ΘΕΩΡΗΜΑ BOLZANO: ΜΙΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΣΤΗ ΒΑΣΗ ΤΗΣ ΑΛΛΗΛΕΠΙΔΡΑΣΗΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΚΑΙ ΤΟΥ ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΙΣΜΟΥ

Σαράφης Ιωάννης[1], Πέρδος Αθανάσιος[2], Ντρίζος Δημήτριος[3], Δουκάκης Σπυρίδων[4]

[1]Μαθηματικός, Ελληνογαλλική Σχολή «Καλαμαρί», jsaraf@otenet.gr

[2]Δρ. Φυσικός – Πληροφορικός, Ελληνογαλλική Σχολή «Καλαμαρί», perdos@kalamari.gr

[3]Σύμβουλος Μαθηματικών Τρικάλων - Καρδίτσας, drizosdim@yahoo.gr

[4]Υπ. Διδάκτορας, Πανεπιστήμιο Αιγαίου, sdoukakis@rhodes.aegean.gr

Περίληψη

Στην εργασία αυτή παρουσιάζουμε μια διδακτική προσέγγιση του θεωρήματος Bolzano, στο πλαίσιο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, η οποία περιλαμβάνει παραδείγματα και ειδικές περιπτώσεις εφαρμογής του θεωρήματος, αντιπαραδείγματα που αναδεικνύουν ότι οι προϋποθέσεις του θεωρήματος είναι ικανές όχι όμως και αναγκαίες, αλλά και προβλήματα που περιγράφουν φυσικές καταστάσεις που αντιμετωπίζονται στο πεδίο των μαθηματικών με εφαρμογή του εν λόγω θεωρήματος. Κατά τη διδασκαλία των περισσότερων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων ζητήθηκε από μαθητές της Τεχνολογικής Κατεύθυνσης να τα επιλύσουν και αλγοριθμικά στο πλαίσιο του μαθήματος της Ανάπτυξης Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον (Α.Ε.Π.Π.), στοχεύοντας στην ανάπτυξη και τη βελτίωση ικανοτήτων στη χρήση των δομών επιλογής και επανάληψης. Χάρη στο κοινό εκπαιδευτικό υλικό που χρησιμοποιείται στα δύο μαθήματα, οι μαθητές εμπλέκονται σε διαδικασίες επέκτασης θεωρημάτων των μαθηματικών, στη βάση υλοποίησης και εφαρμογής αλγορίθμων με ψηφιακά μέσα. Τέλος, η εργασία αυτή επιχειρεί να λειτουργήσει και ως μια μικρή αφορμή, ώστε να υλοποιηθούν στην πράξη διδακτικά σενάρια τα οποία προάγουν την διεπιστημονικότητα.

Εισαγωγή

Το πρόβλημα της επινόησης γενικών τύπων για τον ακριβή προσδιορισμό των ριζών πολυωνυμικών εξισώσεων, απασχόλησε για αιώνες, ως πρόβλημα αιχμής, αρκετούς μεγάλους μαθηματικούς ερευνητές, από την αρχαιότητα ως τις μέρες μας. Όταν είναι αδύνατον να προσδιοριστούν οι ρίζες μιας εξίσωσης, η συνήθης επιστημονική πρακτική λέει ότι η προσπάθειά μας πρέπει πλέον να εστιάζεται στην αναζήτηση πληροφοριών που θα φωτίζουν όσο γίνεται περισσότερο την κατάσταση και θα κάνουν «ανώδυνη» αυτή την έλλειψη ακριβείας. Αυτή η γενική τακτική μπορεί να εξειδικευτεί στο πρόβλημα της αναζήτησης των ριζών μιας εξίσωσης (όταν αυτές είναι αδύνατον να προσδιοριστούν) με τη διατύπωση νέων ερωτημάτων του τύπου:

- Πόσες πραγματικές ρίζες έχει η εξίσωση;
- Πού περίπου βρίσκονται αυτές οι ρίζες πάνω στον άξονα x′x των πραγματικών αριθμών;
- Πόσες είναι θετικές και πόσες αρνητικές;

Σε ερωτήματα τέτοιου τύπου δίνονται απαντήσεις από ορισμένα θεωρήματα της στοιχειώδους Μαθηματικής Ανάλυσης, που έχει επικρατήσει να τα αποκαλούμε «υπαρξιακά θεωρήματα». Μεταξύ αυτών εντάσσεται και το γνωστό ως θεώρημα του Bolzano.

Παράλληλα, η χρήση των ψηφιακών μέσων συνέβαλλε πρώτον, στην ελαχιστοποίηση του χρόνου που απαιτούνταν για τους απαραίτητους υπολογισμούς και δεύτερον, στην βελτίωση της ακρίβειας των προσεγγίσεων των ριζών διαφόρων, συνήθως πολύπλοκων και μεγάλου βαθμού εξισώσεων (Ζαχαριάδης κ.α., 2007). Αυτή ακριβώς η αλληλεπίδραση των μαθηματικών και των ψηφιακών μέσων παρουσιάζεται σ' αυτήν την διδακτική πρόταση που κατατίθεται με την παρούσα εργασία.

Το θεώρημα Bolzano – Παραδείγματα και Αντιπαραδείγματα

Αρχικά συζητάμε με τους μαθητές και τις μαθήτριες το θεώρημα στο πλαίσιο της γεωμετρικής του εποπτείας, και με στοχευμένο διάλογο, οδηγούμε τους μαθητές να διατυπώσουν το θεώρημα και στην συμβολική-μαθηματική γλώσσα (Ανδρεαδάκης κ.α. 2010):

Θεώρημα

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σε ένα διάστημα [α,β]. Αν:

- η f είναι συνεχής στο [α,β] και, επιπλέον, ισχύει
- $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$

τότε υπάρχει ένα, τουλάχιστον, $x_0 \in (\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε $f(x_0)=0$

Δηλαδή, η εξίσωση $f(x)=0$ έχει στο διάστημα (α,β) μια τουλάχιστον λύση.

Παράδειγμα 1ο

Ν' αποδειχθεί ότι η εξίσωση $x^4-4x-5=0$ έχει στο $\mathbb{R}$ μια τουλάχιστον ρίζα.

Λύση

Αναζητούμε διάστημα $[\alpha,\beta]\subseteq\mathbb{R}$ έτσι, ώστε για την συνάρτηση $f(x)=x^4-4x-5$ να ισχύει $f(\alpha)\cdot f(\beta)<0$.

Επειδή f(0)=-5<0 και f(2)=3>0, θεωρούμε τη συνάρτηση f στο [0,2].

Επειδή η f είναι συνεχής στο [0,2], από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_0\in(0,2)\subseteq\mathbb{R}$ έτσι, ώστε $f(x_0)=0$, δηλαδή η εξίσωση f(x)=0 έχει στο $\mathbb{R}$ μια τουλάχιστον ρίζα.

Παράδειγμα 2ο

Ν' αποδειχθεί ότι η εξίσωση $4x^3+6=3x^2+8x$ (1) έχει στο διάστημα (0,2) δύο τουλάχιστον ρίζες (Καλομητσίνης 2003).

Λύση

Με συστηματικό και στοχευμένο διάλογο αναδεικνύουμε στην τάξη την κρίσιμη μεθοδολογική παρατήρηση που μας λέει ότι: Αν ζητείται η ύπαρξη δύο ή περισσοτέρων ριζών μιας εξίσωσης f(x)=0 σε ένα διάστημα (α,β), τότε χωρίζουμε το διάστημα αυτό σε δύο ή περισσότερα διαστήματα και εφαρμόζουμε το θεώρημα Bolzano σε καθένα απ' αυτά.

Στο παράδειγμά μας, αρκεί η συνάρτηση $f(x)=4x^3-3x^2-8x+6$ να έχει δύο τουλάχιστον ρίζες στο διάστημα (0,2).

Θεωρούμε τη συνάρτηση $f(x)=4x^3-3x^2-8x+6$ στο [0,1]

- η f είναι συνεχής στο [0,1] (ως πολυωνυμική)
- f(0)=6>0 , f(1)=-1<0

Επομένως, από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_1\in(0,1):f(x_1)=0$, δηλαδή η εξίσωση f(x)=0 έχει στο διάστημα (0,1) μια τουλάχιστον ρίζα. Ομοίως έχουμε ότι

- η f είναι συνεχής στο [1,2] (ως πολυωνυμική)
- f(1)=-1<0 , f(2)=10>0

επομένως, από το θεώρημα Bolzano προκύπτει ότι υπάρχει τουλάχιστον ένα $x_2\in(1,2):f(x_2)=0$

Δηλαδή η εξίσωση f(x)=0 έχει στο διάστημα (1,2) μια τουλάχιστον ρίζα.

Επειδή $0<x_1<1$ και $1<x_2<2$ θα ισχύει $x_1\neq x_2$.

Άρα η συνάρτηση f έχει στο (0,2) δύο τουλάχιστον ρίζες.

Περιπτώσεις εφαρμογής του Θ. Bolzano

Αν ζητείται η ύπαρξη ρίζας μιας εξίσωσης f(x)=0 σε διάστημα μορφής [α,β) ή (α,β] ή [α,β] τότε αρκεί να ισχύει f(α) f(β)≤0, οπότε διακρίνουμε περιπτώσεις για να ελέγξουμε αν f(α)·f(β)=0 ή αν f(α)·f(β)<0.

Στην περίπτωση που f(α)·f(β)=0 παίρνουμε ότι ρίζα της εξίσωσης είναι το α ή το β, ενώ αν f(α)·f(β)<0, με το θεώρημα Bolzano διαπιστώνουμε ότι υπάρχει ρίζα στο (α,β).

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Έστω οι συναρτήσεις f, g ορισμένες και συνεχείς σε διάστημα Α και ότι για κάθε $x\in A$ ισχύει f(x)-g(x)=cx, $c\in\mathbb{R}$.

Αν η εξίσωση f(x)=0 έχει δύο ετερόσημες ρίζες $\rho_1<0<\rho_2$, να αποδείξετε ότι η εξίσωση g(x)=0 έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $[\rho_1,\rho_2]$.

Λύση

Επειδή τα ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης f(x)=0, ισχύει $f(\rho_1)=f(\rho_2)=0$.

f(x)-g(x)=cx$\Leftrightarrow$g(x)=f(x)-cx

Η g είναι συνεχής στο $[\rho_1,\rho_2]$ διότι είναι συνεχής στο A ($[\rho_1,\rho_2]\subseteq A$)

$g(\rho_1)=f(\rho_1)-c\rho_1=-c\rho_1$ και $g(\rho_2)=f(\rho_2)-c\rho_2=-c\rho_2$

$g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=c^2\cdot\rho_1\cdot\rho_2\le 0$ ($\rho_1<0<\rho_2$ και $c\in\mathbb{R}$)

Αν $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)=0$ τότε $g(\rho_1)=0$ ή $g(\rho_2)=0$, δηλαδή οι ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης g(x)=0.

Αν $g(\rho_1)\cdot g(\rho_2)<0$, από το θεώρημα Bolzano θα υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0\in(\rho_1,\rho_2)$ τέτοιο ώστε $g(x_0)=0$.

Επειδή και οι ρ_1,ρ_2 είναι ρίζες της εξίσωσης g(x)=0, θα ισχύει $x_0\in[\rho_1,\rho_2]$ ώστε $g(x_0)=0$.

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Έστω συνάρτηση f συνεχής στο [0,1] με f(0)=f(1).

Να αποδειχθεί ότι η εξίσωση $f(x)=f(x+1/3)$ έχει μια τουλάχιστον πραγματική ρίζα (Ντούγιας 2003).

Λύση

Θεωρούμε τη συνάρτηση $h(x)=f(x)-f(x+1/3)$. Η h ορίζεται για κάθε $x\in\mathbb{R}$ με $\begin{cases}0\le x\le 1\\ 0\le x+1/3\le 1\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}0\le x\le 1\\ -1/3\le x\le 2/3\end{cases}\Leftrightarrow 0\le x\le 2/3$

Καταλήγουμε ότι η h ορίζεται στο διάστημα $[0,2/3]$.

Η f συνεχής στο $[0,2/3]$, η x+1/3 συνεχής ως πολυωνυμική στο $[0,2/3]$, οπότε η $f(x+1/3)$ θα είναι συνεχής στο $[0,2/3]$, ως σύνθεση συνεχών συναρτήσεων.

Καταρχήν η h είναι συνεχής στο $[0,2/3]$.(πράξεις συνεχών συναρτήσεων)

$h(0)=f(0)-f(1/3)$, $h(2/3)=f(2/3)-f(1)=f(2/3)-f(0)$

και $h(1/3)=f(1/3)-f(2/3)$.

Έχουμε $h(0)+h(1/3)+h(2/3)=$

$f(0)-f(1/3)+f(1/3)-f(2/3)+f(2/3)-f(0)=0 \qquad (1)$

Αν h(0)=0 ,τότε η εξίσωση έχει ρίζα την x=0. Όμοια, αν $h(1/3)=0$ έχει ρίζα την $x=1/3$και αν $h(2/3)=0$ έχει ρίζα την $x=2/3$.

Έστω ότι οι αριθμοί h(0), $h(1/3)$ και $h(2/3)$είναι διάφοροι του μηδενός. τότε, λόγω της (1), δυο τουλάχιστον από αυτούς είναι ετερόσημοι. Έστω π.χ. ότι $h(0)\cdot h(1/3)<0$. Σ' αυτήν την περίπτωση από το θεώρημα Bolzano έπεται ότι η h έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο $(0,1/3)$. Άρα η εξίσωση h(x)=0 θα έχει μια τουλάχιστον ρίζα. Όμοια, αν $h(1/3)\cdot h(2/3)<0$ ή $h(0)\cdot h(2/3)<0$.

Το θεώρημα. Bolzano και οι προϋποθέσεις του

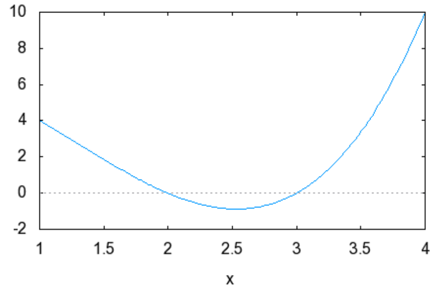
Το θεώρημα Bolzano εξασφαλίζει, με ορισμένες προϋποθέσεις, ότι υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ τέτοιο, ώστε f(ξ)=0.

Μία παρερμηνεία που πιθανώς να εμφανίσουν οι μαθητές/τριες είναι να θεωρήσουν ότι, όταν δεν ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος, τότε δεν μπορεί να υπάρχει $\xi\in(\alpha,\beta)$ με f(ξ)=0.

Όμως, όταν δεν ισχύουν οι προϋποθέσεις του θεωρήματος, τότε μπορεί και να υπάρχουν σημεία που μηδενίζουν την f, όπως δείχνουμε στα παρακάτω παραδείγματα.

<u>Παράδειγμα 1ο</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=x^3-4x^2+x+6$ με $x\in[1,4]$



Εικόνα 1:. Γραφική Παράσταση

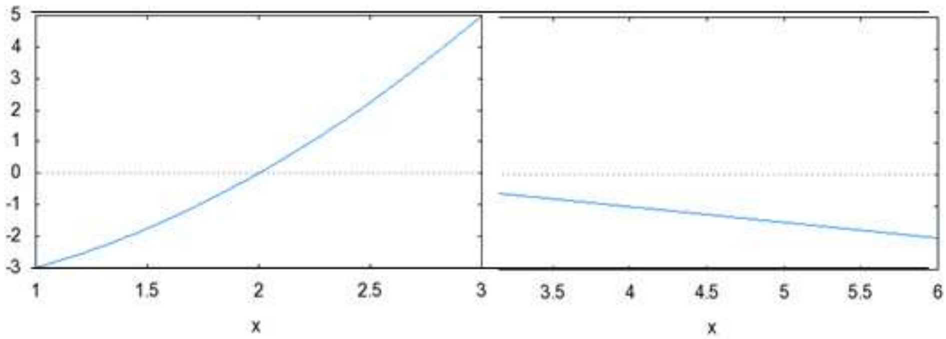
Η f είναι συνεχής ως πολυωνυμική στο [1,4].

$f(1)=1^3-4\cdot1^2+1+6=4 \qquad f(4)=4^3-4\cdot4^2+4+6=10$

Εδώ, ενώ οι τιμές f(1) και f(4) είναι ομόσημες, υπάρχουν δύο σημεία στο [1,4], τα 2 και 3, με f(2)=0 και f(3)=0

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} x^2\text{-}4 & 1\le x\le 3 \\ -\frac{1}{2}x+1 & 3<x\le 6 \end{cases}$.



Εικόνα 2: Γραφική Παράσταση

Λύση

Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=3$.

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\left(x^2-4\right)=5 \qquad \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(-\frac{1}{2}x+1\right)=-\frac{1}{2}$

Η f δεν είναι συνεχής στο $x_0=3$.

$\lim\limits_{x\to3^-} f(x)=\lim\limits_{x\to3^-}\left(x^2-4\right)=5 \quad \lim\limits_{x\to3^+} f(x)=\lim\limits_{x\to3^+}\left(-1/2x+1\right)=-\frac{1}{2} \qquad f(3)=5$

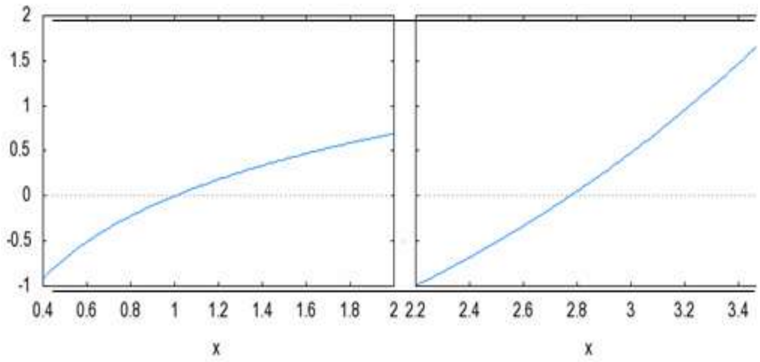
Δεν υπάρχει το $\lim\limits_{x\to3} f(x)$,οπότε η f δεν είναι συνεχής στο x=3.

$f(1)=1-4=-3$, $f(6)=-3+1=-2$.

Ενώ οι τιμές f(1) και f(6) είναι ομόσημες, όμως στο x=2 έχουμε f(2)=0.

Παράδειγμα 3ο

Έστω η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases} \ln x & 0{,}4 \le x \le 2 \\ e^x - 1 & 2<x \le 3{,}6 \end{cases}$



Εικόνα 3: Γραφική Παράσταση

Η f δεν είναι συνεχής στο $x=2$.

$\lim_{x\to 2^-} f(x) = \lim_{x\to 2^-}(\ln x) = \ln 2 \qquad \lim_{x\to 2^+} f(x) = \lim_{x\to 2^+}\left(e^x - 1\right) = e^2 - 1$

$f(2)=\ln 2$

Η προϋπόθεση $f(0,4)\cdot f(3,6)<0$ ισχύει διότι $f(0,4)=\ln 0,4<0$ και $f(3,6)=e^{3,4}-1>0$

Υπάρχει όμως σημείο, το x=1, για την οποία έχουμε f(1)=0

Μοντελοποίηση προβλημάτων σε συνδυασμό με το Θ. Bolzano

Παράδειγμα 1ο

Ένας ορειβάτης ξεκίνησε μια μέρα στις 8π.μ. από τους πρόποδες ενός βουνού και έφτασε στην κορυφή του στις 4μ.μ. Την άλλη μέρα ξεκίνησε στις 8π.μ. και ακολουθώντας την ίδια διαδρομή επέστρεψε μετά από 8 ώρες στο σημείο απ' όπου είχε ξεκινήσει. Να αποδείξετε ότι υπάρχει ένα τουλάχιστον σημείο της διαδρομής, στο οποίο ο ορειβάτης βρισκόταν την ίδια ώρα και τις δύο ημέρες (Στεργίου κ.α. 2000).

Λύση

Έστω f(t) και g(t) οι συναρτήσεις που εκφράζουν την απόσταση του ορειβάτη από το σημείο εκκίνησης Α την πρώτη και τη δεύτερη ημέρα αντίστοιχα, σε συνάρτηση με τον χρόνο t,όπου $t\in[8,16]$. Αν υποθέσουμε ότι το μήκος της διαδρομής είναι s,τότε θα έχουμε: f(8)=0 , f(16)=s , g(8)=s και g(16)=0.

Θεωρούμε τη συνάρτηση h(t)=f(t)-g(t), $t \in [8,16]$

Η h είναι συνεχής στο διάστημα [8,16] και

h(8)=f(8)-g(8)=0-s=-s , h(16)=f(16)-g(16)=s-0=s άρα $h(8) \cdot h(16) = -s^2 < 0$

Από το θ. Bolzano, υπάρχει $t_0 \in (8,16)$ τέτοιο ώστε

$h(t_0) = 0 \Leftrightarrow f(t_0) - g(t_0) = 0 \Leftrightarrow f(t_0) = g(t_0)$

Δηλαδή υπάρχει μια χρονική στιγμή t_0 κατά την οποία ο ορειβάτης βρίσκεται και τις δύο ημέρες στο ίδιο σημείο της διαδρομής.

<u>Παράδειγμα 2ο</u>

Ένα αυτοκίνητο που βρίσκεται στην αφετηρία Α μιας κυκλικής πίστας ξεκινάει από την ηρεμία και αφού διαγράψει μια ολόκληρη περιστροφή ηρεμεί ξανά στο σημείο Α. Να αποδείξετε ότι υπάρχουν δύο τουλάχιστον αντιδιαμετρικά σημεία της πίστας, στα οποία το αυτοκίνητο έχει την ίδια ταχύτητα (Στεργίου κ.α. 2000).

Λύση

Έστω f(θ) η συνάρτηση της στιγμιαίας ταχύτητας του αυτοκινήτου τη στιγμή που έχει διαγράψει τόξο θ, $\theta \in [0, 2\pi]$.Η f είναι συνεχής με f(0)=f(2π)=0.

Για να υπάρχουν δύο τουλάχιστον αντιδιαμετρικά σημεία της πίστας στα οποία το αυτοκίνητο θα έχει την ίδια ταχύτητα αρκεί να υπάρχει $\theta_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο, ώστε $f(\theta_0) = f(\pi + \theta_0)$. Θέτουμε g(θ)=f(θ)-f(π+θ), $\theta \in [0, \pi]$.

Η συνάρτηση g είναι συνεχής, g(0)=f(0)-f(π) και g(π)=f(π)-f(2π)=f(π)-f(0)

Άρα $g(0)g(\pi) = -[f(0) - f(\pi)]^2 \leq 0$

Αν $g(0)g(\pi) = 0 \Leftrightarrow g(0) = 0$ ή $g(\pi) = 0$ οπότε $\theta_0 = 0$ ή $\theta_0 = \pi$.

Αν $g(0)g(\pi) < 0$ τότε από το θ. Bolzano, υπάρχει $\theta_0 \in (0, \pi)$ τέτοιο ώστε $g(\theta_0) = 0$. Άρα σε κάθε περίπτωση ,υπάρχει $\theta_0 \in [0, \pi]$ τέτοιο ώστε $g(\theta_0) = 0$, δηλαδή $f(\theta_0) = f(\pi + \theta_0)$.

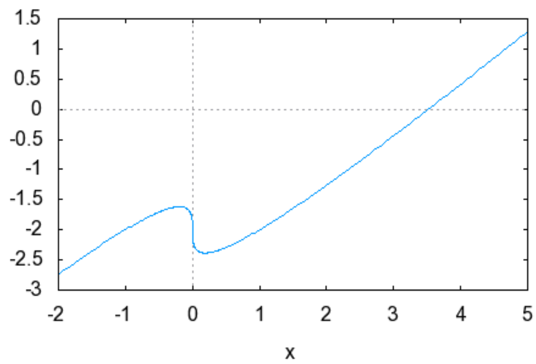
Θεώρημα Bolzano και Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον

Στη συνέχεια δίνεται στους μαθητές ένα φύλλο εργασίας με τις εκφωνήσεις των περισσότερων παραδειγμάτων και αντιπαραδειγμάτων στα οποία μπορεί να βρεθεί διάστημα στο οποίο υπάρχει λύση και ζητήθηκε να βρεθεί αλγόριθμος επίλυσης (Βακάλη κ.α. 2010) και να υλοποιηθεί στο Προγραμματιστικό Περιβάλλον «Διερμηνευτής της Γλώσσας». Δόθηκαν επίσης και οι γραφικές παραστάσεις των εξισώσεων ώστε να μπορούν πιο εύκολα οι μαθητές να εκτιμήσουν τα διαστήματα που υπάρχει λύση. Στη συγκεκριμένη όμως εργασία παρουσιάζεται μόνο ένα παράδειγμα από το φύλλο εργασίας και αφορά εξίσωση που δεν επεξεργάστηκε από τους μαθητές στην ώρα των Μαθηματικών. Πρωτύτερα όμως για την καλύτερη κατανόηση της έννοιας της προσέγγισης συζητήθηκε ο ορισμός του ορίου όπως ορίζεται στο σχολικό βιβλίο των Μαθηματικών Κατεύθυνσης Γ΄ Λυκείου, για να συσχετιστεί με το σφάλμα μηχανής. Ο αλγόριθμος που βρίσκει το σφάλμα μηχανής είναι ο ακόλουθος

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ α8
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: β
ΑΡΧΗ
 β <- 1
 ΟΣΟ 1 + β <> 1 ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
  β <- β / 2
 ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
 ΓΡΑΨΕ 'το σφάλμα της μηχανής είναι', β * 2
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ
```

<u>Άσκηση</u>

Έστω η συνάρτηση $f(x) = x - x^{\frac{1}{3}} - 2$ (Στεφανίδης κ.α. 1999).



Εικόνα 4: Γραφική Παράσταση

Όπως φαίνεται από τη γραφική της παράσταση υπάρχει ρίζα της f μεταξύ του 3 και του 4, διάστημα στο οποίο η συνάρτηση είναι συνεχής. Να γράψετε πρόγραμμα στη ΓΛΩΣΣΑ το οποίο θα εφαρμόζει το θεώρημα Bolzano ώστε να βρίσκουμε την καλύτερη δυνατή προσεγγιστικά τιμή του x για την οποία η συνάρτηση μηδενίζεται. Το πρόγραμμα ξεκινώντας από το αρχικό διάστημα, να το διαιρεί σε 10 μικρότερα και να βρίσκει ποιο από αυτά ικανοποιεί τη συνθήκη του θεωρήματος εμφανίζοντας το μήνυμα «υπάρχει λύση στο [α, β]» όπου α και β οι τιμές των άκρων του διαστήματος. Η παραπάνω διαδικασία να ακολουθείται μέχρι να βρεθεί η καλύτερη δυνατή προσεγγιστικά λύση. Για την εύρεση της λύσης επειδή για τιμές μικρότερες του σφάλματος μηχανής δεν είναι δυνατόν να υπάρξουν αριθμητικές πράξεις να ληφθούν υπόψη τα εξής:

- Να ελέγχεται το πρόσημο των f(α) και f(β) αν είναι διαφορετικό κάθε φορά και όχι αν το γινόμενο τους είναι αρνητικό.
- Να θεωρηθεί ως καλύτερη δυνατή προσεγγιστικά λύση η τιμή του x για την οποία ο διερμηνευτής θεωρεί τις τιμές των f(α) και f(β) πρακτικά ίσες.

Να τροποποιήσετε το πρόγραμμα σας, ελέγχοντας αν το γινόμενο των f(α) και f(β) είναι αρνητικό με βάση το θεώρημα Bolzano και όχι αν το πρόσημο τους είναι διαφορετικό. Τι παρατηρείτε και πως το εξηγείτε;

Μία ενδεικτική αλγοριθμική λύση της παραπάνω άσκησης που υλοποιήθηκε στο Διερμηνευτή της ΓΛΩΣΣΑΣ είναι η εξής

```
ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ α6
ΜΕΤΑΒΛΗΤΕΣ
 ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ: fa, fb, χ_αρ, χ_δ, δχ
 ΛΟΓΙΚΕΣ: βρέθηκε, πα, πβ
ΑΡΧΗ
 ΓΡΑΨΕ 'λύση της εξίσωσης f(χ) = χ - χ^(1/3) - 2 = 0'
 χ_αρ <- 3
 βρέθηκε <- ΨΕΥΔΗΣ
 δχ <- 0.1
 ΟΣΟ βρέθηκε = ΨΕΥΔΗΣ ΕΠΑΝΑΛΑΒΕ
  χ_δ <- χ_αρ + δχ
  fa <- χ_αρ - χ_αρ^(1/3) – 2
  fb <- χ_δ - χ_δ^(1/3) – 2
  πα <- fa > 0
  πβ <- fb > 0
  ΑΝ πα <> πβ ΤΟΤΕ
   ΓΡΑΨΕ 'υπάρχει λύση στο [', χ_αρ, ',', χ_δ, ']'
   δχ <- (χ_δ - χ_αρ) / 10
  ΑΛΛΙΩΣ_ΑΝ fa = fb ΤΟΤΕ
```

ΓΡΑΨΕ 'καλύτερη δυνατόν προσεγγιστική λύση η ', χ_δ
βρέθηκε <- **ΑΛΗΘΗΣ**
ΑΛΛΙΩΣ
χ_αρ <- χ_δ
ΤΕΛΟΣ_ΑΝ
ΤΕΛΟΣ_ΕΠΑΝΑΛΗΨΗΣ
ΤΕΛΟΣ_ΠΡΟΓΡΑΜΜΑΤΟΣ

Στην οθόνη εκτέλεσης εμφανίζονται τα εξής:

```
λύση της εξίσωσης f(χ) = χ - χ^(1/3) - 2 = 0
υπάρχει λύση στο [3.50000000000000000, 3.60000000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52000000000000000, 3.53000000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52100000000000000, 3.52200000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52130000000000000, 3.52140000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137000000000000, 3.52138000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137900000000000, 3.52138000000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970000000000, 3.52137980000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970000000000, 3.52137971000000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970600000000, 3.52137970700000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970680000000, 3.52137970690000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970680000000, 3.52137970681000000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970680400000, 3.52137970680500000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970680450000, 3.52137970680460000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970680456000, 3.52137970680457000]
υπάρχει λύση στο [3.52137970680457000, 3.52137970680457000]
καλύτερη δυνατόν προσεγγιστική λύση η 3.52137970680457000
```

Εικόνα 5: Οθόνη Εκτέλεσης

Μεταβλητή	Τιμή
[Συνθήκη]	
fa	-0.000000000000000222
fb	-0.000000000000000222
χ_αρ	3.521379706804570000
χ_δ	3.521379706804570000
δχ	0.000000000000000088
βρέθηκε	ΑΛΗΘΗΣ
πα	ΨΕΥΔΗΣ
πβ	ΨΕΥΔΗΣ

Εικόνα 6: Οθόνη Παρακολούθησης Μεταβλητών

Τέλος οι μαθητές στην οθόνη παρακολούθησης των μεταβλητών παρατηρούν ότι η καλύτερη προσεγγιστική λύση προκύπτει όταν οι τιμές γίνονται μικρότερες ή ίσες του σφάλματος μηχανής.

Μελλοντική Εργασία

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση θα υλοποιηθεί και την τρέχουσα σχολική χρονιά με τη συνεργασία του καθηγητή των μαθηματικών και της πληροφορικής. Είναι θετικό ότι η επεξεργασία του θεωρήματος Bolzano στο μάθημα των μαθηματικών συμπίπτει με την ολοκλήρωση της παρουσίασης των δομών επιλογής και επανάληψης στο μάθημα της Α.Ε.Π.Π. Επιπλέον, στόχος μας είναι η ένταξη συστημάτων υπολογιστικής άλγεβρας (Computer Algebra Systems, CAS) ώστε οι μαθητές/τριες να εργαστούν με δραστηριότητες προστιθέμενης αξίας.

Βιβλιογραφία

[1] Ανδρεαδάκης, Σ., Κατσαργύρης, Β., Μέτης, Σ., Μπρουχούτας, Κ., Παπασταυρίδης, Σ. & Πολύζος, Γ., (2010). Μαθηματικά Γ΄ Τάξης Γενικού Λυκείου, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

[2] Βακάλη, Α., Γιαννόπουλος, Η., Ιωαννίδης, Χ., Κοίλιας, Χ., Μάλαμας, Κ., Μανωλόπουλος, Ι. & Πολίτης, Π., (2010). Ανάπτυξη Εφαρμογών σε Προγραμματιστικό Περιβάλλον, Ο.Ε.Δ.Β., Αθήνα.

[3] Καλομητσίνης. Σ., (2001). Επιλογή Ασκήσεων από τη διεθνή βιβλιογραφία – Μαθηματικά Γ΄ Λυκείου Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, Αθήνα.

[4] Ντούγιας, Σ., (2003). Απειροστικός Λογισμός Ι, Εκδόσεις Leader Books, Αθήνα.

[5] Στεργίου, Χ., Νάκης, Χρ. & Στεργίου Ι., (2000). Προβλήματα Μαθηματικών Γ΄ Λυκείου, Εκδόσεις Σαββάλα, Αθήνα.

[6] Στεφανίδης, Γ. & Σαμαράς, Ν.,(1999). Υπολογιστικές Μέθοδοι με το MATLAB, Εκδόσεις Ζυγός, Θεσσαλονίκη.

[7] Ζαχαριάδης, Θ, Πάμφιλος, Π, Jones, K., Maleev, R., Χρίστου, Κ, Γιανακούλιας, Ε, Levy, R., κ.α. (2007). Διδασκαλία της Μαθηματικής Ανάλυσης με Χρήση Εργαλείων Δυναμικής Γεωμετρίας. (Θεοδόσιος Ζαχαριάδης, Ευστάθιος Γιαννακούλιας, Διονύσιος Διακουμόπουλος, Ειρήνη Μπιζά, & Αλκαίος Σουγιούλ., Eds.).