ.Ε.12.Π.2. Αναπτύσσουν εικασίες για γεωμετρικούς τόπους αξιοποιώντας γνωστές γεωμετρικές σχέσεις και ιδιότητες της Ευκλείδειας Γεωμετρίας.

Γ.Ε.12.Π.3. Κατασκευάζουν βασικά γεωμετρικά σχήματα (ευθείες ή τμήματα τους, γωνίες, τρίγωνα, κύκλους ή τόξα τους) που ικανοποιούν συγκεκριμένες ιδιότητες χρησιμοποιώντας την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο.

ΑΓ.Κ.12.Π.2. Βρίσκουν χαρακτηριστικά στοιχεία και ιδιότητες των κωνικών τομών και τα αξιοποιούν στην επίλυση προβλημάτων.

ΑΓ.Κ.12.Π.3. Προσδιορίζουν γεωμετρικούς τόπους που είναι κωνικές τομές ή ευθείες ή τμήματά τους, είτε μέσω των ορισμών είτε μέσω των γνωστών εξισώσεών τους.

Επισημαίνουμε ότι το προηγούμενο σχολικό εγχειρίδιο Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Θωμαΐδης κ.α.,1999), στο οποίο ήμουν μέλος της συγγραφικής του ομάδας, ακολούθησε κατά γράμμα το τότε Αναλυτικό Πρόγραμμα σπουδών. Επίσης, το αντίστοιχο βιβλίο του διδάσκοντος (Θωμαΐδης κ.α.,1999), επεσήμαινεσε κάθε κατάλληλη περίπτωση τη σπουδαιότητα των Γ.Κ. κατά τη διδασκαλία της Γεωμετρίας και στην κατανόηση των γεωμετρικών εννοιών, κυρίως την παιδαγωγική αξία της διαδικασίας της Ανάλυσης – Σύνθεσης – Κατασκευής – Διερεύνησης. Αυτό αποτυπώθηκε κατά τη γνώμη μας πολύ καλά και στο βιβλίο Διδακτικής της Ευκλείδειας Γεωμετρίας (Θωμαΐδης& Πούλος, 2000).

Βεβαίως, και στο προηγούμενο Πρόγραμμα Σπουδών για το Λύκειο (Π.Σ. 2015) οι γεωμετρικές κατασκευές είχαν θέση. Μάλιστα, τονίζονταν στο πρόγραμμα Σπουδών η αξία της Αναλυτικής-Συνθετικής μεθόδου, (ενότητα 1.4) ως εξής: «*Κάθε γνώση, σε γενικές γραμμές έχει δύο στάδια: ΑΝΑΚΑΛΥΨΗ-ΕΠΙΒΕΒΑΙΩΣΗ. Αμφότερα είναι εξ ίσου απαραίτητα, Στα Μαθηματικά την επιβεβαίωση την ονομάζουμε απόδειξη και παραδοσιακά εκεί δίνουμε την μεγάλη έμφαση. Προφανώς, και η διαδικασία της ανακάλυψης είναι εξ ίσου σπουδαία. Εδώ το μεγαλύτερο βάρος πέφτει στον καθηγητή στην τάξη.Θα περιοριστούμε στον σχολιασμό της μεθόδου της Ανάλυσης-Σύνθεσης,που αποτελεί το κύριο εργαλείο για να συμπεριλάβουμε και την πορεία της ανακάλυψης στη μαθηματική γνώση του μαθητή. Τονίζουμε ότι η μέθοδος της Ανάλυσης-Σύνθεσης δεν αφορά μόνον τις γεωμετρικές κατασκευές και τους γεωμετρικούς τόπους, αλλά αφορά όλα τα Μαθηματικά, αφορά και είναι εφαρμόσιμη σε κάθε γνώση. .... Σε παλαιότερες δεκαετίες εδιδάσκετο η μέθοδος Ανάλυση-Σύνθεση στα σχολεία μας, αλλά μεταγενέστερα εξέλειπε, θύμα και αυτή (όπως πολλά πολύτιμα στοιχεία της σωστής διδασκαλίας) του εξεταστικού μας συστήματος. Είναι άποψη μας ότι πρέπει αυτή η πτυχή να επανέλθει στα βιβλία και στη διδασκαλία, επιλέγοντας συγκεκριμένα κατάλληλα θεωρήματα και αναλύοντας αυτά συγκεκριμένα*».

Παραδόξως, όμως στο Πρόγραμμα Σπουδών του 2015, οι αναφορές και παράγραφοί που αφορούν τις γεωμετρικές κατασκευές για την Α΄ τάξη των Λυκείων είναι εξαιρετικά σπάνιες. Στις ενδεικτικές δραστηριότητες, αυτές έχουν αντιπρόσωπο τη μεσοκάθετο τμήματος και τη διχοτόμο γωνίας.

Στο ίδιο Π.Σ. (2015) για την Β΄ τάξη των Λυκείων στην παράγραφο 1.2. για τη γωνία χορδής και εφαπτομένης και τους σχετικούς γεωμετρικούς τόπους, αναφέρεται στην ενότητα 1.2.1. «*Εφαρμόζουν την Αναλυτική– Συνθετική Μέθοδο στην επίλυση προβλημάτων*» και στην ενότητα 1.2.2. «*Εντοπίζουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων που βλέπουν υπό συγκεκριμένη γωνία σταθερό ευθύγραμμο τμήμα και αναγνωρίζουν τον γεωμετρικό τόπο των σημείων από τα οποία ευθύγραμμο φαίνεται υπό ορθή γωνία*». Στην ενότητα 3.2.2. αναφέρεται «*Χρησιμοποιούν τις μετρικές σχέσεις ορθογωνίων τριγώνων στην επίλυση προβλημάτων και κατασκευών*». Στην ενότητα 5.2.1. αναφέ-ρεται «*Εγγράφουν σε κύκλο, τετράγωνο, κανονικό εξάγωνο, ισόπλευρο τρίγωνο.Να σημειωθεί ότι σχεδιασμός κανονικών πολυγώνων πραγματοποι-είται διαιρώντας τον κύκλο σε ίσα τόξα και ότι δεν εφικτό να γίνουν όλες οι διαιρέσεις με κανόνα και διαβήτη*». Στην ενδεικτική δραστηριότητα Δ2 αναφέρεται «*Από σημείο εκτός κύκλου να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη, την εφαπτομένη προς αυτόν*». Στη δραστηριότητα Δ6 αναφέρεται «*Αν τα α, β, γ είναι γνωστά ευθύγραμμα τμήματα να κατασκευάσετε το ευθύγραμμο τμήμα x ώστε α/β = γ/x. Ως εφαρμογή να επιλύσετε γεωμετρικά την εξίσωση 3x + 2 = 7*».Στη δραστηριότητα Δ12 αναφέρεται «*Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη, τη μέση ανάλογο β των ευθυγράμμων τμημάτων α και γ*».Στη δραστηριότητα Δ13 αναφέρεται, «*Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ. Να κατασκευάσετε με κανόνα και διαβήτη τα τμήματα* $\sqrt{2}AB$ *και* $\sqrt{3}AB$» Στη δραστηριότητα Δ21 αναφέρεται «*Να μετασχηματίσετε, (α) ένα τρίγωνο σε ισοδύναμο παραλληλόγραμμο, (β) το παραπάνω παραλληλόγραμμο σε ισοδύναμο ορθογώνιο και (γ) το παραπάνω ορθογώνιο σε ισοδύναμο τετράγωνο*».

Θεωρούμε ότι η πρόταση μας για μια στοχευμένη διδασκαλία των Γ.Κ. που είχαμε παρουσιάσει στο σεμινάριο για τη Διδακτική της Γεωμετρίας της ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ. στις 9 Μαΐου 2009 στην Αθήνα,(Πούλος, 2010) και στο 26^{ο} Συνέδριο της Ε.Μ.Ε. το 2009, (Πούλος, 2009) ήταν ως ένα βαθμό ρεαλιστική, επειδή είχε δοκιμαστεί σε τάξεις κατά καιρούς από το 1997 έως το 2007.

Οι βασικότερες δυσκολίες που συναντήσαμε κατά τη διδασκαλία των Γ.Κ. σχετίζονταν κυρίως, α) με το αποκαλούμενο «παραπρόγραμμα» δηλαδή με τις αντιρρήσεις του τύπου «*γιατί να ασχολούμαστε με τέτοια προβλήματα, αφού σε κανένα άλλο σχολείο δεν συμβαίνει αυτό*», β) με τα σχόλια εκ μέρους των φροντιστηρίων ότι τέτοια θέματα είναι «*εκτός πνεύματος εξετάσεων*» κλπ.Αναγνωρίζουμε βεβαίως, ότι η διδασκαλία και εξέταση των Γ.Κ. πραγματοποιήθηκε σε Πειραματικό Σχολείο.

Στη συνέχεια αναφέρουμε ορισμένα οφέλη που προκύπτουν από τη διδασκαλία των Γ.Κ. σε όλες τις λυκειακές τάξεις.

Όταν ένας μεγάλος μαθηματικός και δάσκαλος δασκάλων των Μαθηματικών, όπως ήταν ο George Polya, ισχυρίζεται ότι «*Η πρακτική αξία των Γ.Κ. είναι πολύ μικρή και η θεωρητική τους αξία όχι πολύ μεγάλη.*

Εντούτοις, η ύπαρξη τέτοιων κατασκευών στη διδακτέα ύλη δικαιολογείται πλήρως. Είναι οι πιο κατάλληλες, για να γνωρίσει ο αρχάριος τα γεωμετρικά σχήματα, και εξαιρετικά αρμόζουσες, ώστε να εξοικειωθεί με ιδέες σχετικά με την επίλυση προβλημάτων», (Polya, 2004, σελ. 21),τότε μια τέτοια δήλωση δεν μπορούμε να την προσπεράσουμε βιαστικά και να μείνουμε αδιάφοροι. Ειδικά, οι διδάσκοντες των Μαθηματικών που ο σκοπός τους είναι να διδάξουν στους μαθητές τους τεχνικές και μεθόδους επίλυσης προβλημάτων.

Σε αντίθεση με τις αποδείξεις θεωρητικών ασκήσεων που είναι μη ελκυστικές ή και βαρετές για την πλειοψηφία των μαθητών, επειδή για πολλές από αυτές προσπαθούν να επιχειρηματολογήσουν για σχήματα και σχέσεις τις οποίες θεωρούν ως προφανείς, οι Γ.Κ. έχουν το στοιχείο της δημιουργικότητας, της έκπληξης, της εφευρετικότητας, της διερεύνησης περιπτώσεων κλπ. Αυτά τα επιχειρήματα υποστηρίζει και ο Ανδριανός (2003).Τον ρόλο των Γ.Κ. και την ιστορία τους στη μαθηματική εκπαίδευση εξετάζει στην μεταπτυχιακή του εργασία και ο Σταθόπουλος (2007). Σε αυτήν προσπαθεί να βρει τρόπους επανένταξή της στις νέες συνθήκες.

Ο Ούγγρος μαθηματικός και φιλόσοφος ImreLakatos (1976), αναφέρει: "*Το ότι οι εικασίες και τα θεωρήματα προηγούνται των αποδείξεων στην ευρετική διαδοχή ήταν κοινός τόπος για τους αρχαίους μαθηματικούς. Αυτό ήταν επακόλουθο της ευρετικής προτεραιότητας της Ανάλυσης σε σχέση με τη Σύνθεση*". Αυτό σημαίνει τα προβλήματα Γ.Κ. πρέπει να συνδέονται οργανικά με τα γεωμετρικά θεωρήματα και τις αποδείξεις τους.

Αν γενικά, η διδασκαλία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας έχει αξία, με την έννοια ότι οι μαθητές έρχονται σε επαφή με ένα αξιωματικά δομημένο σύνολο γνώσεων, η επαφή με τα προβλήματα των Γ.Κ. τους προσφέρει ένα σπουδαίο πλεονέκτημα. Ειδικά, η μέθοδος της Ανάλυσης–Σύνθεσης την οποία εφάρμοσε τόσο συστηματικά ο Πάππος ο Αλεξανδρινός ($4^{ος}$ αιώνας μ.Χ.) στο έργο του «Συναγωγή» αποτελεί ένα θαυμάσιο εργαλείο διδασκαλίας προσέγγισης και επίλυσης γεωμετρικών προβλημάτων.

Στην εισαγωγή του Ζ΄ βιβλίου της «Συναγωγής»,που αναφέρεται και ως ο «θησαυρός της Ανάλυσης»,ο Πάππος γράφει:Ο αναλυόμενος τόπος είναι μία ιδιαίτερη ύλη για όσους επιθυμούν να αποκτήσουν μια δύναμη στη Γεωμετρία για να μπορούν να λύνουν προβλήματα που τους προτείνονται.Η Ανάλυση είναι το μονοπάτι που ξεκινά από το ζητούμενο που θεωρούμε ότι ισχύει .... (Σπανδάγος, 2005, σελ. 153).Η αξία του συγκεκριμένου έργου του Πάππου βρίσκεται στο γεγονός ότι έχουμε (δεν γνωρίζουμε αν είναι η πρώτη φορά) μιαμέθοδο επίλυσης προβλημάτων. Αυτή τη μέθοδο την οποία συνοπτικά αποκαλούμε μέθοδο της Ανάλυσης–Σύνθεσης την ακολουθούσαν από παλιά οι δάσκαλοι των Μαθηματικών για να διδάξουν στους μαθητές επίλυση προβλημάτων, όπωςπ.χ. το βιβλίο τουΑ. Δημητρίου (1973).

Οι μεθοδολογικές υποδείξεις του Πάππου για την Ανάλυση–Σύνθεση ως μέθοδο διερεύνησης και επίλυσης προβλημάτων έτυχαν της προσοχής των σύγχρονων ειδικών για τη θεωρία του διεθνώς αποκαλούμενου problem-solving.Τυπικό παράδειγμα αποτελεί το έργοτου George Polya (1887-1985).

Η Ανάλυση–Σύνθεση δεν περιορίζεται όμως στο πλαίσιο της Γεωμετρίας, αφού στην πορεία αποτέλεσε εννοιακό μοντέλο για κάποιες από τις σπουδαιότερες ιδέες στην ιστορία της Φιλοσοφίας και των επιστημών. Ο Γαλιλαίος, ο Καρτέσιος, ο Νεύτωνας, ο Leibniz, ο Καντ, ο Riemann και πολλοί άλλοι εμπνεύστηκαν από αυτήν για να διατυπώσουν αργότερα φιλοσοφικές θεωρίες και πλήρεις ευρετικές μεθόδους.

Δεν είναι τυχαίο που ο Vieta το 1591 το μεγάλοάλμα για τον εγγράμματο λογισμό στην Άλγεβρα το αποκαλεί arsanalytica. Αυτή η «τέχνη» (ars) συνδυάζει την αυστηρότητα της Γεωμετρίας των αρχαίων Ελλήνων με τη λειτουργικότητα της Άλγεβρας. Ήταν επαρκώς ικανή για να λύσει κάθε πρόβλημα ή όπως γράφει ο ίδιος ο Vieta«nullum non problemasolvere». Ο Vieta έθεσε τα θεμέλια της νέας επιστήμηςτην «Εισαγωγή στην τέχνη της Ανάλυσης», εμπνευσμένος από την Ανάλυση–Σύνθεση των Ελλήνων.

Οι Γ.Κ. συνδέονται την αξιωματική θεμελίωση και τη μελέτη των ιδιοτήτων των πραγματικών αριθμών. Δίνουμε δύο παραδείγματα, το πρώτο είναι η εξαιρετική εργασία για το θέμα των Γ.Κ. του Σ. Παπασταυρίδη (1984) και το δεύτερο είναι το $7^{ο}$ κεφάλαιο από το βιβλίο του Fraleigh, J. (2003) που εκδόθηκε από τις Πανεπιστημιακές Εκδόσεις Κρήτης.

Ένα επιπλέον επιχείρημα είναι η αξιοποίηση των γνώσεων που αποκτά κάποιος από τη διδασκαλία των Γ.Κ. στην επίλυση προβλημάτων της τεχνολογίας και των άλλων επιστημών. Για παράδειγμα, αναφέρουμε το σχετικά πρόσφατο ερευνητικό άρθρο του Boykov (2021) για τις Γ.Κ. σε σχέση με το πρόγραμμα CAD για τον σχεδιασμό 3D αντικειμένων.

Σε σχέση με τον στόχο της εισήγησής μας, μετά από όλα αυτά, διατυπώνεται το σαφές παιδαγωγικό ερώτημα, το οποίο μάλιστα ζητά άμεση απάντηση. *Για ποιους λόγουςουσιαστικά δεν διδάσκονται οι γεωμετρικές κατασκευές στην Α΄ και Β΄ τάξη των Λυκείων*;Προσπαθούμε να εντοπίσουμε κάποιες συνιστώσες του προβλήματος. Αυτές είναι:

Η διδασκαλία της Γεωμετρίας (γενικά των Μαθηματικών) είναι ιδιαίτερα ελλειμματική στο Δημοτικό Σχολείο, χωρίς αυτό να σημαίνει ότι αυτό οφείλεται αποκλειστικά στους διδάσκοντες.

Οι Γ.Κ. δεν διδάσκονται συστηματικά ούτε και στις Γυμνασιακές τάξεις, όπως κατά τη γνώμη μας και το σύνολο της ζητούμενης από τα Προγράμματα Σπουδών γεωμετρικής γνώσης.

Δεν αξιοποιούνται τα λογισμικά και τα άλλα ψηφιακά των Η/Υ που είναι ιδιαίτερα κατάλληλα για την εύρεση γεωμετρικών τόπων και στην επίλυση προβλημάτων Γ.Κ.

Υπάρχει μία διάχυτη τάση “αλγεβροποίησης” των σχολικών Μαθηματικών, ακόμη και της Γεωμετρίας, με αποτέλεσμα οι Γ.Κ. να έχουν εντελώς περιορισμένο πεδίο παρουσίας.

Πολλές από τις Γ.Κ.αποτελούν εφαρμογές στο σχολικό βιβλίο. Είναι σε όλους γνωστό ότι σύμφωνα με τη σχετική νομοθεσία οι εφαρμογές δεν ανήκουν στην εξεταστέα ύλη με όλες τις συνέπειες που έχει αυτό.

Για περισσότερα από 30 χρόνια δεν έχει τεθεί κάποιο θέμα Γ.Κ.στις προαγωγικές εξετάσεις στην πλειοψηφία των ΓΕ.Λ.

Η τυπική διαδικασία που απαιτείται για μία γεωμετρική κατασκευή, (ανάλυση, σύνθεση, κατασκευή, διερεύνηση) είναι ιδιαίτερα χρονοβόρα.

Η περιορισμένη έως ανύπαρκτη διδασκαλία σε θέματα γεωμετρικών τόπων, συνδέεται άμεσα με τη διδασκαλία Γ.Κ.

Οι εξετάσεις για την εισαγωγή στα Α.Ε.Ι. καθορίζουν και την διδακτέα ύλη σε ενότητες της οποίαςδίνεται έμφαση ήδη από τις “μικρότερες τάξεις”.

Ένα σημαντικό ποσοστό των διδασκόντων θεωρούμε ότι δεν αναγνωρίζει και συνεπώς δεν υποστηρίζει την παιδαγωγική αξία των Γ.Κ.

Βεβαίως, το θέμα που συζητάμε δεν είναι πρόβλημα μόνο στην μαθηματική εκπαίδευση στην Ελλάδα. Για παράδειγμα, έναν σύγχρονο προβληματισμό για τη διδασκαλία των Γ.Κ. έχουν καταθέσει οι deSousetal (2022) σε σχέση με την εκπαίδευση δασκάλων των Μαθηματικών.

Ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών όπως ο AlanSchoenfeld(1989) μελέτησαν τους τρόπους που οι μαθητές και οι φοιτητές χρησιμοποιούν τις γεωμετρικές τους γνώσεις για την επίλυση προβλημάτων. Αποδείχτηκε ότι αυτοί, ενώ είχαν διδαχθεί με συστηματικό τρόπο Ευκλείδεια Γεωμετρία, αδυνατούν να χειριστούν βασικές γεωμετρικές γνώσεις (π.χ. καθετότητα ακτίνας και εφαπτομένης κύκλου στο σημείο επαφής, τη χαρακτηριστική ιδιότητα της διχοτόμου γωνίας) για να προσδιορίσουν το κέντρο κύκλου με κανόνα και διαβήτη. Αντίθετα, συμπεριφέρονται εμπειρικά, χρησιμοποιώντας προσεγγιστικές μεθόδους ή πρόχειρα σχέδια, επειδή δεν έμαθαν πώς να αξιοποιούν τις αντίστοιχες θεωρητικές γνώσεις σε καταστάσεις επίλυσης προβλήματος, όπως είναι οι Γ.Κ.

Κάποιες προτάσεις.

1. Η Γεωμετρία και οι στοιχειώδεις Γ.Κ. πρέπει οπωσδήποτε να διδάσκονται και να ασκούνται σε αυτές οι μαθητές της Ε΄ και ΣΤ΄ τάξης του Δημοτικού. Ίσως, αυτό απαιτήσει εκπαίδευση του διδακτικού προσωπικού, κάτι που είναι εφικτό.
2. Οι επιτροπές κρίσεις των νέων σχολικών εγχειριδίων πρέπει να είναι ιδιαιτέρα ευαισθητοποιημένες στο θέμα της επιλογής κατάλληλων προβλημάτων Γ.Κ., της παρουσίασης και των πλεονεκτημάτων των μεθόδων της Ανάλυσης – Σύνθεσης.

3. Οι Γ.Κ. πρέπει να διδάσκονταικαι στις τρεις τάξεις του Γυμνασίου.Απαιτείται συγγραφή χρηστικών οδηγιών προς τους διδάσκοντες και παροχή κατάλληλου εκπαιδευτικού υλικού και πληροφοριών.
4. Οι σχολικοί σύμβουλοι πρέπει να συντονίσουν τη συνολική προσπάθεια για την αναβάθμιση του ρόλου της Γεωμετρίας στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση.
5. Η χρήση των λογισμικών για τη διδασκαλία Γ.Κ. είναι προφανές ένα χρήσιμο εργαλείο, αλλά πρέπει να καθοδηγείται από εκπαιδευτικούς που να γνωρίζουν το αντικείμενο των Γ.Κ. Υπάρχουν πολύ ενδιαφέροντα παιχνίδια Γ.Κ. όπως το euclidea το οποίο το έχω δοκιμάσει με επιτυχία στην τάξη. Επίσης, στο διαδίκτυο υπάρχουν ελκυστικά βίντεο για την επίδειξη επίλυσης προβλημάτων Γ.Κ.

Από την αρχή είχαμε τονίσει ότι ο στόχος της εισήγησης αυτής είναι να φωτίσει και να τονίσει ορισμένες όψεις του προβληματισμού, διότι ως συνολική συζήτηση και διάλογος είναι από μόνος του εκτενέστατος. Σημειώνουμε όμως, ότι έως σήμερα – παρ’ ότι το Πρόγραμμα Σπουδών είναι από καιρό γνωστό –ένας τέτοιος διάλογος δεν έχει αναπτυχθεί σε όλες τις πλευρές του ούτε ποσοτικά, ούτε ποιοτικά. Αυτό δεν είναι ενθαρρυντικό δεδομένο.Απαιτείται μια συστηματική καταγραφή των βασικών αντεπιχειρημάτων από κάθε πηγή που σχετίζεται με την Εκπαίδευση, πρέπει να ληφθούν υπόψη οι γνώμες και οι ενστάσεις των μάχιμων εκπαιδευτικών για τη μη ένταξη των Γ.Κ. στη διδακτέα ύλη ή και οι δικαιολογημένες επιφυλάξεις τους και ο προβληματισμός τους. Για παράδειγμα, δείτε την εισήγηση των Ζάρκος κ.α. (2004). Η μελέτη αυτών των αντεπιχειρημάτων μπορεί να υποδείξει, να αναδείξει αδυναμίες και να οδηγήσει σε βελτιώσεις για τους τρόπους παρουσίασης και διδασκαλίας των Γ.Κ.

Σημειώνουμε ότι η αφαίρεση του κεφαλαίου για τις εγγεγραμμένες γωνίες και σχήματα σε κύκλο, από την εξεταστέα ύλη των ΓΕ.Λ. (ελπίζουμε να είναι προσωρινή), αφαιρεί και ακυρώνει ένα πλήθος Γ.Κ. που έχουν και ενδιαφέρον και παιδαγωγική αξία. Αυτό είναι ένα δείγμα, ότι ανά πάσα στιγμή το όλο εγχείρημα της αναβάθμισης της Γεωμετρίας στο ΓΕ.Λ. μπορεί να οδηγηθεί σε αδιέξοδα και σεακυρώσεις από λανθασμένους χειρισμούς.

Θεωρούμε ότι μια δικλείδα ασφαλείας για τη γενικότερη επιτυχία του Νέου Προγράμματος Σπουδών που αφορά την αναβάθμιση του ρόλου της Γεωμετρίας στο Λύκειο είναι να μην υπάρχουν αντικρουόμενοι ρόλοι στα θεσμικά όργανα της Εκπαίδευσης (ένα από τα όργανα είναι και η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων Κ.Ε.Ε.). Είναι ανάγκη να δοθεί στο Ι.Ε.Π. η εύλογη δυνατότητα ελέγχου και σχολιασμού των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων,έτσι ώστε να εξασφαλίζονται οι στόχοι και οι επιδιώξεις των προγραμμάτων σπουδών.Μία τέτοια θέση εμμέσως έχει διατυπωθεί και από άλλους συναδέλφους, π.χ. Μπρεσίμης κ.α. (2022).

Βιβλιογραφικές αναφορές

Ανδριανός Ηλίας, (2003). *Ανάλυση – Σύνθεση. Ιστορικά παραδείγματα από τη Γεωμετρία*. Διπλωματική εργασία στο μεταπτυχιακό πρόγραμμα Διδακτικής και Ιστορίας των Μαθηματικών.Ε.Κ.Π.Α.

Boykov, A.A., (2021). Development and application of the geometry constructionslanguage to building computer geometric models. *Journal of Physics*, No 1901: Conference Series, p.p. 1-8.

ΔημητρίουΑρίστος, (1973). *Μέθοδοιεπιλύσεωςγεωμετρικώνπροβλημάτων*.2^{η}έκδοση. Αθήνα.

de Souza, Duarte&M. &Pinto, T.P., (2022)Geometric Constructions in the Current Math Teacher Training Courses at the Federal University of Mato Grosso do Sul. *ActaScientia. (Canoas)*, *24*(8), 405-436.

Ζάρκος, Γ., &Ζαχαριάδης, Δ.&Κακοσαίου, Σ., &Καρακαηδός, Γ. &Πατρώνης, Τ., (2004) Ρέκβιεμ για την Αναλυτική-Συνθετική μέθοδο στο Λύκειο … Ένα παράθυρο ανοικτό για τις γεωμετρικές κατασκευές στο Γυμνάσιο. *Πρακτικά 21^{ου} Πανελλήνιου Συνέδριου Ε.Μ.Ε.* Τρίκαλα, σελ. 544-596.

Θωμαΐδης, Γ. & Ξένος, Θ. & Παντελίδης. Γ. & Πούλος, Α. & Στάμου, Γ., (1999). *Ευκλείδεια Γεωμετρία για Α΄ και Β΄ Λυκείου*. Αθήνα. Ο.Ε.Δ.Β.

Θωμαΐδης, Γ. & Ξένος, Θ. & Παντελίδης. Γ. & Πούλος, Α. & Στάμου, Γ., (1999). *Βιβλίο διδάσκοντος για την Ευκλείδεια Γεωμετρία Α΄ και Β΄ Λυκείου*. Αθήνα. Ο.Ε.Δ.Β.

Θωμαΐδης, Γ. & Πούλος Ανδ., (2000).*Διδακτική της Ευκλείδειας Γεωμετρίας*. Θεσσαλονίκη. ΕκδόσειςΖήτη.

Knorr, W.R., (1993).*The Ancient Tradition of Geometric Problems*. DoverPublications.NewYork.

Lakatos,Imre, (1976). *Αποδείξεις και ανασκευές. Η λογική της μαθηματικής ανακάλυψης*. Εκδόσεις Τροχαλία.

Μπερσίμης, Φ., &Καρκάνης, Β, &Κόσυβας, Γ., (2022). Περιμένοντας την αναμόρφωση του Προγράμματος Σπουδών Μαθηματικών: Προσδοκίες εκπαιδευτικών για την επιλογή της ύλης της Γ΄ Λυκείου. *Πρακτικά 37^{ου} Πανελλήνιου Συνεδρίου Μαθηματικής Παιδείας*, τόμος Β΄, 274–286. Ε.Μ.Ε., Άργος – Ναύπλιο.

Παπασταυρίδης Σταύρος, (1984). Γεωμετρικές κατασκευές με κανόνα και διαβήτη. *ΜαθηματικήΕπιθεώρηση*.Τεύχος 27, σελίδες 1-34.

Πούλος Ανδρέας, (2009). Επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών στην Α΄ Λυκείου. Παρατηρήσεις και συμπεράσματα. *Πρακτικά του 26ου Πανελλήνιου Συνέδριου της Ε.Μ.Ε.*, Θεσσαλονίκη, 2009, σελίδες 542-552.

Πούλος Ανδρέας, (2010). Επίλυση προβλημάτων γεωμετρικών κατασκευών. Στον τόμο «*Η Γεωμετρία και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*». Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών, Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2010, 139-152.

PolyaGeorge, (2004).*Η μαθηματική ανακάλυψη. Τόμος Ι. Κατανόηση, μάθηση και διδασκαλία του τρόπου επίλυσης προβλημάτων*. Κάτοπτρο. Αθήνα, σελ. 21-41.

*Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Λυκείου. ΦΕΚ.*162, Αριθμ. 8622/Δ2, 22 Ιανουαρίου 2015.

Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γυμνασίου. ΦΕΚ. 235, Τεύχος 2ο, 20 Ιανουαρίου 2023.

Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου. ΦΕΚ. 1326, Τεύχος 2ο, 8 Μαρτίου 2023.

Schoenfeld Alan, (1989). On Having and Using Geometric Knowledge. In *Conceptual and Procedural Knowledge. The Case of Mathematics* (ed. J. Hiebert). HillsideN.J. LawrenceErlbaum. P. 225-264.

Σπανδάγος, Ευάγγελος, (2005). *ΗμαθηματικήΣυναγωγήτουΠάππουτουΑλεξανδρέως*.ΤόμοςΓ, σελ. 153.

Σταθόπουλος, Γ., (2007). *Οι γεωμετρικές κατασκευές από την ιστορία στην διδασκαλία τους*. Διπλωματική εργασία στο πρόγραμμα μεταπτυχιακών σπουδών του τμήματος Μαθηματικών του Πανεπιστημίου Πατρών. Διαθέσιμη εδώ: http://nemertes.lis.upatras.gr/jspui//handle/10889/176

Fraleigh, J. (2003). *Εισαγωγή στην Άλγεβρα.*Κεφ. 7ο. Επεκτάσεις σωμάτων, Παρ. 7.5. Γεωμετρικές κατασκευές. ΕκδόσειςΠ.Ε.Κ.

Ηλεκτρονικέςπηγές

GeometryConstructionsbyPetraSurynkova.
https://www.youtube.com/watch?v=327ZQkz5UDY

Euclidea. Geometric Constructions Game with Straightedge and Compass. https://www.euclidea.xyz/

Παρουσίαση εργασίας μαθητών 1ου Πρότυπου ΓΕ.Λ. Θεσσαλονίκης για τις γεωμετρικές κατασκευές κατά τα έτη 2021-2023.
https://docs.google.com/presentation/d/1ona_6tUmEzOs26ZtjZVGqgSLPwZ_g6lz/edit#slide=id.p1

Μία πιλοτική εφαρμογή του Νέου Προγράμματος Σπουδών στα πολυώνυμα της Β Λυκείου

Ιωάννα Κυρέζη,Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου,6976689439
ioanna.kyrezi@gmail.com
Αθηνά Ναλετάκη,Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου,6936860390
malnal2@yahoo.gr
Αλέξανδρος Συγκελάκης,Ευρωπαϊκό Σχολείο Βρυξελλών ΙΙΙ,6945411513
asygelakis@gmail.com

Περίληψη

Στην παρούσα εργασία παρουσιάζουμε τον τρόπο με τον οποίο εργαστήκαμε για να δημιουργήσουμε μαθηματικά έργα στο πλαίσιο της πιλοτικής εφαρμογής των Νέων Προγραμμάτων Σπουδών για τα Μαθηματικά που έλαβε χώρα σε τρία τμήματα (25 μαθητών) της Β΄ Λυκείου στο Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου για δύοσυναπτά σχολικά έτη με θέμα τη διδασκαλία των πολυωνύμων. Παραθέτουμε επιγραμματικά κάποια από τα έργα που χρησιμοποιήσαμε και αναλύουμε ένα από αυτά.

Abstract

In this paper we present the way that we collaborated to create mathematical projects in the context of the pilot implementation of the New Mathematics Curriculum that took place in three classes (of 25 students each) of the Second Class of Lyceum at the Model General Lyceum of Heraklion for two consecutive school years on the topic of teaching polynomials. We briefly list some of the projects we used and we analyze one of them.

Εισαγωγή

Μετά το πέρας της επιμόρφωσης των εκπαιδευτικών των πρότυπων και πειραματικών σχολείων στα Νέα Προγράμματα Σπουδών (ΝΠΣ) και κατά τη διάρκεια της πιλοτικής εφαρμογής τους στο Πρότυπο Γενικό Λύκειο Ηρακλείου, (σχολικά έτη 2021 – 2022 και 2022 – 2023), σχεδιάσαμε και υλοποιήσαμε μια σειρά μαθηματικών έργων που αφορούσαν στο κεφάλαιο των πολυωνύμων της Άλγεβρας της Β’ Λυκείου.

Τα έργα αυτά αναπτύχθηκαν στη βάση της φιλοσοφίας των ΝΠΣ[18] με απώτερο σκοπό την υποστήριξη της ενεργούς εμπλοκής των μαθητών σε διαδικασίες που θα συνέβαλλαν τόσο στην επίτευξη των προσδοκώμενων μαθησιακών αποτελεσμάτων (ΠΜΑ) της διδασκαλίας των πολυωνύμων και στη βαθύτερη κατανόηση της αποκτηθείσας μαθηματικής γνώσης [6]όσο και στην ανάπτυξη κοινωνικών-πολιτικών και κοινωνικών -συναισθηματικών δεξιοτήτων που υποστηρίζουν την ολόπλευρη ανάπτυξη του μαθητήκαι προσφέρουν ίσες ευκαιρίες μάθησης[8].

Ως μαθηματική πρακτική επιλέξαμε τη μοντελοποίηση μέσω επίλυσης προβλήματος, μια πρακτική η οποία ενισχύει τη μαθηματική κατανόηση, και συμβάλλει στην ανάπτυξη της συλλογιστικής σκέψης, στην επικοινωνία και στη δημιουργία συσχετισμών και αναπαραστάσεων.Τα έργα που δημιουργήσαμε αφορούν σε αυθεντικές προβληματικές καταστάσεις, οι οποίες εμπεριέχουν τη μαθηματική γνώση, είναι εύκολα κατανοητές και προσεγγίσιμες από τους μαθητές και επιδέχονται παραπάνω από μία λύση η οποία δεν είναι προφανής[11].Στόχος μας ήταν τα έργα αυτά να κεντρίσουν το ενδιαφέρον των μαθητών και να τους παρακινήσουν να ασχοληθούν με την επίλυσή τους, δίνοντάς τουςτην ευκαιρία να προβληματιστούν, να αναζητήσουν πιθανές λύσεις χρησιμοποιώντας τις ήδη υπάρχουσες γνώσεις τους, να ελέγξουν τις προτεινόμενες λύσεις ως προς την εγκυρότητά τους και εντέλει μέσω της διαδικασίας αυτής να αναπτύξουν στρατηγικές επίλυσηςπροβλήματος και μεταγνωστικές ικανότητες [1], [2].

Η διδακτική προσέγγιση που ακολουθήσαμε για την επίλυση των προβλημάτων ήταν η καθοδηγούμενη διερευνητική/ανακαλυπτική μάθησηπου χρησιμοποιεί μαθηματικά έργα που ενθαρρύνουν τη διατύπωση και τον έλεγχο εικασιών και παρέχει στον μαθητή σχετική αυτονομία να δράσει σύμφωνα με τον ατομικό του ρυθμό μάθησης.Παράλληλα, του δίνει τη δυνατότητα να αναζητά μαθηματικούς τρόπους διερεύνησης για να απαντήσει στις ερωτήσεις του, να ερμηνεύει, να αξιολογεί και να επικοινωνεί αποτελεσματικά τις λύσεις και τα συμπεράσματά του[7].Επιπλέον τον εμπλέκεισε μια διαδικασίακατασκευής μαθηματικής γνώσηςμέσω της συνεργασίας, της ανταλλαγής απόψεων και της επιχειρηματολογίας και συμβάλλει στην ανάπτυξη της κριτικής του σκέψης[13].Ο καθηγητής έχοντας δημιουργήσει ένα ασφαλές μαθησιακό -συμμετοχικό περιβάλλον[3]συντονίζει τη διαδικασία, υποστηρίζει τη μαθηματική πρόκληση και τη θετική κουλτούρα μάθησης[14]παρεμβαίνει όπου κρίνει απαραίτητο, θέτοντας κατάλληλες ερωτήσεις, υποδείξεις και ενθαρρύνει την ανταλλαγή ιδεών και απόψεων [15].

Ως διδακτική πρακτική αξιοποιήσαμε και διαχειριστήκαμε παιδαγωγικά και διδακτικά τα λάθη των μαθητών ως αναπόσπαστο κομμάτι της μαθησιακής διαδικασίας και “εφαλτήριο” κατανόησης του μαθηματικού περιεχομένου από τα ίδια τα παιδιά [3].

Για την υλοποίηση των έργων μέσα στην τάξη χρησιμοποιήσαμε εποπτικά και χειραπτικά υλικά, φύλλα εργασίας, tablets, υπολογιστές και το λογισμικό δυναμικής γεωμετρίας Geogebra. Κάποια από τα φύλλα εργασίας σχεδιάστηκαν εις διπλούν (με ή χωρίς χρήση ψηφιακών εργαλείων) προκειμένου να εξυπηρετήσουμε με τον πιο εποικοδομητικό τρόπο την διδασκαλία μας [16].

Προετοιμασία και έναρξη υλοποίησης του έργου

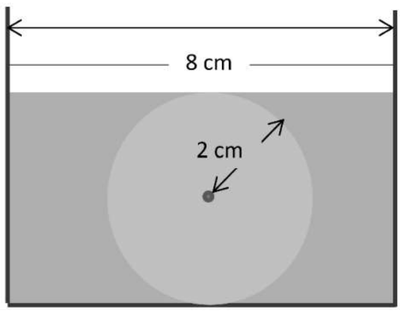
Αρχικά διδάχθηκαν όλα τα προαπαιτούμενα από το κεφάλαιο των πολυωνύμων συμπεριλαμβανομένων των βασικών θεωρημάτων παραγοντοποίησης – εύρεσηςακέραιας ρίζας καθώς και του τρόπου επίλυσης πολυωνυμικών και άρρητων εξισώσεων – ανισώσεων.

Κατόπιν συζήτησης, συμφωνήσαμε να γίνει εισαγωγή στη μοντελοποίηση με τη βοήθεια του ισοπεριμετρικού προβλήματος στην απλούστερη μορφή του: *από τα ορθογώνια με σταθερή περίμετρο να βρεθεί εκείνο που έχει μέγιστο εμβαδό.* Ήταν ένα πρόβλημα απλό στη διατύπωση, εύκολο να δοθούν στον πίνακα αρκετά παραδείγματα ορθογωνίων με την ίδια περίμετρο (αφόρμηση και ενίσχυση της αυτοπεποίθησης του μαθητή) καιεπιπλέον ήταν γνωστή μελέτη της συνάρτησης$y = ax^2 + \beta x + \gamma, a \neq 0$που χρειαζόταν για την αντιμετώπισή του. Δόθηκε έτσι η ευκαιρία για μία σύντομη επανάληψη στηνπολυωνυμική συνάρτηση δευτέρου βαθμού, στη γραφικήπαράσταση και τα ακρότατά της. Στο τέλος της μελέτης του προβλήματος και για να υπάρξει επέκτασή του και μελέτη του υπό άλλη αλγεβρική σκοπιά, συζητήθηκε η ανισότητα αριθμητικού – γεωμετρικού μέσου μέσω της οποίας έχουμε άμεση και σύντομη απάντηση στο παραπάνω πρόβλημα. Στη συνέχεια, τέθηκε ως ερώτηση το αντίστροφο του ισοπεριμετρικού προβλήματος: *από τα ορθογώνια με σταθερό εμβαδό να βρεθεί εκείνο που έχει την ελάχιστη περίμετρο*. Για να αντιμετωπίσουν αυτό το ερώτημα, οι μαθητές οδηγήθηκαν σε μελέτη συνάρτησης η οποία όμως αυτή τη φορά δεν ήταν πολυωνυμική αλλά με καθοδηγούμενες ερωτήσεις και με μελέτη αρκετών περιπτώσεων μπορούσε εύκολα να αναχθεί σε απόδειξη πολυωνυμικής ανισότητας.Έπειτα, ζητήσαμε από τους μαθητές, να κάνουν χρήση της ανισότητας αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου για την αντιμετώπιση και αυτής της περίπτωσης. Στο σημείο αυτό είναι σημαντικό να αναφέρουμε ότι καθ’ όλη τη διάρκεια της διδασκαλίας, δώσαμε ιδιαίτερη σημασία στη μαθηματική κατοχύρωση μέσω απόδειξης για κάθε ένα από τα βήματατουφύλλου εργασίας.

Στη συνέχεια ακολούθησαν προβλήματα μαθηματικής μοντελοποίησης τα οποία είχαν να κάνουνή ανάγοντανμε κάποιο τρόπο σε επίλυση εξισώσεων/ανισώσεων βαθμού ανώτερου του δύο και έγινε χρήση μαθηματικών λογισμικών για την καλύτερη σύνδεση των μαθηματικών εννοιών μέσω της γραφικής παράστασης τριτοβάθμιων (κυρίως) πολυωνυμικών συναρτήσεων. Τα προβλήματα αυτά ήταν:α) η κατασκευή κουτιού από ορθογώνιο χαρτόνι συγκεκριμένων διαστάσεων (διασκευασμένη άσκηση του σχολικού βιβλίου),β) εύρεση μέγιστου όγκου κυλίνδρου σταθερής περιμέτρου παράπλευρης επιφάνειας,γ) κατασκευή κυλίνδρου μέγιστου όγκου από χαρτόνι συγκεκριμένων διαστάσεων διπλώνοντάς το κατά μήκος ή κατά πλάτος, δ) εύρεση παραλληλεπιπέδου ελάχιστης επιφάνειας και σταθερού όγκου, ε) η μελέτη της θερμοκρασίας μιας πόλης για την εισαγωγή στο θεώρημα Bolzano και την καλύτερη προσέγγιση ρίζας πολυωνυμικής εξίσωσης που δεν είναι δυνατόν να βρεθεί με τις γνωστές στους μαθητές μεθόδους και τέλος,στ) το πρόβλημα της σιδερένιας μπίλιας του οποίου η περαιτέρω ανάλυση θα γίνει στην επόμενη ενότητα (η πλήρης διατύπωση των προβλημάτων αυτών παρατίθεται στο παράρτημα χωρίς όμως τα αντίστοιχα φύλλα εργασίας λόγω περιορισμού στην έκταση της εργασίας).

Ενδεικτικό Έργο: Το πρόβλημα της σιδερένιας μπίλιας

Μέσα σε ένα κυλινδρικό δοχείο με διάμετρο βάσης 8cm, τοποθετούμε μια σιδερένια μπίλια (σφαίρα) ακτίνας 2cm. Γεμίζουμε το δοχείο με νερό μέχρι να καλύψουμε ακριβώς την μπίλια (η επιφάνεια του υγρού να είναι εφαπτόμενη στην μπίλια). Αφαιρούμε την μπίλια από το δοχείο και την αντικαθιστούμε με μια άλλη διαφορετικής ακτίνας. Είναι δυνατόν να βρεθούμε ξανά στην ίδιακατάσταση; Δηλαδή είναι δυνατόν η επιφάνεια του νερού να είναι πάλι εφαπτόμενη στην μπίλια;



Τα ερωτήματα του φύλλου εργασίας:

1. Ποιος είναι ο όγκος της μπίλιας;
2. Πόσο νερό περιέχει το δοχείο;

Αφαιρούμε την μπίλια από το δοχείο και την αντικαθιστούμε με μια άλλη διαφορετικής ακτίνας, έστωρ cm.

3. Ποια συνθήκη θα εξασφάλιζε και πάλι την κατάσταση που δείχνει το παραπάνω σχήμα δηλαδή η επιφάνεια του νερού να είναι εφαπτόμενη στη σφαίρα;
4. Να δείξετε ότι η ακτίναρπρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση
   $\rho^3 - 24\rho + 40 = 0$
5. Μπορείτε να προβλέψετε μια ρίζα της παραπάνω εξίσωσης;
   Να λύσετε αλγεβρικά την εξίσωση
   $\rho^3 - 24\rho + 40 = 0$
6. Να απαντήσετε στο ερώτημα του προβλήματος, δηλαδή αν μπορούμε να βρεθούμε ξανά στην ίδια κατάσταση.

Δραστηριότητα 2η (εργασία για το σπίτι)

1. Να απαντήσετε στην ερώτηση του ίδιου προβλήματος με ακτίνα βάσης κυλινδρικού δοχείου$R = 3\ cm$και ακτίνα σιδερένιας μπίλιας$r = 1\ cm$
2. (Επέκταση-Διερεύνηση) Ποια σχέση πρέπει να συνδέει την ακτίνα βάσης του κυλινδρικού δοχείουRκαι την ακτίνα της σιδερένιας μπίλιαςr, έτσι ώστε το πρόβλημα να έχει θετική απάντηση;

Ανάλυση του έργου

Η φαινομενικά αρνητική απάντηση που δίνουν βιαστικά οι μαθητές δίνει τη θέση της – μετά από μελέτη – στη θετική, υπό προϋποθέσεις, η οποία οδηγεί και σε προαιρετική περαιτέρω διερεύνηση του προβλήματος.

Συγκεκριμένα, αφού οι μαθητές υπολογίσουν τον όγκο της σφαίρας, βρίσκουν ότι ο όγκος του νερού που πρέπει να προστεθεί στο δοχείο είναι η διαφορά του όγκου της σφαίρας από εκείνο του δοχείου και προκύπτει ότι είναι σταθερός και ίσος με$\frac{160\pi}{3}\ \mathrm{cm}^3$.

Η συνειδητοποίηση από το μαθητήότι ο όγκος του νερού αποτελείαναλλοίωτηποσότητα, είναι καθοριστικής σημασίας για την επίλυση του προβλήματος.

Έτσι, αναμένουμε από το μαθητή στο ερώτημα που ακολουθεί να διατυπώσει μία σχέση ισότητας της μορφής:*«Όγκος νερούαρχικά = όγκος νερού τελικά»* δηλαδή *«όγκος κυλίνδρου αρχικά - όγκος σφαίρας αρχικά = όγκος κυλίνδρου τελικά - όγκος σφαίρας τελικά»*.Αν ρ είναι η ακτίνα της νέαςσφαίρας, τότε η σχέση αυτή οδηγείστην πολυωνυμική εξίσωση $\rho^3 - 24\rho + 40 = 0$. Στο σημείο αυτό ο μαθητής καλείται να σκεφτεί ότι παρά το μεγάλο πλήθος διαιρετών του 40, προφανής λύση της εξίσωσης αποτελεί η ακτίνα της αρχικής σφαίρας$\rho = 2$. Και εδώ ακριβώς βρίσκεται το αναπάντεχο: μία δεύτερη θετική λύση της εξίσωσης αυτής υπάρχεικαι είναι η $\rho = \sqrt{21} - 1$(η τρίτη λύση της εξίσωσης απορρίπτεται γιατί είναι αρνητική) την οποία ο μαθητής καλείται να ελέγξει αν είναι αποδεκτή λόγω του φυσικού περιορισμού των διαστάσεων του δοχείου.

Ως επέκταση αυτής της δραστηριότητας, μπορεί να δοθεί το ίδιο ακριβώς πρόβλημα με την ακτίνα του κυλινδρικού δοχείου να είναι $3\ cm$ και την ακτίνα της αρχικής μπίλιας να είναι $1\ cm$. Τότε, η τριτοβάθμια που προκύπτει δεν έχει δεύτερη θετική λύση πέρα από την $\rho = 1$ κι έτσι γεννιέται το φυσιολογικό ερώτημα για τη συνθήκη που πρέπει να ικανοποιείται μεταξύ της ακτίνας του κυλινδρικού δοχείου και της ακτίνας της αρχικής μπίλιας, ώστε να υπάρχειθετική απάντηση στο αρχικό πρόβλημα.Η επέκταση της δραστηριότητας αποτελεί μαθηματική πρόκληση που απαιτεί ιδιαίτερα επιδέξιους αλγεβρικούς χειρισμούς και για λόγους μαθηματικής πληρότητας, αν R είναι η ακτίνα του δοχείου και r η ακτίνα της αρχικής μπίλιας, τότε για να υπάρχει δεύτερη θετική αποδεκτή λύση, πρέπει να ισχύει $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{r}} < 1 + \sqrt{3}$.Τρίτη θετικήλύση δεν είναι δυνατόν να υπάρχει όπως προκύπτει κατά τη γενική λύση του προβλήματος.

<u>Συμπεράσματα – Αναστοχασμός</u>

Η υλοποίηση των μαθηματικών έργων στην τάξη, η συστηματική τήρηση ημερολογίου και η καθημερινή συνεργασία, μαςοδήγησε αφενός στη διαπίστωση ότι ένας μεγάλος αριθμός στόχων του ΝΠΣ (τόσο σε ό,τι αφορά τον μαθητή όσο και τους εκπαιδευτικούς) είχε επιτευχθεί και, αφετέρου στην αναγνώριση μιας σειράς δυσκολιών που συνάντησαν οι μαθητές κι εμείς ως διδάσκοντες. Η τήρηση ημερολογίων σχεδιασμού, αναστοχασμού και αποτίμησης της διδασκαλίας ήταν αναγκαία κατά την πιλοτική εφαρμογή και θεωρούμε ότι η μελέτη των ημερολογίων αυτών θα αποτελούσε ένα ισχυρό εργαλείο επανασχεδιασμού και βελτίωσης της εφαρμογής των ΝΠΣ.

Σε ό,τι αφορά τους μαθητές, τα μαθηματικά έργα δεδομένου ότι αναφέρονταν σε προβλήματα του πραγματικού κόσμου και υλοποιήθηκαν μέσω Διερευνητικής Ανακαλυπτικής Μάθησηςα)προκάλεσαν το ενδιαφέρον και την περιέργεια όλων των μαθητώνκαι τους έδωσανελευθερία να ασχοληθούν με αυτά, β)ενέπλεξαν τους μαθητές σε δραστηριότητες που αναδεικνύουν τη σύνδεση και την εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων στο φυσικό κόσμο[12], γ) έδωσαν τη δυνατότητα στους μαθητές να προβλέψουν, να συλλογιστούν, να πειραματιστούν, να αξιοποιήσουν τον μαθηματικό και καθημερινό λόγο για να επικοινωνήσουν με τους συμμαθητές τους, να υποστηρίξουν τις απόψεις τους και να διακρίνουν το «βλέπω» και «φαίνεται» από το «αποδεικνύω» και «ισχύει», δ) συνεργάστηκαν με τους συμμαθητές τους και εξασκήθηκαν στο να ακούν και να σέβονται την άποψη των άλλων, να ασκούν και να δέχονται εποικοδομητική κριτική και τέλος, ε) να λαμβάνουν αποφάσεις και να καταλήγουν σε ασφαλή συμπεράσματα έπειτα από κριτική σκέψη [9].Κυρίως όμως οδηγήθηκαν στην εμπέδωση και την εις βάθος κατανόηση των ΠΜΑ. Όλες αυτές οι διαδικασίες αναντίρρητα, ενδυναμώνουν τη μάθηση και εφοδιάζουν το μαθητή με ικανότητες και κοινωνικές δεξιότητες απαραίτητες για τη ζωή.

Παράλληλα όμως, προέκυψανδυσκολίες κυρίως κατά την υλοποίηση των δύο πρώτων έργων. Η πρώτη δυσκολία αφορούσε στην ήδη διαμορφωμένη κουλτούρα των μαθητώνως προς τις πρακτικές διδασκαλίας και μάθησης. Η μοντελοποίηση μιας ρεαλιστικής κατάστασης και η επίλυση προβλήματος δεν ήτανοικεία πρακτική οπότε δυσκολεύτηκαν τόσο στο να αναγνωρίζουν και να αναλύουν τα δεδομένα ενός προβλήματος, να αναζητούν σχέσεις που συνδέουν δεδομένα και ζητούμενα, όσο και στο να ακολουθούν τα διαβαθμισμένα ερωτήματα του φύλλου εργασίας. Αυτή η δυσκολία οδήγησε αρκετούς μαθητές (κυρίως υψηλών ικανοτήτων) να αισθανθούν ανασφαλείς και να διστάσουν να ασχοληθούν με τις δραστηριότητες του έργου μη θέλοντας να «εκτεθούν» και να «τσαλακώσουν» την καλή τους εικόνα. Μικρός αριθμός μαθητών επίσης, αντιμετώπισε σχετική δυσκολία στη συνεργασία μέσα στην ομάδα και προτίμησε να εργαστεί αυτόνομα. Όμως οι περισσότερες από αυτές τις δυσκολίες περιορίστηκαν στη συνέχεια της πιλοτικής εφαρμογής, αφού οι μαθητές άρχισαν να εξοικειώνονται με αυτές τις πρακτικές και να χτίζουν μια νέα κουλτούρα μάθησης.

Σε ό,τι αφορά εμάς τους εκπαιδευτικούς η μεγαλύτερη δυσκολία που αντιμετωπίσαμε ήταν ο περιορισμένος χρόνος που είχαμε στη διάθεσή μας για την πιλοτική εφαρμογή.Η επιμόρφωσή μας στα ΝΠΣ ήταν απαραίτητη δεδομένου ότι μας προσανατόλισε στη φιλοσοφία τους και μας εφοδίασε με τις βασικές αρχές τους. Εντούτοις, η προβλεπόμενη χρονική διάρκεια της επιμόρφωσης (σύγχρονης και ασύγχρονης) δεν ανταποκρίθηκε στον πραγματικό χρόνο που απαιτούνταν, προκειμένου να εξοικειωθούμε με τα ΝΠΣ, να σχεδιάσουμε και να υλοποιήσουμε την πιλοτική εφαρμογή.

Όμως, η ενασχόληση με τη δημιουργία αυτών των έργων ενίσχυσε από τη μία τη μεταξύ μας συνεργασία και την ανταλλαγή καλών πρακτικών, η δε υλοποίησή τους από την άλλη, η τήρηση ημερολογίου καταγραφής κάθε κρίσιμου περιστατικού (των δυσκολιών των μαθητών, των παρανοήσεων τους, των αδυναμιών τους, των επιτευγμάτων τους, αλλά και της ανάγκης βελτίωσης, επαναπροσδιορισμού ή παράθεσης κάποιου ακόμα ερωτήματος) αποτέλεσεμηχανισμό ανατροφοδότησής μας[5]και συνέβαλε ουσιαστικά στην ποιοτική βελτίωση των πρακτικών διδασκαλίας μας.Έτσι, ο διαρκής αναστοχασμός αποτέλεσε αναπόσπαστο μέρος της διδασκαλίας μας καιενισχύθηκε από την εποικοδομητική συνεργασία μας. Με αυτό τον τρόπο σχεδιάσαμεαπό κοινού τα έργα, επιτυγχάνοντας την κριτική διερεύνηση της διδασκαλίας με συστηματικό τρόπο [10].

Παράρτημα

ΙΣΟΠΕΡΙΜΕΤΡΙΚΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ

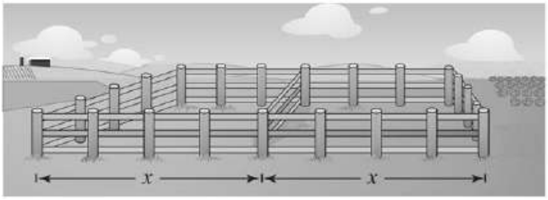
Δραστηριότητα 1

Από τα ορθογώνια παραλληλόγραμμα περιμέτρου 200 cm να βρείτε εκείνο που έχει το μέγιστο εμβαδό.

Επέκταση: Επίλυση της γενικότερης περίπτωσης και με τη βοήθεια της ανισότητας αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου που έχει ήδη αποδειχθεί.

Δραστηριότητα 2

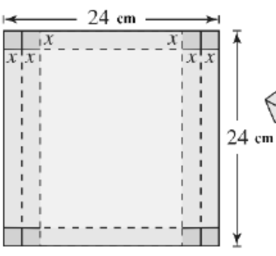
Ένας κτηνοτρόφος έχει στη διάθεσή του 1200 m περίφραξης για να περιφράξει 2 παρακείμενα μαντριά σχήματος ορθογωνίου παραλληλογράμμου όπως στο διπλανό σχήμα παρακάτω. Ποιες διαστάσεις θα του δώσουν τη μέγιστη εσώκλειστη περιοχή;

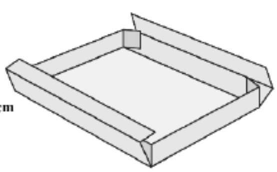


Επέκταση: Λύση του παραπάνω προβλήματος με κατάλληλη χρήση της ανισότητας αριθμητικού και γεωμετρικού μέσου.

Δραστηριότητα 3

Από ένα τετράγωνο χαρτόνι πλευράς 24 cm θέλουμε να κατασκευάσουμεένα ανοικτό κουτί σχήματος ορθογωνίου



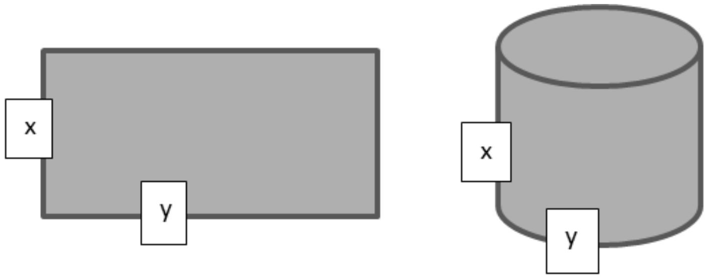


παραλληλεπιπέδου που να έχει μέγιστο όγκο κόβοντας από κάθε γωνία, δύο τετράγωνα του ίδιου μεγέθους (πλευράςx) όπως φαίνεται στο διπλανό σχήμα.

Ο ΜΕΓΙΣΤΟΣ ΟΓΚΟΣ

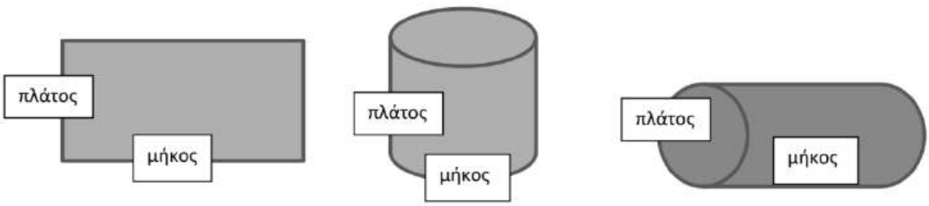
Δραστηριότητα 1

Με ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος ορθογωνίου και διαστάσεων x και y και σταθερής περιμέτρου 36cmθέλουμε να κατασκευάσουμε ένα κυλινδρικό κουτί με ύψος x και ακτίνα βάσης κυλίνδρου R που να έχει το μέγιστο όγκο.



Δραστηριότητα 2

Με ένα φύλλο λαμαρίνας σχήματος ορθογωνίου και περιμέτρου 36 cm, κατασκευάζουμε ένα κυλινδρικό κουτί τυλίγοντάς το ως προς το μήκος ή το πλάτος του. Ποιος από τους δύο τρόπους τυλίγματος οδηγεί σε μεγαλύτερο όγκο;



Η ΕΛΑΧΙΣΤΗ ΕΠΙΦΑΝΕΙΑ

Μια εταιρεία θέλει να κατασκευάσει δοχεία σχήματος ορθογωνίου παραλληλεπιπέδου, με τετράγωνη βάση πλευράς μικρότερης των 5 cmκαι χωρητικότητας1 lt.Η εταιρεία αναζητάει τις διαστάσεις του δοχείου έτσι ώστε το υλικό κατασκευής του να έχει το μικρότερο δυνατό κόστος.

Η ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ ΣΤΗΝ ΠΟΛΗ

Η θερμοκρασία σε μία πόλη της Σουηδίας σε βαθμούς Κελσίου κατά τη διάρκεια ενός 24ώρου δίνεται από τη συνάρτηση

$$P(x) = -\frac{1}{135}x^3 + \frac{13}{90}x^2 + \frac{3}{10}x - 2, \qquad x \in [0,24]$$

Θέλουμε να βρούμε όλες εκείνες τις χρονικές στιγμές της ημέρας κατά τις οποίες το θερμόμετρο δείχνει 0 βαθμούς Κελσίου.

Βιβλιογραφία

1. Artigue M.and Blomhøj M. (2013) Conceptualizing inquiry-based education in mathematics, Zdm, 45, 797-810.
2. Blumenfeld P. C. and Marx, R. W. Soloway, E., & Krajcik, J. (1996) Learning with peers: From small group cooperation to collaborative communities, Educational researcher, 25(8), 37-39.
3. Borasi, R. (1987) Exploring mathematics through the analysis of errors, For the learning of Mathematics, 7(3), 2-8.
4. Bray W. S. (2013) How to leverage the potential of mathematical errors, Teaching children mathematics, 19(7), 424-431.
5. Brown G. T., & Harris, L. R. (2009) Unintended consequences of using tests to improve learning: How improvement-oriented resources heighten conceptions of assessment as school accountability, Journal of MultiDisciplinary Evaluation, 6(12), 68-91.
6. Choppin J. (2011) Learned adaptations: Teachers' understanding and use of curriculum resources, Journal of mathematics teacher education, 14, 331-353.
7. Dorier J. L., & Maass, K. (2020) Inquiry-based mathematics education, Encyclopedia of mathematics education, 384-388.
8. Gutiérrez R. (2013) The sociopolitical turn in mathematics education, Journal for research in mathematics education, 44(1), 37-68.
9. Hmelo-Silver C. E. (2004) Problem-based learning: What and how do students learn?, Educational psychology review, 16, 235-266.
10. Jaworski B. (2006) Theory and practice in mathematics teaching development: Critical inquiry as a mode of learning in teaching, Journal of mathematics teacher education, 9(2), 187-211.
11. Kwon O. N., Park J. H., & Park J. S. (2006) Cultivating divergent thinking in mathematics through an open-ended approach. Asia Pacific Education Review, 7, 51-61.
12. Lave J., & Wenger E. (1991) Situated learning: Legitimate peripheral participation Cambridge university press.
13. Loyens S. M., &Gijbels D. (2008) Understanding the effects of constructivist learning environments: Introducing a multi-directional approach, Instructional science, 36, 351-357.

14. Potari D., & Jaworski B. (2002) Tackling complexity in mathematics teaching development: Using the teaching triad as a tool for reflection and analysis, Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 351-380.
15. Stender P., & Kaiser G. (2015) Scaffolding in complex modelling situations, Zdm, 47, 1255-1267.
16. Trouche L. (2004) Managing the complexity of human/machine interactions in computerized learning environments: Guiding students' command process through instrumental orchestrations, International Journal of Computers for mathematical learning, 9, 281-307.
17. Ανδρεαδάκης Σ., Κατσαργύρης Β., Παπασταυρίδης Σ., Πολύζος Γ. και Σβέρκος Α. ''Άλγεβρα Β' Λυκείου', ΙΤΥΕ Διόφαντος.
18. Υλικό επιμόρφωσης στο πλαίσιο της Πράξης «Επιμόρφωση των εκπαιδευτικών στα Προγράμματα Σπουδών και το εκπαιδευτικό υλικό Πρωτοβάθμιας και Δευτεροβάθμιας Εκπαίδευσης» Κωδ. ΟΠΣ (MIS): 5035542 / 5035543

Η διαισθητική κατανόηση της έννοιας του ορίου συνάρτησης στα προγράμματα σπουδών: Πόσο συμβατή είναι με τα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων;

Θεόφιλος Τραπεζανλίδης, Βασιλέως Παύλου 23 Κρύα Βρύση Τ.Κ. 58300, Τηλ. 6977717103, theofilostrapezanlidis@hotmail.com

Περίληψη

Στην εργασία αυτή, μελετώντας το ισχύον πρόγραμμα σπουδών και τις αντίστοιχες οδηγίες διδασκαλίας καθώς και το νέο πρόγραμμα σπουδών με τον αντίστοιχο οδηγό του εκπαιδευτικού, εντοπίζουμε τον ρόλο της διαίσθησης ως εργαλείο για την εννοιολογική κατανόηση του ορίου συνάρτησης. Επίσης, εξετάζουμε αν υπάρχει συνάφεια μεταξύ των στόχων που τίθενται στις οδηγίες διδασκαλίας του ορίου και στα θέματα των πανελλαδικών εξετάσεων.

Λέξεις κλειδιά: Διαίσθηση, όριο συνάρτησης, νέο πρόγραμμα σπουδών.

Summary

In this paper, by studying the current curriculum and the corresponding teaching instructions as well as the new curriculum with the corresponding teacher's guide, we identify the role of intuition as a tool for the conceptual understanding of the limit of a function. We also examine whether there is a connection between the objectives set in the teaching instructions for the limit and the questions of the national exams.

Key words: Intuition, limit function, new curriculum.

Αναμφίβολα, η έννοια του ορίου συνάρτησης είναι από τις σημαντικότερες της Μαθηματικής Ανάλυσης. Προϋπόθεση για τον ορισμό της εφαπτομένης γραφικής παράστασης συνάρτησης, του ρυθμού μεταβολής, της συνέχειας καθώς και του ολοκληρώματος αποτελεί η γνώση του ορίου συνάρτησης.

Προγράμματα σπουδών-Οδηγίες διδασκαλίας

Στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών που αφορά στα Μαθηματικά προσανατολισμού θετικών σπουδών και οικονομίας-πληροφορικής, ο ε-δ ορισμός του ορίου συνάρτησης δεν εμπεριέχεται στη διδακτέα ύλη. Ως εκ τούτου, η διαίσθηση δείχνει ο μοναδικός τρόπος προσέγγισης στη διδακτική της εν λόγω έννοιας.

Πράγματι, στις οδηγίες διδασκαλίας των Μαθηματικών προσανατολισμού της Γ΄ Λυκείου του σχολικού έτους 2023-24 και ειδικότερα στις παραγράφους που αφορούν στο όριο συνάρτησης, παρατηρούμε ότι η έννοια της διαίσθησης έχει δεσπόζουσα θέση. Πιο συγκεκριμένα [2]:

- Παράγραφος 1.4

*Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου δεν συμπεριλαμβάνεται στην ύλη , χρειάζεται να δοθεί βάρος στην **διαισθητική προσέγγιση** της έννοιας του ορίου.*

- Παράγραφος 1.6

  *Προτείνεται να δοθεί βάρος στην **διαισθητική προσέγγιση** της έννοιας με τη χρήση γραφικών παραστάσεων.*

- Παράγραφος 1.7

  *Προτείνεται να δοθεί βάρος στην **διαισθητική προσέγγιση** της έννοιας.*

Παρόμοια θέση έχει η έννοια της διαίσθησης και στο νέο πρόγραμμα σπουδών των Μαθηματικών της Β΄ λυκείου. Για παράδειγμα [3]:

38 | *Μαθηματικά Α΄, Β΄ και Γ΄ Λυκείου*

			μέσω της μονοτονίας των αντίστοιχων εκθετικών και λογαριθμικών συναρτήσεων.
ΑΝΑΛΥΣΗ	Σύγκλιση.	Αν.Σ.11.Π.1. Διερευνούν μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης την αναγκαιότητα εισαγωγής των άπειρων διαδικασιών και προσεγγίζουν διαισθητικά την έννοια της σύγκλισης ακολουθίας.	• Αναγνώριση της αναγκαιότητας των άπειρων διαδικασιών, μέσω προβλημάτων προσέγγισης άγνωστων ποσοτήτων με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια, όπως π.χ. η προσέγγιση του εμβαδού κύκλου από τα εμβαδά των εγγεγραμμένων και περιγεγραμμένων κανονικών πολυγώνων.

και της Γ΄ λυκείου:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ – Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ ΠΡΟΣΑΝΑΤΟΛΙΣΜΟΥ ΘΕΤΙΚΩΝ ΣΠΟΥΔΩΝ			
Θεματικό Πεδίο	**Θεματικές Ενότητες**	**Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα**	**Ενδεικτικές Δραστηριότητες**
		Οι μαθητές/-τριες:	
ΑΝΑΛΥΣΗ	Σύγκλιση.	Αν.Σ.12.Π.1. Μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης αναπτύσσουν μια διαισθητική αντίληψη της έννοιας του πεπερασμένου και μη πεπερασμένου ορίου συνάρτησης.	• Διαισθητική προσέγγιση (γραφικά, αριθμητικά) του ορίου συνάρτησης μέσω προβλημάτων μοντελοποίησης (π.χ. εύρεση στιγμιαίας ταχύτητας κινητού).

Στον οδηγό εκπαιδευτικού που αφορά στο νέο πρόγραμμα σπουδών, γίνεται ευρεία αναφορά στην αξία της έννοιας του ορίου, της σύγκλισης, στην διαφορά μεταξύ του αλγεβρικού και του αναλυτικού τρόπου σκέψης και καταγράφονται οι σημαντικότερες παρανοήσεις των μαθητών που αφορούν στην κατανόηση του ορίου που εμφανίζονται στην βιβλιογραφία. Παρατηρούμε ότι και στις παραπάνω αναφορές η διαίσθηση εμφανίζεται σε περίοπτη θέση. Πράγματι, διαβάζουμε [4]:

*Οι μαθητές προσεγγίζουν **διαισθητικά** την έννοια της σύγκλισης…*

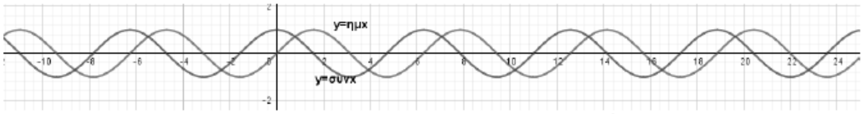
και

*…οι μαθητές πρέπει να αντιληφθούν την αναγκαιότητα εισαγωγής άπειρων διαδικασιών και να προσεγγίσουν **διαισθητικά** τη σύγκλιση και το όριο ακολουθίας.*

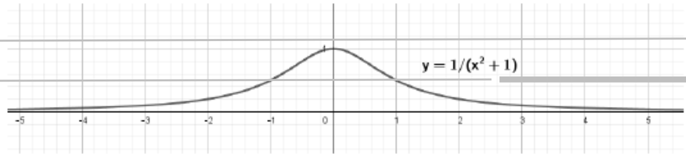
Η διαίσθηση αποτελεί και τον πυλώνα του Έργου 10 που προτείνεται στον νέο οδηγό εκπαιδευτικού:

ΠΡΟΣΔΟΚΩΜΕΝΑ ΜΑΘΗΣΙΑΚΑ ΑΠΟΤΕΛΕΣΜΑΤΑ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)		**ΧΑΡΑΚΤΗΡΙΣΤΙΚΑ ΕΠΙΔΙΩΚΟΜΕΝΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΑΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**		**ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗΣ ΔΙΑΧΕΙΡΙΣΗΣ (Ενδεικτικά και τα πλέον σημαντικά)**	
Πεδίο	Αριθμός, Άλγεβρα & Ανάλυση	***Ειδικά***	Αναπαράσταση, δομή	***Προτεινόμενα χαρακτηριστικά της διδακτικής προσέγγισης***	ποικιλία προσεγγίσεων/ στρατηγικών επίλυσης, πλαίσιο επικοινωνίας προσβάσιμο σε όλους
Ενότητα	Γ Λυκείου /Όριο				
Μεγάλες Ιδέες	Μετασχηματισμοί				
Μαθηματικές διεργασίες & πρακτικές	Ισοδυναμία, πρακτική συλλογισμού & επιχειρημα-τολογίας,	***Γενικά***	Μαθηματική επικοινωνία, Ευελιξία μαθηματικού συλλογισμού	***Προτεινόμενοι πόροι***	κατασκευή μέσω λογισμικού geogebra προσομείωσης
Κοινωνικο-πολιτισμικές πρακτικές		***Συγκείμενο***	Μαθηματικό		

i) Με βάση τη γραφική παράσταση των συναρτήσεων y = ημx και y = συνx να ελέγξετε, αν υπάρχουν τα όρια: $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \eta\mu x$, $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \sigma\upsilon\nu x$



ii) Να βρείτε τις ασύμπτωτες των συναρτήσεων $f(x) = \frac{1}{x^2+1}$, $g(x) = x + \frac{x^3-x}{x^6+1}$ και έπειτα να ελέγξετε, αν οι ασύμπτωτες έχουν κοινά σημεία με τις γραφικές παραστάσεις των αντίστοιχων συναρτήσεων.



Προτάσεις για τη διδακτική διαχείριση.

Με δεδομένο ότι ο τυπικός ορισμός του ορίου και οι περισσότερες αποδείξεις των προτάσεων και των θεωρημάτων της Ανάλυσης είναι εκτός του πλαισίου των μαθηματικών του Λυκείου, για να αποτελέσει η διδασκαλία της μια πραγματική εισαγωγή στην περιοχή αυτή, πρέπει να συμβάλλει στην ανάπτυξη σωστών διαισθητικών αντιλήψεων από τους μαθητές για τις έννοιες, τις ιδιότητες τους και τα θεωρήματα της Ανάλυσης μέσα από την ουσιαστική χρήση οπτικών αναπαραστάσεων. Γι' αυτό πρέπει να υπάρξει μια ισορροπία και σύνδεση των τυπικών λύσεων και των αντίστοιχων οπτικών αναπαραστάσεων με στόχο την κατανόηση των ιδιοτήτων της Ανάλυσης σε ένα πρώτο διαισθητικό επίπεδο. Αυτός πρέπει να είναι και ο στόχος της δραστηριότητας που θα αναπτυχθεί στην τάξη με βάση αυτό το έργο.

Τα αναπόφευκτα ερωτήματα που γεννώνται είναι: Τί είναι η διαίσθηση; Ποιες είναι οι ιδιότητές της και πως επηρεάζει τη διδασκαλία και επηρεάζεται από αυτήν;

Θεωρητικό πλαίσιο-Διαίσθηση

Πολλοί ερευνητές της Διδακτικής των Μαθηματικών ασχολήθηκαν με τον όρο αυτό και στη βιβλιογραφία καταγράφονται διαφορετικοί ορισμοί με αντίστοιχες ιδιότητες. Μία προσέγγιση του όρου οφείλεται στον Fischbein.

Σύμφωνα με τον Fischbein [1], η διαίσθηση και η διαισθητική γνώση είναι ισοδύναμες έννοιες. Η διαισθητική γνώση είναι η άμεση γνώση που εμφανίζεται ως αυταπόδεικτη και αυτονόητη. Εκφράζει την πάγια τάση του ανθρώπου για αναζήτηση της αλήθειας και σχετίζεται με τη συνθετική σύλληψη του νοήματος και της ερμηνείας μιας κατάστασης. Επίσης, σύμφωνα με τον Fischbein [1]:

> *Η διαίσθηση εκφράζει μια βαθιά ανάγκη της διανοητικής συμπεριφοράς μας κατά τη διάρκεια του συλλογισμού μας να στηριχτούμε σε*

αναπαραστάσεις και ιδέες που εμφανίζονται, υποκειμενικά ως βέβαιες, λογικά συγκροτημένες και σαφείς.

Μερικές ιδιότητες της διαίσθησης είναι οι εξής [1]:

1) *Αμεσότητα και βεβαιότητα που συνάγεται από την εποπτεία.*

2) *Εσωτερική βεβαιότητα.*

3) *Διατήρηση:* αντιστέκεται σε εναλλακτικές ερμηνείες.

4) *Καταναγκασμός:* Ασκούν επιρροή στην λογική σκέψη και το υποκείμενο δυσκολεύεται να αναπτύξει, σε ορισμένες περιπτώσεις, λογικούς συνειρμούς που θα επαληθεύσουν ή θα καταρρίψουν την διαισθητική γνώση.

Ο Fischbein [1] κατηγοριοποίησε τα είδη των διαισθήσεων ως εξής:

1) *Επιβεβαιωτικές διαισθήσεις*: είναι περιγραφές ή ερμηνείες ποικίλων γεγονότων που γίνονται αποδεκτές ως βέβαιες και αυταπόδεικτες. Μια επιβεβαιωτική διαίσθηση μπορεί να αναφέρεται στην σημασία μιας έννοιας (π.χ. η έννοια της δύναμης ή του σημείου), στην σημασία μιας σχέσης (π.χ. η δύναμη είναι απαραίτητη για να κινηθεί ένα σώμα) και στην αποδοχή ενός συμπεράσματος (π.χ. αν α=β και β=γ είναι ολοφάνερο διαισθητικά ότι έπεται α=γ).

2) *Υποθετικές διαισθήσεις*: εικασίες που διέπονται από το αίσθημα της βεβαιότητας (π.χ. είμαι σίγουρος ότι αν μελετήσεις θα πετύχεις στις εξετάσεις).

3) *Προβλεπτικές διαισθήσεις*: Κάθε υπόθεση δεν είναι διαίσθηση. Οι υποθέσεις που εξαρχής εμπλουτίζονται με το αίσθημα της βεβαιότητας είναι διαισθήσεις που οδηγούν σε προβλέψεις.

4) *Οριστικές διαισθήσεις*: συνοψίζουν με ένα σφαιρικό όραμα τις βασικές ιδέες λύσης ενός προβλήματος .

Συμπερασματικά, η επιλογή της διαίσθησης ως εργαλείο για την διδακτική του ορίου, είναι παραπάνω από σαφής τόσο στο ισχύον, όσο και στο νέο πρόγραμμα σπουδών. Μάλιστα, στο ισχύον πρόγραμμα σπουδών τονίζεται ότι [2]:

η διδασκαλία του ορίου δεν είναι αυτοσκοπός, αλλά στοχεύει στην προετοιμασία για την εισαγωγή της παραγώγου και του ολοκληρώματος.
και
Γι' αυτό πρέπει να αποφευχθεί η άσκοπη «ασκησιολογία» που θα καθυστερήσει την έγκαιρη εισαγωγή των μαθητών/τριών στην παράγωγο και το ολοκλήρωμα.
Είναι φανερό λοιπόν ότι η κύρια στόχευση είναι η εννοιολογική κατανόηση της έννοιας με χρήσης της διαίσθησης και όχι μόνο ο υπολογισμός ορίων με τις γνωστές μεθόδους.

Θέματα πανελλαδικών εξετάσεων

Υπηρετείται όμως αυτός ο στόχος στον τρόπο εξέτασης των υποψηφίων, δηλαδή στη φύση των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων; Είναι εύκολο να απαντηθεί το ερώτημα αυτό, αρκεί να μελετήσουμε το πώς εμφανίζεται το όριο στα θέματα των εξετάσεων. Θα επικεντρωθούμε στα θέματα του 2022-23, αλλά εύκολα διαπιστώνεται ότι το ίδιο ισχύει κάθε χρονιά.

ΘΕΜΑ Β

Έστω $f(x)=\dfrac{4-x^2}{x},\ x>0$.

B4. Να υπολογίσετε το $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\text{συν}(1+x^2)}{f(x)}$

Για να υπολογιστεί το όριο αυτό χρησιμοποιούμε το κριτήριο παρεμβολής, και στην διδακτική μας πρακτική αναφέρουμε ως περίπτωση «μηδενικής επί φραγμένη». Η αντιμετώπισή του αρκείται σε μια διαδικαστική γνώση και δεν εξαρτάται από το επίπεδο της εννοιολογικής κατανόησης της έννοιας.

ΘΕΜΑ Δ

Δίνεται συνάρτηση $f:(0,2)\to\mathbb{R}$ με τύπο:

$$f(x)=\ln(2-x)-\frac{1}{x}+\kappa,\ \text{όπου}\ \kappa\in\mathbb{R}$$

για την οποία ισχύει:

$$\lim_{x\to1}\frac{f(x)-2x}{x-1}=\ell\in\mathbb{R}.$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι $\kappa=3$.

Η αντιμετώπιση του ερωτήματος αυτού μπορεί να γίνει με χρήση μιας βοηθητικής συνάρτησης. Επίσης, πρόκειται για μια ακόμη μεθοδολογία που διδάσκεται στους μαθητές, χωρίς να απαιτείται εννοιολογική γνώση της έννοιας του ορίου.
Παρόμοια και στις επαναληπτικές εξετάσεις του 2022-23:

$$\text{Αν}\quad f(x)=\frac{x+1}{x-1}\ ,\ \ x>1,$$

Β3. Να βρείτε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Μονάδες 6

Για να επιτευχθεί το μέγιστο της μοριοδότησης του παραπάνω ερωτήματος αρκεί να υπολογιστούν τρία όρια, ένα εκ των οποίων είναι το:

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\left[\frac{1}{x-1}\cdot(x+1)\right]=+\infty$$

Η ευθεία x=1 είναι κατακόρυφη ασύμπτωτη της γραφικής παράστασης της f.
Είναι φανερό πως πρόκειται για απλούς αλγεβρικούς χειρισμούς και όχι για έλεγχο του επιπέδου της εννοιολογικής κατανόησης του ορίου.
Βέβαια, στις ισχύουσες οδηγίες διδασκαλίας, διαβάζουμε [2]:
Στην ενότητα αυτή δεν έχει νόημα μια άσκοπη ασκησιολογία που οι μαθητές υπολογίζουν όρια, κάνοντας χρήση αλγεβρικών δεξιοτήτων.
…αλλά να αποκτούν ουσιαστικό περιεχόμενο από πλευράς Ανάλυσης, κάτι που θα βοηθήσει στην ανάπτυξη της κατανόησης της έννοιας του ορίου.

Συμπεράσματα-Προτάσεις
Συμπερασματικά, η συνάφεια μεταξύ των στόχων της διδασκαλίας και των ζητούμενων των εξετάσεων που θα αναμέναμε να υπάρχει, δεν υφίσταται. Ανεξάρτητα από το αν είναι θεμιτό ο στόχος της διδασκαλίας του ορίου να περικλείει την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας ή όχι, αποτελεί άμεση προτεραιότητα να υπάρχει άρρηκτη σχέση των στόχων διδασκαλίας με τα ζητούμενα των εξετάσεων.
Εδώ, λοιπόν, υπάρχει το παράδοξο:

- Επιλέγεται (οδηγίες διδασκαλίας) η διαισθητική προσέγγιση ως εργαλείο για την διδασκαλία της έννοιας του ορίου.

- Η επιλογή αυτή γίνεται με στόχο την εννοιολογική κατανόηση της έννοιας.

- **Αλλά, εξετάζουμε το άτομο που διδάχθηκε το όριο με τους παραπάνω όρους όχι στο επίπεδο εννοιολογικής κατανόησής του,**

αλλά στην ικανότητά του να κάνει αλγεβρικούς χειρισμούς και να υπολογίζει όρια μέσω αλγοριθμικών διαδικασιών.

Εν κατακλείδι, να σημειώσουμε ότι η ιστορία έχει αποδείξει πως η φύση των θεμάτων των πανελλαδικών καθορίζει εν πολλοίς τον τρόπο διδασκαλίας των μαθηματικών τουλάχιστον της Γ΄ Λυκείου. Πράγματι, σε μια έρευνα του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου [5], καθίσταται σαφές ότι η παραπάνω διαπίστωση έχει βαθιές ρίζες στην ελληνική εκπαίδευση και επηρεάζει τις αντιλήψεις των εκπαιδευτικών για τις μεθόδους διδασκαλίας. Σε παρόμοια συμπεράσματα αναφέρεται και η εργασία των Μ. Καλδρυμίδου, Α. Οικονόμου, Π. Οικονόμου & Μ. Τζεκάκη [6].

Με το νέο πρόγραμμα σπουδών, επιχειρείται μια νέα προσέγγιση της διδασκαλίας που εστιάζει περισσότερο στο «γιατί» και δεν επιμένει σε μια φορμαλιστική αντιμετώπιση. Είναι βασικό όμως, να υπάρξει μια γεφύρωση μεταξύ αυτών και των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων. Το λογικό ερώτημα που προκύπτει από τον παραπάνω συλλογισμό αφορά στις αλλαγές που πρέπει να γίνουν στον τρόπο οργάνωσης και επιλογής των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων, ώστε αυτές να μην υπονομεύσουν τις βασικές αρχές και καινοτομίες των νέων προγραμμάτων σπουδών. Ο Θωμαΐδης [7], εστιάζει σε τρεις προτάσεις που μπορούν να συμβάλουν σημαντικά στο παραπάνω ζήτημα. Συγκεκριμένα:

1. *Συμμετοχή εκπροσώπων του Ινστιτούτου Εκπαιδευτικής Πολιτικής με αποκλειστικό ρόλο τον έλεγχο της συνάφειας των θεμάτων με το πρόγραμμα σπουδών και τις οδηγίες διδασκαλίας.*

2. *Οι θεματοδότες με το πρώτο θέμα των πανελλαδικών εξετάσεων στα Μαθηματικά, τα τελευταία 25 χρόνια αξιολογούν την ικανότητα απομνημόνευσης των ορισμών και των θεωρητικών προτάσεων του σχολικού βιβλίου. Θεωρούμε πολύ πιο εποικοδομητικό να περιέχει το πρώτο θέμα απλές ερωτήσεις βασικών γνώσεων από όλο το φάσμα της ύλης Μαθηματικών Γυμνασίου και Λυκείου.*

3. *Αλλαγή των συνθηκών σύμφωνα με τις οποίες γίνεται η επιλογή των θεμάτων.*

Βιβλιογραφία:

[1] Fischbein, E. (1987). Intuition in science and mathematics: An educational approach. Dordrecht, Holland: Reidel Pub.

[2] Οδηγίες διδασκαλίας Μαθηματικών Γ Λυκείου θετικού προσανατολισμού και προσανατολισμού οικονομίας και πληροφορικής σχολικού έτους 2023-24. Ι.Ε.Π.

[3] Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος των Μαθηματικών των Α΄, Β΄ και Γ΄ τάξεων Γενικού Λυκείου, Εφημερίδα της Κυβέρνησης, Αρ. φύλλου 1326.

[4] Οδηγός εκπαιδευτικού (2022), Πρόγραμμα σπουδών για το Μάθημα των Μαθηματικών του Λυκείου, Ι.Ε.Π.

[5] Η Ποιότητα στην Εκπαίδευση. Έρευνα για την αξιολόγηση ποιοτικών χαρακτηριστικών του συστήματος πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (2008). Παιδαγωγικό Ινστιτούτο.

[6] Μ. Καλδρυμίδου, Α. Οικονόμου, Π. Οικονόμου & Μ. Τζεκάκη. (1997). Οι αντιλήψεις των υποψήφιων καθηγητών των Μαθηματικών για τη διδακτική διαδικασία και την επιμόρφωση. Παιδαγωγική Επιθεώρηση 25, 118-150 .

[7] Γ. Θωμαΐδης. (2023). Μπορούν τα νέα προγράμματα σπουδών να συμβάλλουν στην αναβάθμιση των πανελλαδικών εξετάσεων; Προοπτικές και προϋποθέσεις. Στο Γ. Σαράφης & Α. Πέρδος [επιμ.] Πρακτικά 10ης Ημερίδας Μαθηματικών Καλαμαρί, 152-172.

"Καινοτόμες Προσεγγίσεις στη Διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση: Ανάλυση και Προοπτικές βάσει του νέου Προγράμματος Σπουδών"

Συγγραφέας: Νικόλαος ΜανάραςΕπικοινωνία: Μ. Μπότσαρη 8, Πολίχνη
Τηλέφωνο: 6997597544 email: nikgeoman@gmail.com

Περίληψη
Η παρούσα εργασία εστιάζει στην εφαρμογή καινοτόμων προσεγγίσεων στη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση, σύμφωνα με τα νέα Προγράμματα Σπουδών σταΜαθηματικά. Μέσα από μια σφαιρική προσέγγιση, αναλύουμε τις προοπτικές που παρέχει το υπάρχον πλαίσιο του προγράμματος σπουδών για την ανάπτυξη νέων πρακτικών διδασκαλίας. Με έμφαση στην ενίσχυση της κατανόησης και της εφαρμογής των Στοχαστικών Μαθηματικών, προτείνουμε καινοτόμες πρακτικές διδασκαλίας που προάγουν την αποτελεσματική μάθηση και ενδυναμώνουν τις δεξιότητες των μαθητών στον τομέα αυτό.

Abstract
This paper focuses on implementing innovative approaches in teaching stochastic mathematics in secondary education, in accordance with the new curriculum for mathematics. Through a comprehensive approach, we analyze the prospects provided by the current curriculum framework for the development of new teaching practices. Emphasizing the enhancement of understanding and application of stochastic mathematics, we propose innovative teaching practices that promote effective learning and strengthen students' skills in this field.

Εισαγωγή

Η εξέλιξη των Προγραμμάτων Σπουδών στον τομέα των Μαθηματικών έχει επιφέρει σημαντικές αλλαγές και ανάγκες προσαρμογής. Στο πλαίσιο αυτό, η θέση των Στοχαστικών Μαθηματικών κατέχει ιδιαίτερη αξία.

Τα νέα Προγράμματα Σπουδών (ΠΣ) στα Μαθηματικά επιδιώκουν όχι μόνο την κατανόηση των βασικών αρχών και θεωριών, αλλά και την εφαρμογή τους σε πρακτικά προβλήματα και περιβάλλοντα.Ο βασικός σκοπός της διδασκαλίας της Στατιστικής και των Πιθανοτήτων είναι να αναπτύξει την ικανότητα των μαθητών/-τριών να αξιολογούν, ως μελλοντικοί πολίτες, κριτικά πληροφορίες, να εξάγουν συμπεράσματα, να κάνουν προβλέψεις και να λαμβάνουν αποφάσεις κάτω από αβέβαιες συνθήκες. Σε αυτό το πλαίσιο, ο

ρόλος των Στοχαστικών Μαθηματικών (ΣΜ) αναδεικνύεται ωςκλειδί για την κατανόηση της τυχαιότητας και των πιθανοτήτων, προσφέροντας πρωτοποριακές προσεγγίσεις στην επίλυση πραγματικών προβλημάτων.
Είναι σημαντικό για τον εκπαιδευτικό που θα διδάξει ΣΜ να γνωρίζει την εξέλιξή τους στις διάφορες βαθμίδες. Το περιεχόμενο της Στατιστικής εξελίσσεται από τη συλλογή και παρουσίαση δεδομένων από μικρές στατιστικές έρευνες στο Δημοτικό, στη μελέτη συνεχών ποσοτικών δεδομένων και μέτρων θέσης και μεταβλητότητας στο Γυμνάσιο, μέχρι τη μελέτη σχέσεων εξάρτησης μεταξύ δύο μεταβλητών στο Λύκειο.

Σχήμα 1. Οδηγός εκπαιδευτικού Γυμνάσιο

Το περιεχόμενο των Πιθανοτήτων αναπτύσσεται από την αβεβαιότητα διαφόρων γεγονότων και την έννοια της πιθανότητας στο Δημοτικό, στον υπολογισμό πιθανοτήτων με τον κλασικό ορισμό στο Γυμνάσιο και στις έννοιες της δεσμευμένης πιθανότητας στο Λύκειο.
Εξίσου σημαντικό είναι να γνωρίζει πώς εξελίσσονται τα Προσδοκώμενα Μαθησιακά Αποτελέσματα (ΠΜΑ). Στη Στατιστική, στο Γυμνάσιο περιγράφουν αυτές τις γνώσεις και δεξιότητες που είναιαπαραίτητο στο πλαίσιο του προγράμματος σπουδών να έχουν τα παιδιά αυτής της ηλικιακής ομάδας, ώστε να μπορούν να αξιοποιήσουν με κατάλληλο τρόπο τα στάδια της στατιστικής επίλυσης προβλήματος σε θέματα της καθημερινής τους ζωής και να συνεχίσουν στο Λύκειο με άλλες, πιο σύνθετες επίσης πραγματικές καταστάσεις.Στις Πιθανότητες, τα ΠΜΑ αναπτύσσονται κυρίως στην ενότητα Πειράματα τύχης και Πιθανότητες. ΠΜΑ για την συσχέτιση εμφανίζονται για πρώτη φορά στη Γ’ Γυμνασίου και η ενότητα θα αναπτυχθεί κυρίως στο Λύκειο.

Καινοτόμες Προσεγγίσεις

Στη συνέχεια, θα εξετάσουμε πιο λεπτομερώς τις προοπτικές και τις καινοτόμες πρακτικές που προτείνουν τα ΠΣ για τη διδασκαλία των ΣΜ,

εστιάζοντας στην ανάπτυξη νέων πρακτικών διδασκαλίας που ενισχύουν την κατανόηση και την εφαρμογή αυτών των σημαντικών εννοιών.
Βάσει των ΠΣ σταΜαθηματικά, οι καινοτομίες που εστιάζουν στα ΣΜ περιλαμβάνουν:

1. **Σύγχρονη Προσέγγιση στην Τυχαιότητα:** Οι νέες μαθησιακές δομές επιδιώκουν να προσφέρουν σύγχρονες και πρακτικές προσεγγίσεις για την κατανόηση της τυχαιότητας και των στοχαστικών διαδικασιών.

2. **Εφαρμογές σε Πραγματικά Προβλήματα:**Δίνεται έμφαση στην εφαρμογή των Στοχαστικών Μαθηματικών σε πραγματικά προβλήματα και σενάρια, προκειμένου να ενισχυθεί η σύνδεση με τον πραγματικό κόσμο.

3. **Διεπιστημονική Προσέγγιση:** Η διεπιστημονική συνεργασία μεταξύ Μαθηματικών και άλλων επιστημών ενισχύεται, για να εφαρμοστούν τα Στοχαστικά Μαθηματικά σε διάφορους τομείς.

4. **Τεχνολογίες Πληροφορικής:** Ενσωματώνεται η χρήση τεχνολογιών πληροφορικής και υπολογιστικών εργαλείων για την εκμάθηση των Στοχαστικών Μαθηματικών και την επίλυση προβλημάτων.

5. **Ενίσχυση Δεξιοτήτων Κριτικής Σκέψης και Προβληματισμού:** Η διδασκαλία επικεντρώνεται στην ανάπτυξη δεξιοτήτων κριτικής σκέψης, προβληματισμού και επίλυσης προβλημάτων με χρήση των Στοχαστικών Μαθηματικών.

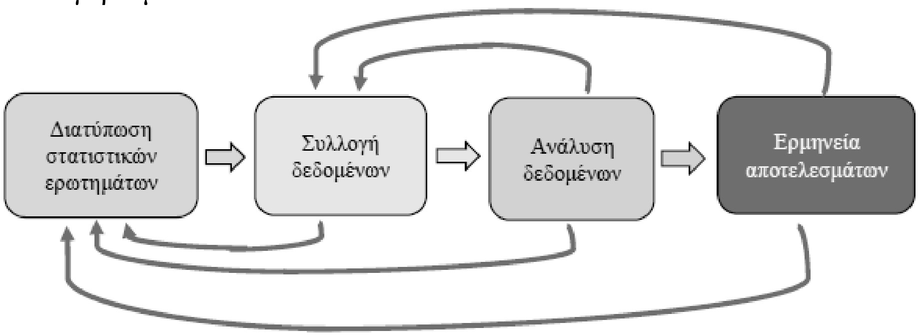
Αυτές οι καινοτομίες αποσκοπούν στην καλύτερη προετοιμασία των μαθητών για την αντιμετώπιση προκλήσεων που συναντούν στον σύγχρονο εκπαιδευτικό και επαγγελματικό χώρο.Ας δούμε καθένα από αυτά.

Σύγχρονη Προσέγγιση στην Τυχαιότητα

Η εκπαίδευση στα Στοχαστικά Μαθηματικά σύμφωνα με τα νέαΠΣ έχει επαναπροσδιορίσει την προσέγγιση στην τυχαιότητα. Σε αντίθεση με τις παραδοσιακές μεθόδους, όπου η τυχαιότητα γινόταν αντιληπτή συχνά ως αφηρημένη έννοια, τα νέα προγράμματα επιδιώκουν να την ενσωματώσουν ως ζωντανή και εφαρμόσιμη έννοια στη μαθησιακή διαδικασία.
Οι μαθητές διδάσκονται να αντιλαμβάνονται την τυχαιότητα ως βασικό στοιχείο του περιβάλλοντός τους, ώστε να αποκτήσουν γνώσεις και δεξιότητες που θα τους βοηθήσουν να διερευνούν πολύπλοκες, καθημερινές καταστάσεις στις οποίες υπεισέρχεται η τυχαιότητα, να διαχειρίζονται και να ελέγχουν πιθανά σφάλματα, να αναπτύσσουν επιχειρήματα και να οδηγούνται μέσω αυτών στη λήψη των αποφάσεων.

Εφαρμογές σε Πραγματικά Προβλήματα

Ένα από τα βασικά χαρακτηριστικά της σύγχρονης διδασκαλίας των Στοχαστικών Μαθηματικών είναι η έμφαση στις εφαρμογές τους σε πραγματικά προβλήματα. Οι μαθητές καλούνται να εξερευνήσουν πώς τα ΣΜ μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την ανάλυση και την επίλυση πραγματικών καταστάσεων.Η επίλυση στατιστικών προβλημάτωνείναι μια διαδικασίατεσσάρων βασικών σταδίων (Bargagliotti et al., 2020), των οποίων η σειρά δεν είναι αυστηρά διαδοχική, καθώς είναι αναμενόμενα τα «πισωγυρίσματα».



Σχήμα 2: Τα στάδια της διαδικασίας επίλυσης στατιστικού προβλήματος

Στα πλαίσια αυτά, οι μαθητές μαθαίνουν πώς να μοντελοποιούν πραγματικά σενάρια με στοχαστικούς όρους. Αναπτύσσουν τη δυνατότητα να εφαρμόζουν τα μαθηματικά εργαλεία στην πράξη για την πρόβλεψη και τη λήψη αποφάσεων. Επομένως, εκπαιδεύονται όχι μόνο στη θεωρητική κατανόηση των Στοχαστικών Μαθηματικών αλλά και στην εφαρμογή τους σε πραγματικά προβλήματα.

Διεπιστημονική Προσέγγιση

Η διεπιστημονική προσέγγιση της διδασκαλίας Στοχαστικών Μαθηματικών επιτρέπει τη σύνδεση των Μαθηματικών με άλλες επιστημονικές περιοχές, ώστε οι μαθητές να εξετάσουν πώς οι στοχαστικοί όροι χρησιμοποιούνται σε διάφορες επιστήμες και πεδία.

Ένα ενδιαφέρον παράδειγμα είναι η εξέταση της διασύνδεσης της πιθανότητας με τη βιολογία, συγκεκριμένα με τον τομέα της γενετικής, ώστε να γίνει κατανοητό πώς η τυχαιότητα συμβάλλει στη βιολογική ποικιλία.

Έστω ότι μελετάμε ένα συγκεκριμένο γονίδιο που κωδικοποιεί ένα χαρακτηριστικό, όπως το χρώμα των ματιών.

1. **Ορισμός των πιθανοτήτων:** Ας υποθέσουμε ότι υπάρχουν δύο εκδόσεις (αλληλομορφίες) του γονιδίου, μια από τον κάθε γονιό. Οι μαθητές μπορούν να ορίσουν τις πιθανότητες μετάδοσης κάθε έκδοσης σε ένα παιδί. Για παράδειγμα, 50% πιθανότητα να μεταδοθεί η έκδοση από τη μητέρα και 50% από τον πατέρα.

2. **Προσομοίωση με Desmos:** Με το Desmos, οι μαθητές μπορούν να δημιουργήσουν γραφικές αναπαραστάσεις για τις πιθανότητες μετάδοσης και να παρακολουθήσουν πώς αλλάζει το ποσοστό του χαρακτηριστικού στον πληθυσμό καθώς αυξάνεται ο αριθμός των γενεών.

3. **Κατανόηση Συνεπειών:** Οι μαθητές μπορούν να συνειδητοποιήσουν πώς η τυχαιότητα στη μετάδοση των γονιδίων επηρεάζει τη γενετική ποικιλία. Μπορεί να παρουσιαστεί η έννοια της φυσικής επιλογής, καθώς τα χαρακτηριστικά που μεταδίδονται επιβιώνουν ή απορρίπτονται ανάλογα με το περιβάλλον.

Τεχνολογίες Πληροφορικής

Σε αυτήν την ενότητα, εξετάζουμε τον τρόπο με τον οποίο οι τεχνολογίες πληροφορικής μπορούν να ενσωματωθούν στη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών, ενισχύοντας την κατανόηση και το ενδιαφέρον των μαθητών.Έχει φανεί, από έρευνες στην τάξη -όχι στην Ελλάδα- ότι η δυνατότητα χρήσης προσομοιώσεων, ψηφιακών εργαλείων (Pratt, 2005) και εκτέλεσης μεγάλου πλήθους δοκιμών υποστηρίζει τη δημιουργία νοημάτων από τα παιδιά για τις έννοιες των Στοχαστικών Μαθηματικών.Θα ήταν επομένως χρήσιμο για τη σωστή ανάπτυξη του στατιστικού συλλογισμού να εισαχθούν στην σχολική τάξη εργαλεία, όπως οι προσομοιώσεις και τα μεγάλα σύνολα δεδομένων.

Εκπαιδευτικά Λογισμικά:

Αναλύουμε την ύπαρξη εκπαιδευτικών λογισμικών που μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εκμάθηση Στοχαστικών Μαθηματικών. Προτείνουμε συγκεκριμένα εργαλεία που μπορούν να βοηθήσουν τους εκπαιδευτικούς στη διδασκαλία του θέματος. Για παράδειγμα:

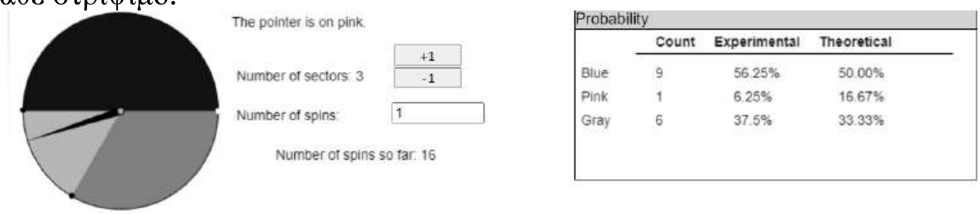
Τοψηφιακό εργαλείο **Spinner** δίνει την ευκαιρία στους μαθητές να κάνουν υποθέσεις, να παίξουν, να αναλύσουν, να θέσουν δικά τους ερωτήματα και να εμπλουτίσουν την νοητική εικόνα που έχουν για έννοιες, όπως η μεταβλητότητα(Polaki, 2005; Pratt 2005).Μέσα από τη χρήση του μπορεί να ξεπεραστεί η δυσκολία και η σύγχυση της πιθανότητας ενός ενδεχομένου με τη σχετική συχνότητα εμφάνισής του.Μια εφαρμογή του είναιη χρήση του spinner ή άλλων ψηφιακών εργαλείων (Pratt & Noss, 2002), σε εργασία σε μικρές ομάδες και ατομική εμπλοκή των μαθητών,όπως για παράδειγμαστο πείραμα με το κέρμα:

Χρησιμοποιώνταςένα Spinner[35] ή άλλα παρόμοια εργαλεία, δημιουργούμε δύο επιλογές: "Κεφαλή" και "Κορώνα".Κάθε φορά που περιστρέφετε τον spinner, ορίζουμε ότι η "Κεφαλή" είναι η επιλογή που θα εμφανιστεί με πιθανότητα 1/2, όπως στο πείραμα με το κέρμα.Καταγράφουμε το αποτέλεσμα κάθε

[35]http://www.shodor.org/interactivate/activities/AdjustableSpinner

περιστροφής και καταμετράμε πόσες φορές εμφανίζεται η "Κεφαλή" και πόσες φορές η "Κορώνα". Αναλύουμε τα αποτελέσματα και ελέγχουμε αν πράγματι η πιθανότητα της "Κεφαλής" είναι περίπου 1/2.Μπορούμε να εκτελέσουμε το πείραμα πολλές φορές για να προσεγγίσουμε την αναμενόμενη πιθανότητα και να διερευνήσουμε την ιδέα της αδυναμίας να φέρουμε "Κεφαλή" ακριβώς τις μισές φορές σε μια σειρά πειραμάτων.

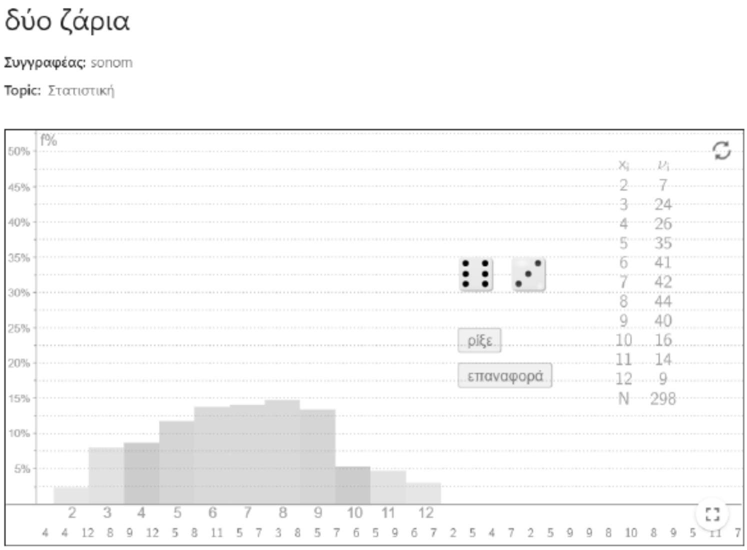
Μια ακόμη εφαρμογή του είναι:Οι μαθητές, χωρισμένοι σε μικρές ομάδες αξιοποιούν τα τάμπλετ του σχολείου, για να κάνουν πειραματισμούς και διερεύνηση. Οδίσκοςτου spinner διαιρείται σε 6 ίσουςτομείς,τρεις από αυτούς με ένα χρώμα, δύο με ένα άλλο χρώμα και ένας με ένα τρίτο χρώμα, ώστε η πιθανότητα εμφάνισης κάθε χρώματος να είναι 1/2, 1/3 και 1/6 αντίστοιχα, σε κάθε στρίψιμο.



Σχήμα 3: Στιγμιότυπο του Spinnerμετά από 16 επαναλήψεις

Επαναλαμβάνοντας το στρίψιμο του spinner μερικές φορές, οι μαθητές θα διαπιστώσουν ότι: α) η συχνότητα εμφάνισης κάθε χρώματος παρουσιάζει μεταβλητότητα από ομάδα σε ομάδα και β) όσο μεγαλύτερη είναι η πιθανότητα ενός χρώματος, τόσο μεγαλύτερη είναι και η συχνότητα εμφάνισής του μετά από μερικά στριψίματα και γ) παρά τη μεταβλητότητα από ομάδα σε ομάδα, φαίνεται να υπάρχει σχέση ανάμεσα στην πιθανότητα κάθε χρώματος και στη σχετική συχνότητα εμφάνισης του χρώματος.

Το **GeoGebra**είναι ένα εργαλείο που προσφέρει δυνατότητες δημιουργίας διαδραστικών γραφικών παραστάσεων και προσομοιώσεων, πειραματισμό με πιθανοτικές διαδικασίες, που μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών.

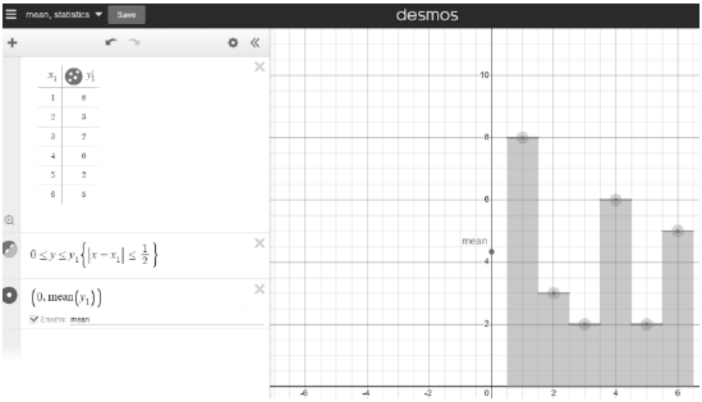


Σχήμα 4: Στιγμιότυπο GeoGebraρίψης δύο ζαριών με την κατανομή αθροίσματος

Μια διασκεδαστική δραστηριότητα για να εξερευνήσουμε το άθροισμα της ρίψης δύο ζαριών[36]. Δύο ζάρια ρίχνονται εξομοιωτικά κάθε φορά που πατιέται το αντίστοιχο κουμπί.Μέσω ενός διαγράμματος μπάρας, οι μαθητές θα παρακολουθούν τις πιθανότητες κάθε δυνατού αθροίσματος. Ενθαρρύνουμε τους μαθητές να εκτελέσουν πολλαπλές ρίψεις, παρατηρώντας πώςεξελίσσονται οι πιθανότητες και πώς κατανέμονται διάφορα αθροίσματα. Μέσα από τη συζήτηση των παρατηρήσεών τους, θα ενισχύσουμε την κατανόηση τους για τις πιθανότητες και τη σχέση τους με τις πραγματικές πειραματικές καταστάσεις. Μέσω αυτής της δραστηριότητας, οι μαθητές θα αποκτήσουν πρακτικές δεξιότητες στην ανάλυση πιθανοτήτων και ταυτόχρονα θα απολαύσουν τη διαδραστική προσέγγιση του θέματος.

Το **Desmos** είναι ένα διαδικτυακό εργαλείο για τη δημιουργία διαδραστικών γραφικών παραστάσεων και προσομοιώσεων, μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη διδασκαλία των ΣΜ.Μπορούμε να δημιουργήσουμε γραφικές παραστάσεις που αντιπροσωπεύουν στοχαστικές διαδικασίες ή να εισάγουμε παραμέτρους για να δοκιμάσουμε διάφορα σενάρια. Επίσης, μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για τη δημιουργία διαδραστικών διαγραμμάτων πιθανοτικών κατανομών.

[36]https://www.geogebra.org/m/Cd3wsmqT



Σχήμα 5: Στιγμιότυπο desmos για εύρεση της μέσης τιμής μια κατανομής

Για παράδειγμα[37]μπορούμε να εξερευνήσουμε την έννοια της μέσης τιμής ενός δείγματος με τυχαίες τιμές μεταβλητών από 1 έως 6.Δημιουργούμε ένα σύνολο δεδομένων που αντιπροσωπεύει τις τυχαίες τιμές που μπορούν να παρατηρηθούν κατά τη ρίψη ενός ζαριού, να εισάγουμε τις τιμές του δείγματος και να βρούμε τον μέσο όρο κάθε φορά ανάλογα με το πλήθος των ρίψεων και την κατανομή. Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει διαδραστικά, επιτρέποντας στους μαθητές να προσαρμόσουν τις τιμές και να παρακολουθήσουν πώς επηρεάζεται η μέση τιμή του δείγματος.Με αυτήν τη μεθοδολογία, οι μαθητές θα αποκτήσουν καλύτερη κατανόηση της μέσης τιμής, εφαρμόζοντας τις αρχές της στατιστικής μέσα από μια διαδραστική προσέγγιση.

Ο **Διαδραστικός Ψηφιακός Πίνακας**, μπορεί να αξιοποιηθεί δημιουργικά στη διδασκαλία των Στοχαστικών Μαθηματικών στα ΠΣ. Αναλόγως των διαθέσιμων λειτουργιών του πίνακα, ορισμένες ιδέες περιλαμβάνουν:

1. **Διαδραστικές Ασκήσεις:** Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον διαδραστικό πίνακα για να δημιουργήσουμε διαδραστικές ασκήσεις σχετικές με στοχαστικούς όρους. Οι μαθητές μπορούν να συμμετέχουν ενεργά και να λύνουν προβλήματα που αφορούν πιθανότητες, κατανοώντας πρακτικά τις έννοιες.

2. **Κοινή Κατασκευή Διαγραμμάτων:** Αξιοποίηση του πίνακα για κοινή κατασκευή διαγραμμάτων πιθανοτήτων, γραφικές αναπαραστάσεις και άλλα γραφήματα που εξηγούν στοχαστικές έννοιες.

3. **Διαδραστικά Παιχνίδια:** Δημιουργία διαδραστικών παιχνιδιών που απαιτούν τη χρήση στοχαστικών σκέψεων. Αυτό μπορεί να κάνει τη διαδικασία της μάθησης πιο διασκεδαστική και ενδιαφέρουσα.Με την ολοκλήρωση αυτών των δραστηριοτήτων, οι μαθητές θα έχουν την

[37]https://www.desmos.com/calculator/4gexciayyp

ευκαιρία να εξερευνήσουν τις στοχαστικές μαθηματικές έννοιες με μια πιο διαδραστική και συναρπαστική προσέγγιση.

Συμπεράσματα

Η ενσωμάτωση των ΣΜ στα νέα ΠΣυνιστά καινοτόμα προσέγγιση που ενισχύει την κατανόηση των μαθητών σχετικά με πιθανότητες και στατιστικές έννοιες.Οι μαθητές εκπαιδεύονται στην ανάπτυξη κριτικής σκέψης, μέσω της ανάλυσης πραγματικών σεναρίων, ενισχύοντας τη διαλεκτική σκέψη και την ικανότητά τους να προβληματίζονται.Η σύνδεση των ΣΜ με άλλες επιστημονικές περιοχές, όπως η οικονομία και η βιολογία, προάγει τη διεπιστημονική κατανόηση και την ενίσχυση της εκπαιδευτικής εμπειρίας.Η ενσωμάτωση εκπαιδευτικών τεχνολογιών, επιτρέπει τη δημιουργία δυναμικών και απλών περιβαλλόντων μάθησης.Συμπερασματικά, οι μαθητές αναπτύσσουν δεξιότητες ανάλυσης, προβληματισμού και λήψης αποφάσεων που είναι βασικές για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.

Προτάσεις

Έχει επιχειρηθεί πολλές φορές στο παρελθόν η ένταξη ορισμένων στοιχείων ΣΜ στη διδακτέα ύλη Γυμνασίου και Λυκείου μέσω των Π.Σ. και των διδακτικών βιβλίων, αλλά χωρίς κανένα ουσιαστικό αποτέλεσμα. Οι λόγοι ήταν κυρίως δύο. Ο ένας η μη διδασκαλία τους από τους εκπαιδευτικούς, με βασικό επιχείρημα την έλλειψη χρόνου για ολοκλήρωση της παραδοσιακής μαθηματικής ύλης Άλγεβρας και Γεωμετρίας που θεωρούν πιο σημαντική. Ο άλλος λόγος, όταν στοιχεία Στατιστικής και Πιθανοτήτων εντάχθηκαν στην εξεταστέα ύλη των πανελλαδικών εξετάσεων Γενικής Παιδείας, ήταν ο εκφυλισμός της διδασκαλίας σε «μεθοδολογία» και «ασκησιολογία» συνδυαστικών θεμάτων στα οποία στοχαστικές έννοιες αναμειγνύονταν με έννοιες τη Ανάλυσης.Το πρόβλημα θα εμφανιστεί σε πιο έντονη μορφή όταν αρχίσει η εφαρμογή των ΝΠΣ. Είναι κατανοητό ότι η διδασκαλία των Πιθανοτήτων και της Στατιστικής προκαλεί ανασφάλεια σε ορισμένους εκπαιδευτικούς, αλλά υπάρχουν ορισμένες προτάσεις και ιδέες που μπορούν να βοηθήσουν:

1. **Ενσωμάτωση Πραγματικών Καταστάσεων:** Χρήση πραγματικών παραδειγμάτων και καταστάσεων από την καθημερινή ζωή που έχουν εφαρμογές στιςΠιθανότητες και στη Στατιστική,όπως η ανάλυση στατιστικών δεδομένων από έρευνες, η εφαρμογή πιθανοτικών μοντέλων σε πραγματικά προβλήματα.

2. **Χρήση Τεχνολογίας:** Ενσωμάτωση ψηφιακών εργαλείων και προγραμμάτων που μπορούν να κάνουν την ανάλυση δεδομένων και την εφαρμογή πιθανοτικών μοντέλων πιο εύκολη και προσιτή. Αξιοποίηση τωνδιαδραστικών πινάκων και των τάμπλετ του σχολείου.

3. **Δραστηριότητες Συνεργατικής Μάθησης:** Δημιουργία δραστηριοτήτων συνεργατικής μάθησης, όπου οι μαθητές μπορούν να συνεργαστούν και να λύσουν προβλήματα μαζί. Η συζήτηση και η ανταλλαγή ιδεών μπορούν να διευκολύνουν την κατανόηση.

4. **Συνεχής Επαγγελματική Ανάπτυξη:** Ενημέρωσηδράσεωντης ΕΛΣΤΑΤ, συνέδρια, ημερίδες και επιμορφώσειςγια τις τελευταίες εξελίξεις στον τομέα για να ενίσχυση των γνώσεων.

5. **Εξατομίκευση:** Προσαρμογήτης προσέγγισης στα ενδιαφέροντα και τις ανάγκες των μαθητών. Εξερεύνηση του τρόπο που οι στοχαστικοί όροι μπορούν να σχετίζονται με τα ενδιαφέροντα τους, κάνοντας τη διδασκαλία πιο συναρπαστική.

Αυτές οι προτάσεις μπορούν να βοηθήσουν στη δημιουργία ενός περιβάλλοντος διδασκαλίας που ενθαρρύνει την κατανόηση και το ενδιαφέρον των μαθητών για τα Στοχαστικά Μαθηματικά.Επιπλέον, τα ΣΜ αποτελούν μια περιοχή η οποία δεν χρησιμοποιεί δύσκολο φορμαλισμό στο επίπεδο του σχολείου. Έτσι, μπορεί να είναι ένα αρκετά συμπεριληπτικό κομμάτι των σχολικών Μαθηματικών που κινεί το ενδιαφέρον περισσότερων μαθητών.

Βιβλιογραφία:

1. Franklin, C., Kader, G., Mewborn, D., Moreno, J., Peck, R., Perry, M., & Scheaffer, R. (2007). *Guidelines for Assessment and Instruction in Statistics Education (GAISE) report: A pre-K–12 curriculum framework*. American Statistical Association. (https://www.amstat.org/asa/education/Guidelines-for-Assessment-and-Instruction-in-Statistics-Education-Reports.aspx)
2. Garfield, J. (2002). *The challenge of developing statistical reasoning*. Journal of Statistics Education, 10(3).
3. Pfannkuch, M. (2005). *Thinking tools and variation*. Statistics Education Research Journal, 1(1), 46-52.
4. Pratt, D. (2005). *How do Teachers Foster Students' Understanding of Probability?* In G. A. Jones (Ed.), *Exploring Probability in School. Challenges for Teaching and Learning* (pp. 171-190). NY, USA: Springer.
5. Reading, C., & Reid, J. (2007). *Reasoning about Variation: Student Voice*. International Electronic Journal of Mathematics Education, 2.
6. ΟδηγόςΕκπαιδευτικούγιατομάθηματωνΜαθηματικώνΓυμνασίου (2022).(https://iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide-datefilters/view-file?fid=aead5643b8da249d4e803df6707494dd52373f7e9250ffb50af9838c1bb54dd8)
7. ΟδηγόςΕκπαιδευτικούγια το μάθημα των ΜαθηματικώνΛυκείου (2022).(https://iep.edu.gr/services/eduguide/iframes/education-guide-

datefilters/view-file?fid=1176d233c95976d303416514530fcba253e8ecab5443c2593e6c39f34210713f)