ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Το Σάββατο 12 Δεκεμβρίου 2015 η Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί σε συνεργασία με τους Σχολικούς Συμβούλους Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης κ. Ανδρέα Πούλο και Κιλκίς – Λαγκαδά – Ωραιοκάστρου κ. Ιωάννη Θωμαϊδη, διοργάνωσε εκδήλωση – συζήτηση με θέμα:

Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών: Επιλογή θεμάτων, επιδόσεις των μαθητών και επιπτώσεις στη διδασκαλία. Τα νέα δεδομένα των εξετάσεων.

Η αναγκαιότητα της εκδήλωσης προέκυψε ύστερα από τις τελευταίες ρυθμίσεις στη διεξαγωγή των πανελλαδικών εξετάσεων της Γ΄ Λυκείου και τις μεταβολές στην εξεταστέα ύλη Μαθηματικών, οι οποίες προκάλεσαν πολλά ερωτήματα και αιτήματα συναδέλφων της δημόσιας και ιδιωτικής εκπαίδευσης. Οι ομιλητές επιλέχθηκαν με κριτήριο την πολυετή εμπειρία τους από την αξιολόγηση των γραπτών στα Βαθμολογικά Κέντρα.

Το πρόγραμμα της εκδήλωσης

1. Γ. Θωμαΐδης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών, Γ. Σαράφης, Μαθηματικός Ελληνογαλλικής Σχολής Καλαμαρί & Δ. Μπαρούτης, Μαθηματικός 3ου Γ.Ε.Λ. Σταυρούπολης: *Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών: Επιλογή των θεμάτων, επιδόσεις των μαθητών και επιπτώσεις στη διδασκαλία*.

2. Γ. Θωμαΐδης, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών: *Η παραγώγιση της συνάρτησης-ολοκλήρωμα. In memoriam …*

3. Α. Πούλος, Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών**:** *Θέματα Πανελλαδικών Εξετάσεων στα Μαθηματικά που επιδέχονται πολλαπλές προσεγγίσεις. Προβλήματα ως προς τη βαθμολόγησή τους*.

Την εκδήλωση παρακολούθησε πολύ μεγάλος αριθμός συναδέλφων, οι οποίοι μετά το πέρας των ομιλιών υπέβαλαν πολλές ερωτήσεις και επακολούθησε συζήτηση. Στο παρόν τεύχος περιέχονται οι παρουσιάσεις των ομιλητών καθώς και ένα μέρος από τις ερωτήσεις που τέθηκαν και τις απαντήσεις που δόθηκαν κατά τη συζήτηση που ακολούθησε.

Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών: Επιλογή των θεμάτων, επιδόσεις των μαθητών και επιπτώσεις στη διδασκαλία

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Δημήτρης Μπαρούτης
Μαθηματικός 3ου ΓΕ.Λ. Σταυρούπολης

Γιάννης Σαράφης
Μαθηματικός Ελληνογαλλικής Σχολής Καλαμαρί

Σκοπός της εργασίας

Στην εργασία αυτή επιχειρούμε να εμπλουτίσουμε με νέα εμπειρικά δεδομένα τη συζήτηση που διεξάγεται εδώ και χρόνια για τις αρνητικές επιδράσεις των Πανελλαδικών Εξετάσεων στην επίτευξη των στόχων της διδασκαλίας των Μαθηματικών.

Τα δεδομένα αυτά σχετίζονται:

- Με το είδος των θεμάτων που επιλέγει η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων (Κ.Ε.Ε.).
- Με τις επιδόσεις των μαθητών που καταγράφονται στα Βαθμολογικά Κέντρα.

- **Με τις επιπτώσεις που έχει στη διδασκαλία των Μαθηματικών η εδραιωμένη αντίληψη ότι αποστολή του Λυκείου είναι να προπαρασκευάζει τους μαθητές για επιτυχία στις Πανελλαδικές Εξετάσεις.**

Οι έρευνες που έχουν δημοσιευθεί προβάλουν με έμφαση τα πολύ μεγάλα ποσοστά αποτυχίας (ιδιαίτερα στα Μαθηματικά Γενικής Παιδείας και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης).

Αυτό το γεγονός χρησιμοποιείται στη συνέχεια ως βασικό επιχείρημα για να διατυπωθούν ερωτήματα και να ασκηθεί κριτική στα θέματα που επιλέγει η Κ.Ε.Ε., στα διδακτικά βιβλία, στις επίσημες οδηγίες διδασκαλίας και γενικότερα στον τρόπο που διεξάγεται η διδασκαλία των Μαθηματικών.

Βασικά σημεία της κριτικής

- **Τα μεγάλα ποσοστά αποτυχίας στέλνουν αρνητικά μηνύματα για τη δυνατότητα της διδασκαλίας των Μαθηματικών να επιτύχει τους στόχους που περιγράφονται στα Προγράμματα Σπουδών και εξειδικεύονται στις Οδηγίες Διδασκαλίας.**
- **Δεν υπάρχει καμία στάθμιση του είδους και του βαθμού δυσκολίας των θεμάτων, έτσι ώστε να είναι δυνατή η πρόβλεψη των αποτελεσμάτων και η ουσιαστική συμβολή της διδασκαλίας στη βελτίωση, έστω και της χαμηλής επίδοσης.**

Η προσέγγιση που επιχειρούμε θα εστιάσει αντίθετα στα ποσοστά των αριστούχων και τη μεταβολή τους από έτος σε έτος

Τα ποσοστά των αριστούχων στις Πανελλαδικές Εξετάσεις την τελευταία 15ετία

Βαθμολογική περιοχή 18 – 20 στα Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης							
2001	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008
17,25%	10,12%	9,72%	17,70%	22,68%	10,91%	13,11%	9,37%
2009	2010	2011	2012	2013	2014	2015	
26,50%	24,23%	11,09%	9,79%	2,47%	15,12%	4,53%	

Ποια θα μπορούσε να ήταν η πρόβλεψη για το 2015;

Ετήσιες μεταπτώσεις του ποσοστού αριστούχων την τελευταία 15ετία

2001	2002	2003	2004	2005
	Μείωση 41%	Μείωση 4%	Αύξηση 82%	Αύξηση 28%
2006	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**
Μείωση 52%	Αύξηση 20%	Μείωση 29%	Αύξηση 183%	Μείωση 9%
2011	**2012**	**2013**	**2014**	**2015**
Μείωση 54%	Μείωση 12%	Μείωση 75%	Αύξηση 512%	Μείωση 70%

ΘΕΜΑ Δ: Τα δύο πρώτα ερωτήματα …

Έστω η παραγωγίσιμη συνάρτηση f: R→R για την οποία ισχύουν

- $f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2$ για κάθε $x \in R$ και
- $f(0) = 0$.

Δ1. Να αποδείξετε ότι $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right),\ x\in R$ [5]

Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f. [3]

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία y = x και τις ευθείες x = 0 και x = 1. [4]

και η διαφορά μας από τον υπόλοιπο κόσμο …

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]$$ [6]

Δ4. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση:

$$\frac{1-3\int_0^{x-2} f\left(t^2\right)dt}{x-3}+\frac{8-3\int_0^x f^2(t)dt}{x-2}=0$$

έχει μία τουλάχιστον ρίζα στο (2, 3). [7]

Τρεις εμφανίσεις της συνάρτησης – ολοκλήρωμα

Η πηγή των ερωτημάτων Δ3 και Δ4

6. Δίνεται η συνάρτηση

$$f(x)=\begin{cases}0 & , \quad x=0\\ (1-e^{-x})\ln x & , \quad x\in(0,1]\end{cases}$$

i) Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x\to 0}\frac{1-e^{-x}}{x} \quad \text{και} \quad \lim_{x\to 0} x\ln x$$

ii) Να αποδείξετε ότι η f είναι συνεχής στο 0.

Σχολικό βιβλίο σ. 286

5. Να αποδείξετε ότι οι εξισώσεις:

α) $\dfrac{x^4+1}{x-1}+\dfrac{x^6+1}{x-2}=0$ β) $\dfrac{e^x}{x-1}+\dfrac{\ln x}{x-2}=0$

έχουν μια, τουλάχιστον, ρίζα στο (1, 2).

Σχολικό βιβλίο σ. 200

Η επίσημη λύση της Κ.Ε.Ε. για το Δ1

$$f'(x)\left[e^{f(x)}+e^{-f(x)}\right]=2 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)'-\left(e^{-f(x)}\right)'=(2x)'$$

$$\Leftrightarrow e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x+c \overset{f(0)=0}{\Rightarrow} c=0$$

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x$$

$$e^{2f(x)}-2xe^{f(x)}-1=0 \Leftrightarrow \left(e^{f(x)}\right)^2-2xe^{f(x)}+x^2=1+x^2$$

$$\Leftrightarrow \left(e^{f(x)}-x\right)^2=1+x^2 \Leftrightarrow \left|e^{f(x)}-x\right|=\sqrt{1+x^2}$$

$$\overset{*}{\Leftrightarrow} e^{f(x)}=x+\sqrt{1+x^2} \Leftrightarrow f(x)=\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)$$

(*) $1+x^2>0$, για κάθε $x\in R$. Άρα $e^{f(x)}-x\neq 0$

και επειδή $\left(e^{f(x)}-x\right)$ συνεχής με $e^{f(0)}-0=1>0$

Μερικά στατιστικά στοιχεία για την επίδοση στο Δ1

Δείγμα 125 γραπτών Τεχνολογικής Κατεύθυνσης στο 52ο και 53ο Βαθμολογικό Κέντρο Θεσσαλονίκης

ΜΟΡΙΑ	0	1	2	3	4	5
ΑΡΙΘΜΟΣ ΓΡΑΠΤΩΝ	86	8	20	3	4	4

Δείγμα 50 γραπτών Θετικής Κατεύθυνσης στο 52ο Βαθμολογικό Κέντρο Θεσσαλονίκης

ΜΟΡΙΑ	0	1	2	3	4	5
ΑΡΙΘΜΟΣ ΓΡΑΠΤΩΝ	30	0	9	3	3	5

Βαθμολογητές: Δημήτριος Μπαρούτης και Ιωάννης Σαράφης

Η επίσημη λύση της Κ.Ε.Ε. για το Δ2

α) $f'(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+1}}>0\Rightarrow f\nearrow$

$$f''(x)=-\frac{x}{\left(x^2+1\right)^{3/2}}$$

$$f''(x)=0\Leftrightarrow x=0$$

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	∪ κυρτή	Σ.Κ.	∩ κοίλη

Η f έχει σημείο καμπής το (0, f(0))

β) $E=\int_0^1 (x-f(x))dx \overset{*}{=} \int_0^1 \left(x-\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right)dx =$

Διάσπαση και εισαγωγή παράγοντα για εφαρμογή παραγοντικής ολοκλήρωσης

(*) Η y = x είναι εφαπτομένη της f στο 0. Η f είναι κοίλη, άρα f(x) ≤ x για κάθε x > 0

$$\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^1-\left[x\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)\right]_0^1+\int_0^1 x\cdot\frac{1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}dx=$$

$$\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\int_0^1\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}dx=\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\left[\sqrt{x^2+1}\right]_0^1=$$

$$\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)+\sqrt{2}-1=\sqrt{2}-\frac{1}{2}-\ln\left(1+\sqrt{2}\right)$$

Η επίσημη λύση της Κ.Ε.Ε. για το Δ3

$$\lim_{x\to0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\cdot\lim_{x\to0^+}\left(\ln f(x)\cdot f(x)\right)\overset{(*)}{=}0$$

$(*)$ Για $x>0\overset{f\nearrow}{\Rightarrow}f(x)>f(0)=0$

- $\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{f(x)}\overset{\frac{0}{0}}{=}\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{f'(x)}=0$ — Εφαρμογή κανόνα de L' Hospital
- $\lim\limits_{x\to0^+}\left(\ln f(x)\cdot f(x)\right)=\lim\limits_{u\to0^+}\left(u\cdot\ln u\right)=0$ — Εφαρμογή ορίου σύνθετης συνάρτησης

Είναι πλήρεις αυτές οι αιτιολογήσεις; Το γενικότερο ζήτημα των αιτιολογήσεων στα γραπτά των πανελλαδικών εξετάσεων

Η επίσημη λύση της Κ.Ε.Ε. για το Δ4

$$h(x)=(x-2)\left(1-3\cdot\int_0^{x-2}f\left(t^2\right)dt\right)+(x-3)\left(8-3\cdot\int_0^{x}f^2(t)dt\right)$$

► Η f συνεχής στο [2, 3] ως πράξεις συνεχών

► • $h(2)=-8+3\cdot\int_0^{2}f^2(t)dt<0$

$$3\cdot\int_0^{x}f^2(t)dt<3\cdot\int_0^{x}t^2dt=x^3\overset{x=2}{\Rightarrow}8-3\cdot\int_0^{2}f^2(t)dt>0$$

Από Θ. Bolzano ∃ 1 τουλάχιστον ξ∈(2, 3): h(ξ) = 0

• $h(3)=1-3\cdot\int_0^{1}f(t^2)dt>0$

$$f(x)\le x\Rightarrow f\left(t^2\right)\le t^2\Rightarrow\int_0^{1}f\left(t^2\right)dt<\int_0^{1}t^2dt$$

$$\Leftrightarrow\int_0^{1}f\left(t^2\right)dt<\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^{1}\Leftrightarrow3\cdot\int_0^{1}f\left(t^2\right)dt<1$$

Είναι πλήρεις οι αιτιολογήσεις για το πρόσημο των h(2) και h(3);

Θέμα Γ: Τα δύο πρώτα ερωτήματα …

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\frac{e^x}{x^2+1}$, $x\in R$.

Γ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία και να αποδείξετε ότι το σύνολο τιμών της είναι το διάστημα (0, +∞).

Γ2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}$

έχει στο σύνολο των πραγματικών αριθμών μία ακριβώς ρίζα.

Πρόκειται για δύο κλασικά ερωτήματα εξετάσεων και παρόμοια έχουν διδαχθεί όλοι οι μαθητές

και η διαφορά μας από τον υπόλοιπο κόσμο …

Γ3. Να αποδείξετε ότι $\int_{2x}^{4x} f(t)dt < 2xf(4x)$ για κάθε $x > 0$.

Γ4. Δίνεται η συνάρτηση $g(x) = \begin{cases} \frac{1}{x}\int_{2x}^{4x} f(t)dt & , \quad x > 0 \\ 2 & , \quad x = 0 \end{cases}$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση g είναι γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$.

Άλλες δύο εμφανίσεις της συνάρτησης – ολοκλήρωμα

Γ1: Τι είδαμε στη μελέτη του προσήμου της παραγώγου

$$f'(x) = \frac{e^x\left(x^2+1\right) - 2xe^x}{\left(x^2+1\right)^2} = \frac{e^x(x-1)^2}{\left(x^2+1\right)^2}$$

1η περίπτωση:

$$f'(x) > 0 \Leftrightarrow e^x\left(x^2+1\right) - 2xe^x > 0$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 > 0$$
$$\Delta = 0, \quad x = 1$$

x	$-\infty$	1	$+\infty$
$f'(x)$	−	0	+
f(x)	↘		↗

2η περίπτωση:

Τυφλή εφαρμογή της «μεθοδολογίας»:
Για να μελετήσω το πρόσημο ορίζω βοηθητική συνάρτηση
Θέτω: $h(x) = e^x\left(x^2+1\right) - 2xe^x$

Η επίσημη λύση της Κ.Ε.Ε. για το Γ2

Είναι $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}\Leftrightarrow f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=f(2)\overset{\substack{f\uparrow\\ 1-1}}{\Leftrightarrow}$

$\Leftrightarrow e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)=2\Leftrightarrow\frac{e^3}{2}=\frac{e^x}{x^2+1}\Leftrightarrow f(x)=\frac{e^3}{2}\in f(A)$

Από Θ. Ενδιαμέσων τιμών θα υπάρχει $\xi\in R$: $f(\xi)=\frac{e^2}{2}$ και το ξ μοναδικό (f γνήσια μονότονη).

Μια απροσδόκητη λύση της εξίσωσης $f\left(e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)\right)=\frac{e^2}{5}$

Σε γραπτό που βαθμολογήθηκε με 98 μόρια:

Θέτει $h(x)=e^{3-x}\cdot\left(x^2+1\right)$ και η εξίσωση γίνεται $f\left(h(x)\right)=\frac{e^2}{5}$

Θέτει ξανά: $k(x)=f\left(h(x)\right)=\frac{e^{h(x)}}{h^2(x)+1}=\frac{e^{e^{3-x}\cdot(x+1)}}{\left[e^{3-x}\left(x^2+1\right)\right]^2+1}$

Βρίσκει με πλήρη μελέτη ότι αυτή η σύνθετη συνάρτηση είναι γνησίως φθίνουσα και έχει σύνολο τιμών το $(1, +\infty)$.

Επειδή $\frac{e^2}{5}\simeq 1,478\in(1,+\infty)$ η εξίσωση έχει ακριβώς μία λύση.

(έκταση λύσης 3 πυκνογραμμένες σελίδες !!!)

Η επίδραση των εξετάσεων στη διδασκαλία και στην εικόνα των Μαθηματικών

Η υπεύθυνη επιλογή θεμάτων προϋποθέτει ικανότητα πρόβλεψης

Έχουν τα μέλη της Κ.Ε.Ε. αυτήν την ικανότητα;

Τι γίνεται στις άλλες χώρες;

Τα λάθη των μαθητών και η διδασκαλία

$$\frac{1}{x+\sqrt{x^2+1}}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\right)=\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$x\cdot\frac{1+\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}}}{x+\sqrt{x^2+1}}=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$e^{f(x)}-e^{-f(x)}=2x \Leftrightarrow e^{f(x)}-\frac{1}{e^{f(x)}}=2x$$

Μια διδακτική πρόταση για τη σταδιακή εξοικείωση των μαθητών με τον αλγεβρικό λογισμό

Λογισμός τετραγωνικών ριζών στην Α΄ Λυκείου

- **Να αποδείξετε ότι:**

α) $\left(\sqrt{x^2+1}-x\right)\left(\sqrt{x^2+1}+x\right)=1$ **για κάθε** $x\in R$

β) $\sqrt{x^2+1}-x>0$ **για κάθε** $x\in R$

- **Να αποδείξετε ότι:**

α) $\dfrac{1}{\sqrt{\alpha+1}+\sqrt{\alpha}}=\sqrt{\alpha+1}-\sqrt{\alpha}$ **για κάθε** $\alpha>0$

β) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{4}+\sqrt{3}}=1$

Λογισμός τετραγωνικών ριζών στη Β΄ Λυκείου

• **Να λύσετε τις εξισώσεις:**

α) $\sqrt{5-x}+\dfrac{2}{\sqrt{5-x}}=\sqrt{x+5}$

β) $\dfrac{3x}{x-2}-2\sqrt{\dfrac{x-2}{3x}}=3$

• **Να αποδείξετε ότι οι παρακάτω συναρτήσεις είναι περιττές:**

α) $f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)$

β) $f(x)=\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ **(Άλγεβρα Β΄ Λυκείου, σ.185)**

Λογισμός τετραγωνικών ριζών στην Γ΄ Λυκείου

• **Να βρείτε το πεδίο ορισμού της συνάρτησης:**

α) $f(x)=\sqrt{\dfrac{e^x-1}{2-e^x}}$

β) $g(x)=\sqrt{\ln^2 x-\ln x}$

Η παραγώγιση της συνάρτησης – ολοκλήρωμα

In memoriam …

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών
Κιλκίς, Λαγκαδά & Ωραιοκάστρου

Εγκύκλιος 166741/Δ2/20-10-2015: Διαχείριση της διδακτέας-εξεταστέας ύλης Μαθηματικών της Γ΄ τάξης Ημερήσιων και της Δ΄ τάξης Εσπερινών ΓΕ.Λ.

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Ομάδας Προσανατολισμού Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Κεφάλαιο 3 **(Προτείνεται να διατεθούν 20 διδακτικές ώρες)**

Παρ. 3.5 **(Προτείνεται να διατεθούν 5 διδακτικές ώρες)**

Δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και γενικότερα της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$.

Υ.Α. 96080/Δ2/17-06-2015: Καθορισμός εξεταστέας-διδακτέας ύλης των πανελλαδικά εξεταζόμενων μαθημάτων της Γ΄ τάξης Ημερήσιων ΓΕ.Λ. (Φ.Ε.Κ. Β΄ 1186, 19-06-2015)

Μαθηματικά Ομάδας Προσανατολισμού Θετικών Σπουδών και Σπουδών Οικονομίας & Πληροφορικής

Κεφάλαιο 3 **Ολοκληρωτικός Λογισμός**

Παρ. 3.5 **Η συνάρτηση $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$**

Υπόδειξη – οδηγία: **Διατυπώνεται χωρίς να αποδειχτεί η πρόταση:**

«Αν f: Δ → R, όπου Δ διάστημα, είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε α ∈ Δ η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$$

είναι μια παράγουσα της f»,

και με τη βοήθεια αυτής αποδεικνύεται το Θεμελιώδες θεώρημα της Ανάλυσης.

Η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ γίνεται για να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα του Ολοκληρωτικού Λογισμού και να αναδειχθεί η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Για το λόγο αυτό <u>δεν θα διδαχθούν ασκήσεις</u> που αναφέρονται στην παραγώγιση της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt$ και γενικότερα της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$.

Υ.Α. 8622/Δ2/19-01-2015: Πρόγραμμα Σπουδών του μαθήματος «Μαθηματικά» της ομάδας προσανατολισμού των Θετικών Σπουδών της Γ΄ τάξης ΓΕ.Λ. (Φ.Ε.Κ. Β΄ 162, 22-01-2015)

Α΄ μέρος (Ανάλυση, σσ.2009 – 2130)

5. Ολοκληρωτικός Λογισμός (19 ώρες)

ΠΕΡΙΕΧΟΜΕΝΑ

3. Το θεμελιώδες θεώρημα του Απειροστικού λογισμού (4 ώρες)

ΣΤΟΧΟΙ

5.3.1. Γνωρίζουν τη σχέση παραγώγου και ολοκληρώματος

5.3.2. Υπολογίζουν ολοκληρώματα με τη βοήθεια του θεμελιώδους θεωρήματος της Ανάλυσης.

ΣΧΟΛΙΑ – ΔΡΑΣΤΗΡΙΟΤΗΤΕΣ

• Για την επίτευξη του στόχου 5.3.1. προτείνονται οι δραστηριότητες Δ24 και Δ25.

• Μετά από αυτές τις δραστηριότητες να διατυπωθεί, αλλά να μην αποδειχθεί, η ακόλουθη πρόταση:

«Αν f: Δ → R, όπου Δ διάστημα, είναι μια συνεχής συνάρτηση, τότε για κάθε α ∈ Δ η συνάρτηση

$$F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta$$

είναι μια παράγουσα της f στο Δ».

Στη συνέχεια, με τη βοήθεια της πρότασης αυτής να <u>αποδειχτεί</u> το Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης.

Τονίζεται εδώ ότι η εισαγωγή της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{x} f(t)dt,\ x\in\Delta$ **γίνεται για έναν και μόνο σκοπό:**

Να αποδειχθεί το Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης και να αναδειχθεί, έτσι, η σύνδεση του Διαφορικού με τον Ολοκληρωτικό Λογισμό.

Για το λόγο αυτό δεν θα διδαχθούν ασκήσεις που αναφέρονται στη

παραγώγιση της συνάρτησης $F(x)=\int_{\alpha}^{g(x)} f(t)dt$.

- Να αναφερθεί ότι, με βάση το Θεμελιώδες Θεώρημα της Ανάλυσης, προκύπτει ότι κάθε συνεχής συνάρτηση σε διάστημα Δ έχει παράγουσα στο διάστημα αυτό.
- Προτείνεται η δραστηριότητα Δ26.

Πώς θα ζήσουμε χωρίς συνδυαστικές ασκήσεις με τη συνάρτηση – ολοκλήρωμα;

Μια πρόταση επιβίωσης ….

Να μελετηθεί η συνάρτηση

$$f(x)=\int_{\int_{\ln x}^{x^2}\left(\sqrt{t}+3\right)dt}^{\int_{e^x}^{\sqrt{x^2-1}}\frac{\eta\mu t}{\sqrt{t}-1}dt}\frac{\ln^2 u}{u^2+6u-7}du$$

Κατασκευή: Θάνος Μάγκος

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=95&t=26288&p=129693

Ένα θέμα από τις εξετάσεις για την απόκτηση του Εθνικού Απολυτηρίου (Abitur) στη Γερμανία

ΠΗΓΗ:

Mathematische Reifeprüfungsaufgaben

1975 – 1980

Ernst Klett, Stuttgart 1983

Bearbeitet im Einvernehmen mit dem Kultursministerium von Baden-Württemberg

von K. Arzt & J. Stark

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\begin{cases}\dfrac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{αν } 0<x\le\pi^2\\ \alpha & \text{αν } x=0\end{cases}$

Δ1. Να βρείτε την τιμή του $\alpha\in R$, **ώστε η f να είναι συνεχής στο διάστημα** $\left[0,\ \pi^2\right]$

Δ2. i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x} f(t)dt,\ x\in\left(0,\ \pi^2\right]$ **είναι αντιστρέψιμη.**

ii) Να βρείτε το πεδίο ορισμού της αντίστροφης συνάρτησης.

Leistungskurs Analysis = Ανάλυση εξειδίκευσης

Δ1. $\lim\limits_{x\to0^+} f(x)=6\cdot\lim\limits_{x\to0^+}\dfrac{\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}=$

$6\cdot\lim\limits_{u\to0^+}\dfrac{\eta\mu u}{u}=6\cdot1=6$

$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \text{αν } 0<x\le\pi^2\\ 6 & \text{αν } x=0\end{cases}$

Δ2.

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}} & \alpha\nu\ \ 0<x\le\pi^2\\ 6 & \alpha\nu\ \ x=0\end{cases}\qquad F(x)=\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x} f(t)dt,\ x\in\left(0,\ \pi^2\right]$$

$$F(x)=6\cdot\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x}\frac{\eta\mu\sqrt{t}}{\sqrt{t}}dt=12\cdot\int_{\frac{\pi^2}{4}}^{x}\eta\mu\sqrt{t}\,\frac{1}{2\sqrt{t}}dt=$$

$$12\cdot\int_{\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{x}}\eta\mu u\,du=12\cdot\left[-\sigma\upsilon\nu u\right]_{\frac{\pi}{2}}^{\sqrt{x}}=-12\sigma\upsilon\nu\sqrt{x}$$

$$F'(x)=\frac{6\eta\mu\sqrt{x}}{\sqrt{x}}\ \ x\in\left(0,\ \pi^2\right]\Rightarrow$$

$$F'(x)\ge 0\ \ \text{στο}\ \left(0,\pi^2\right]\Rightarrow$$

$$F\nearrow\ \Rightarrow F\ 1-1$$

$$0<x\le\pi^2\Rightarrow$$

$$\lim_{x\to 0^+}F(x)<F(x)\le F\left(\pi^2\right)\Rightarrow$$

$$-12<F(x)\le 12$$

$$F^{-1}:(-12,\ 12]\to\left(0,\ \pi^2\right]$$

Ένα θέμα θεωρίας από τις εξετάσεις για την απόκτηση του Εθνικού Απολυτηρίου (Matura) στην Αυστρία

ΠΗΓΗ:

Mathematik an AHP

(Allgemeinbildende Höhere Schulen)

Rechtlinien und Beispiele für Themenpool und Prüfungsaufgaben

Bundesministerium für Unterricht, Kunst und Kultur,

Wien 2012

Die Ursprünge der Integralrechnung gehen zurück auf das Problem, wie man den Flächeninhalt einer Fläche berechnen kann, deren Begrenzungslinien krumm sind.

Dazu folgendes Beispiel:

a) Berechne den Flächeninhalt des Flächenstücks zwischen dem Graphen der Funktion f mit $f(x)=\frac{4}{x}$ und der x-Achse im Intervall [1;3] näherungsweise mittels Ober- und Untersumme (O, U).

Skizziere den Verlauf des Graphen und erkläre deine Zugangsweise.

Verwende zwei bzw. vier jeweils gleich breite Streifen und berechne in beiden Fällen den Mittelwert von O und U.

Welcher Mittelwert liegt näher beim exakten Wert?

Gib eine Begründung dafür an. *(Reproduktion, Reflexion)*

b) Erläutere, wie der Flächeninhalt, den ein Funktionsgraph f in einem Intervall [a;b] mit der x-Achse einschließt, näherungsweise berechnet werden kann.

Gehe auf die Definition des bestimmten Integrals ein und erkläre sie an dem von dir gewählten Beispiel. *(Transfer, Reflexion)*

c) Berechne den unter a) gesuchten Flächeninhalt exakt mittels bestimmten Integrals. Berechne weiters den prozentuellen Unterschied zu dem unter a) berechneten besseren Mittelwert.

Warum kann die Integrationsregel für Potenzen bei der in dieser Aufgabenstellung gegebenen Funktion nicht angewendet werden? *(Reproduktion, Reflexion)*

Οι αρχές του ολοκληρωτικού λογισμού ανάγονται στο πρόβλημα υπολογισμού του εμβαδού μιας επιφάνειας της οποίας οι συνοριακές γραμμές είναι καμπύλες. Να ένα παράδειγμα:

α) Να υπολογιστεί προσεγγιστικά, με χρήση άνω και κάτω αθροίσματος (O, U) το εμβαδόν του χωρίου ανάμεσα στο γράφημα της συνάρτησης f με $f(x)=\frac{4}{x}$ και τον x – άξονα στο διάστημα [1, 3]. Να σχεδιάσετε το γράφημα και να εξηγήσετε τον τρόπο εργασίας σας.

Να χρησιμοποιήσετε δύο – αντίστοιχα τέσσερα – ισομήκη υποδιαστήματα και να υπολογίσετε σε κάθε περίπτωση τη μέση τιμή των O και U.

Ποια μέση τιμή βρίσκεται πλησιέστερα της ακριβούς τιμής;

Να αιτιολογήσετε την απάντησή σας. ***Αναπαραγωγή, Στοχασμός***

β) Να εξηγήσετε πως μπορεί να υπολογιστεί προσεγγιστικά το εμβαδόν, που περικλείει το γράφημα μιας συνάρτησης στο διάστημα [α, β] με τον x – άξονα.

Να χρησιμοποιήσετε τον ορισμό του ορισμένου ολοκληρώματος και να τον εξηγήσετε με ένα δικό σας παράδειγμα.

Μεταφορά, Στοχασμός

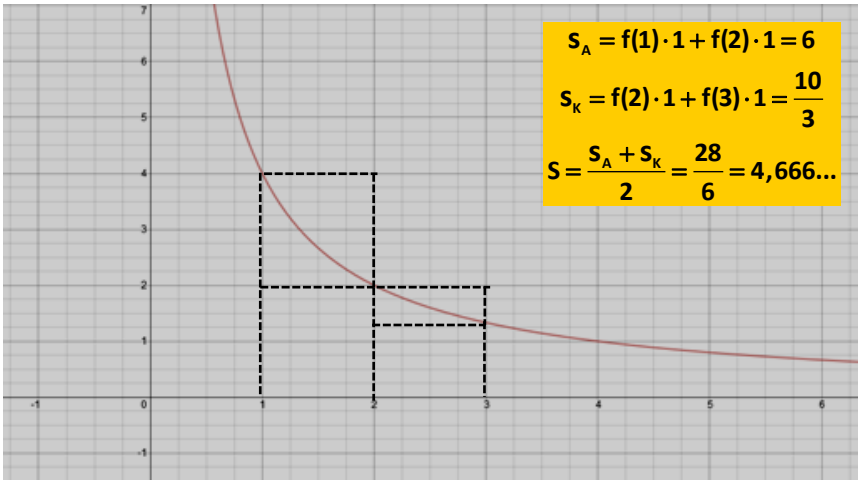
γ) Να υπολογίσετε ακριβώς το εμβαδόν που ζητείται στο α) με χρήση ορισμένου ολοκληρώματος.

Να υπολογίσετε επιπλέον την ποσοστιαία διαφορά με την καλύτερη μέση τιμή που υπολογίστηκε στο α).

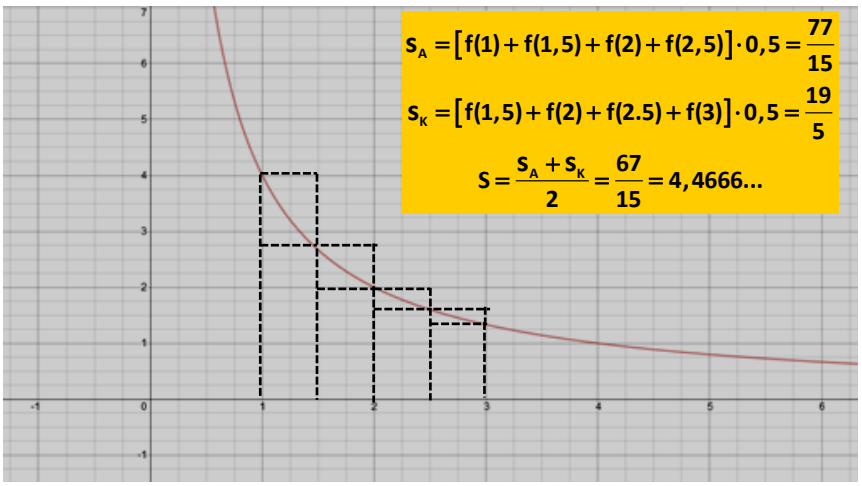
Γιατί δεν μπορεί να εφαρμοστεί στη συνάρτηση που δόθηκε σε αυτό το πρόβλημα ο κανόνας ολοκλήρωσης των δυνάμεων;

Αναπαραγωγή, Στοχασμός

Το εμβαδόν του χωρίου με δύο υποδιαστήματα



Το εμβαδόν του χωρίου με τέσσερα υποδιαστήματα



$$S_A = \left[f(1) + f(1,5) + f(2) + f(2,5)\right] \cdot 0,5 = \frac{77}{15}$$

$$S_K = \left[f(1,5) + f(2) + f(2.5) + f(3)\right] \cdot 0,5 = \frac{19}{5}$$

$$S = \frac{S_A + S_K}{2} = \frac{67}{15} = 4,4666...$$

Η σύγκριση των αποτελεσμάτων

$$E(\Omega) = S_2 = \frac{S_A + S_K}{2} = \frac{28}{6} = 4,666...$$

$$E(\Omega) = S_4 = \frac{S_A + S_K}{2} = \frac{67}{15} = 4,4666...$$

$$E(\Omega) = \int_1^3 \frac{4}{x} dx = 4\left[\ln x\right]_1^3 = 4\ln 3 = 4,39444915...$$

Δύο κριτικά ερωτήματα:

- Αξιολογείται ικανοποιητικά με αυτό το θέμα η κατανόηση της έννοιας «ορισμένο ολοκλήρωμα»;
- Είναι χρήσιμο αυτό το είδος κατανόησης για τις μαθηματικές σπουδές στην τριτοβάθμια εκπαίδευση;

Μια ερώτηση πολλαπλής επιλογής που δόθηκε σε πρωτοετείς φοιτητές (Η.Π.Α.)

Η τιμή του ολοκληρώματος

$$\int_{-3}^{3} |x+2| dx$$

είναι:

Α. 0	Β. 9	Γ. 12	Δ. 13	Ε. 14
[24%]	[22%]	[48%]	[5,4%]	[0,6%]

Th. Eisenberg & T. Dreyfus, On the Reluctance to Visualize in Mathematics. In: W. Zimmermann & S. Cunningham [eds.], *Visualization in the Teaching and Learning of Mathematics*, 25–37. Mathematical Association of America, 1991.

Τρία κριτικά ερωτήματα

- **Ποιες παρανοήσεις ή λάθη οδηγούν τους φοιτητές στην επιλογή των απαντήσεων Α, Β και Γ;**
- **Τι ερμηνεία μπορεί να δοθεί για την κατανομή των ποσοστών στις πέντε εναλλακτικές επιλογές απαντήσεων;**
- **Πώς εξηγείται ότι μόνο ένα ελάχιστο ποσοστό φοιτητών επιλέγει την «άσχετη» απάντηση Ε;**

Ερμηνεία της απάντησης Α (24%):

$$\int_{-3}^{3} |x+2| dx = 0$$

Οι φοιτητές «εφαρμόζουν» την ιδιότητα:
Αν f είναι μια ολοκληρώσιμη περιττή συνάρτηση, τότε ισχύει

$$\int_{-\alpha}^{\alpha} f(x) dx = 0$$

Ερμηνεία της απάντησης Β (22%):

$$\int_{-3}^{3} |x+2| dx = 9$$

Οι φοιτητές «εφαρμόζουν» τον ορισμό της απόλυτης τιμής:

$$\int_{-3}^{3} |x+2| dx = \int_{-3}^{0} (-x-2) dx + \int_{0}^{3} (x+2) dx =$$

$$\left[-\frac{x^2}{2} - 2x \right]_{-3}^{0} + \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{0}^{3} = \frac{9}{2} - 6 + \frac{9}{2} + 6 = 9$$

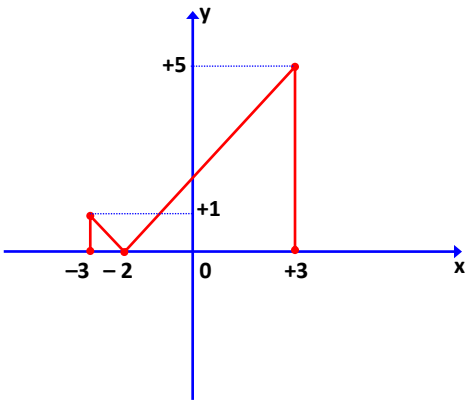
Ερμηνεία της απάντησης Γ (48%):

$$\int_{-3}^{3} |x+2| dx = 12$$

Οι φοιτητές καταργούν τελείως την απόλυτη τιμή:

$$\int_{-3}^{3} |x+2| dx = \int_{-3}^{3} (x+2) dx = \left[\frac{x^2}{2} + 2x \right]_{-3}^{3} = \frac{9}{2} + 6 - \frac{9}{2} + 6 = 12$$

Το ολοκλήρωμα $\int_{-3}^{3} |x+2| dx = 13$ **ως εμβαδόν**



(Δεν χρησιμοποιήθηκε από κανένα φοιτητή …)

Μερικά συμπεράσματα

- **Ελάχιστοι φοιτητές (όσοι επιλέγουν την απάντηση Ε) απαντούν στην τύχη. Η συντριπτική πλειοψηφία επιχειρεί να χρησιμοποιήσει κάποιες «γνώσεις» που έχει αποκτήσει από τη διδασκαλία των Μαθηματικών.**

- **Η μεγάλη πλειοψηφία των φοιτητών, ύστερα από ένα χρόνο διδασκαλίας της Ανάλυσης, γνωρίζει να υπολογίζει κάποια απλά ολοκληρώματα, αλλά έχει πολύ συγκεχυμένη ιδέα για την έννοια της απόλυτης τιμής.**

- **Οι εναλλακτικές απαντήσεις σε μια σοβαρή ερώτηση πολλαπλής επιλογής δεν είναι αυθαίρετες, αλλά επιλέγονται με πολύ προσεκτικό τρόπο, ώστε να αποκαλύπτουν τις λαθεμένες αντιλήψεις των μαθητών.**

Μια ενδιαφέρουσα συζήτηση για την εξέταση της θεωρίας στις πανελλαδικές εξετάσεις των Μαθηματικών διεξάγεται στον ιστότοπο mathematica.gr

http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?f=6&t=51860

Προβλήματα κατά τη διόρθωση θεμάτων που επιδέχονται πολλαπλές επιλύσεις

Ανδρέας Πούλος
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης

Τι αναφέρει η βιβλιογραφία;

Κατά τη διδασκαλία της επίλυσης προβλημάτων στην τάξη είναι χρήσιμο έως απαραίτητο να υποδεικνύουμε και να παρουσιάζουμε στους μαθητές διάφορους τρόπους επίλυσης, επειδή διαφορετικά άτομα χρησιμοποιούν διαφορετικούς τρόπους αναπαράστασης και επίλυσης των ίδιων προβλημάτων.

Ένας από τους πιο σημαντικούς παράγοντες της ευκολίας και της ταχύτητας με την οποία μπορεί να επιλυθεί ένα πρόβλημα είναι ο τρόπος με τον οποίο ο λύτης κατασκευάζει τη νοητή αναπαράσταση του προβλήματος.

Για πολλούς λύτες η νοητή αναπαράσταση ενός προβλήματος γίνεται μέσω **σχημάτων και εικόνων**, ενώ άλλοι λύτες διευκολύνονται με **λεκτικές, συμβολικές και αλγεβρικού τύπου** διαδικασίες.

Τα συμπεράσματα αυτά είναι γνωστά στους ψυχολόγους-ερευνητές εδώ και μισό αιώνα.

- Το έργο του Vadim Krutetskii (1917-1991)
- Πρώτη ρωσική έκδοση, 1968.
- Η Ψυχολογία των μαθηματικών ικανοτήτων των μαθητών.

Βασικά συμπεράσματα του Krutetskii

- **Οι βιολογικοί παράγοντες πρέπει να ληφθούν σοβαρά υπόψη. Οι ικανότητες αναπτύσσονται μόνο μέσω των δραστηριοτήτων. Το πρόβλημα των μαθηματικών ικανοτήτων είναι πρόβλημα ατομικών διαφορών. Κάθε άτομο σε έναν τομέα είναι περισσότερο ικανό και σε έναν άλλο τομέα λιγότερο. Οι άνθρωποι έχουν διαφορετικούς βαθμούς ικανότητας για τα ίδια πράγματα και τις ίδιες καταστάσεις. Οι ικανότητες αναπτύσσονται κατά τη διάρκεια της ζωής και της εργασίας.**

Πρέπει να ενισχύουμε τις αναπαραστάσεις και των δύο τύπων ώστε ο εκπαιδευόμενος λύτης να ανακαλύψει τις δυνατότητες που προσφέρει ο κάθε τρόπος, να τις προσαρμόσει στις γνώσεις του και στην ιδιαιτερότητα του αντίστοιχου προβλήματος.

Οι ψυχολόγοι έχουν επίσης έχουν μελετήσει τις διαφορετικές στρατηγικές για την επίλυση προβλημάτων. Αυτό σημαίνει ότι από τη μεριά της Ψυχολογίας, αλλά και των άλλων γνωσιακών επιστημών υπάρχει πλούσιο πληροφοριακό υλικό, το οποίο πρέπει να αξιοποιήσει η Διδακτική και Παιδαγωγική των Μαθηματικών για να ενισχύσει την άποψη ότι είναι απαραίτητη ή τουλάχιστον σε ορισμένες περιπτώσεις χρήσιμη η «πολλαπλή θεώρηση των μαθηματικών προβλημάτων», δηλαδή η ανάπτυξη πολλών και διαφορετικών στρατηγικών και τεχνικών για την επίλυση του ίδιου προβλήματος.

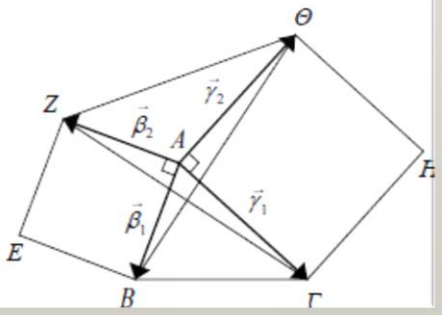
- **Είναι σημαντικό το δεδομένο ότι ο Alan Schoenfeld (1971) απέδειξε ότι όταν οι μαθητές διδαχθούν στρατηγικές επίλυσης προβλημάτων που είναι σχετικές το γνωστικό αντικείμενο του προβλήματος, τότε αυτοί παρουσιάζουν τεράστια βελτίωση σε σύγκριση με τους μαθητές που δεν τους παρέχεται τέτοιου είδους διδασκαλία.**

- Schoenfeld A. H. (1971): Explicit heuristic training as a variable solving performance, Journal for Research in Mathematics Education, 10, pp. 173-187.

Τι μπορεί όμως να συμβεί στην τάξη ή σε διαγωνισμούς;

Δείτε το επόμενο θέμα. Προέρχεται από το βιβλίο Κατεύθυνσης Β Λυκείου.

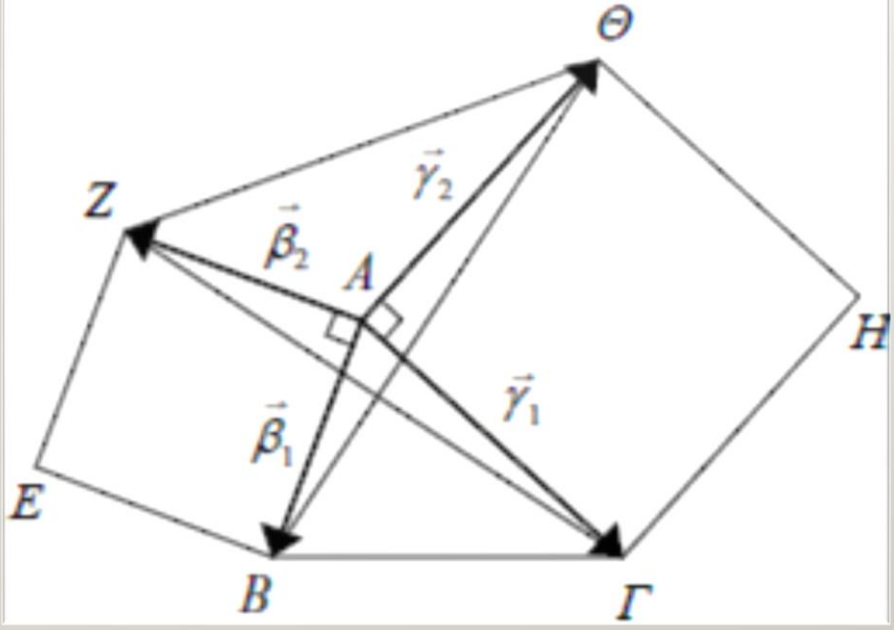
9. Δίνεται τρίγωνο $AB\Gamma$ και εξωτερικώς αυτού κατασκευάζουμε τα τετράγωνα $ABEZ$ και $A\Gamma H\Theta$. Να εκφράσετε τα διανύσματα $\vec{B\Theta}$ και $\vec{Z\Gamma}$ ως συνάρτηση των $\vec{\beta}_1, \vec{\beta}_2, \vec{\gamma}_1, \vec{\gamma}_2$ και να υπολογίσετε το εσωτερικό γινόμενο $\vec{B\Theta} \cdot \vec{Z\Gamma}$. Τι συμπεραίνετε για τα τμήματα $B\Theta$ και ΓZ;



Πιθανές συμπεριφορές

Ο λύτης:

- **Κάνει χρήση της ισότητας τριγώνων.**
- **Κάνει χρήση της ιδιότητας της στροφής σχημάτων κατά 90^{o}.**
- **Κάνει χρήση της Αναλυτικής Γεωμετρίας.**
- **Εκφράζει όλες τις γωνίες του σχήματος συναρτήσει των Β, Γ και ΑΒΘ.**



Πιθανές αντιδράσεις από τον «βαθμολογητή» προς τον λύτη

- **Βασίζεσαι σε περσινή ή προπέρσινη ύλη, άρα …**
- **Η στροφή δεν ανήκει στη διδακτέα ύλη.**
- **Δεν χρησιμοποίησες το δεδομένο για το πώς γράφουμε τα διανύσματα ΒΘ, ΓΖ.**
- **Απρόβλεπτη αντίδραση ……**
- **Απρόβλεπτη αντίδραση ……**

Ευτυχώς όμως στις εξετάσεις για την εισαγωγή στα Α.Ε.Ι. και Α.Τ.Ε.Ι. έχει ολοκληρωθεί ο κύκλος σπουδών και ο λύτης έχει δικαίωμα να αξιοποιήσει οποιοδήποτε μέρος της διδακτέας ύλης όλων των τάξεων. Εξάλλου, στην τελευταία σελίδα των θεμάτων αναφέρεται:

ΟΔΗΓΙΕΣ (για τους εξεταζομένους)

4. Κάθε απάντηση επιστημονικά τεκμηριωμένη είναι αποδεκτή.

Αποκλείεται όμως να συμβεί κάτι παρόμοιο και στις εισαγωγικές εξετάσεις;

- **Όχι, φυσικά.**
- **Αυτή η απάντηση προκύπτει από την εμπειρία στα βαθμολογικά κέντρα.**

Πότε μπορεί να συμβεί αυτό;

- **Συνήθως, όταν τα θέματα είναι έτσι κατασκευασμένα, ώστε να επιδέχονται επίλυση με πολλές και διαφορετικές τεχνικές.**
- **Όταν ο λύτης είναι ιδιαίτερα έμπειρος, π.χ. συμμετοχή σε μαθηματικούς διαγωνισμούς και δίνει λύσεις ιδιαίτερα ευφάνταστες και πρωτότυπες.**
- **Όταν ο λύτης σκεφτεί μια λύση πολύ απλή και ταυτόχρονα «άψογη», δηλαδή μας «προκαλεί» να της βρίσκουμε κάποιο κενό ή λάθος.**

- **Όταν ο λύτης γράψει μία λύση διαφορετική από αυτές που έχουν δοθεί ως ορθές στα Β.Κ. αλλά η λύση αυτή είναι κακογραμμένη, έχει κάποιες ασάφειες κλπ. Πιθανώς, ένα καλογραμμένο κείμενο που έχει και αυτό ασάφειες, αλλά με λύση «κοντά» στις «ενδεδειγμένες» να τύχει μεγαλύτερης βαθμολογίας από κάποιον διορθωτή.**

Παράδειγμα 1ο: Το θέμα Β3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ

ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 27 ΜΑΪΟΥ 2013

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς z για τους οποίους ισχύει:

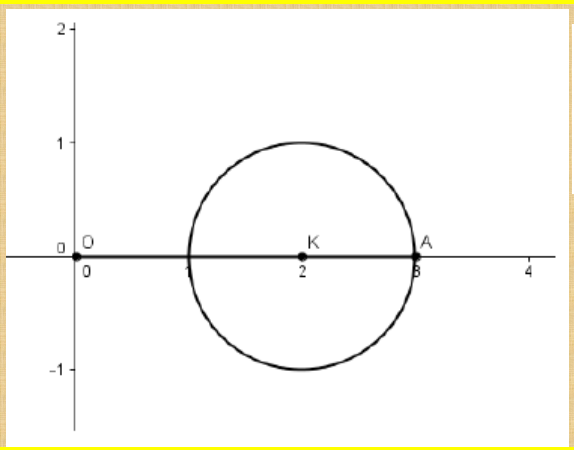
$$(z-2)(\overline{z}-2)+|z-2|=2$$

Β3. Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς α_0 , α_1 , α_2 οι οποίοι ανήκουν στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος **Β1**. Αν ο μιγαδικός αριθμός v ικανοποιεί τη σχέση:

$$v^3+\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0=0$$

τότε να αποδείξετε ότι: $|v|<4$

Μια εικόνα για τους αριθμούς του Β1.



$$|z-2|=1$$

Οι αποδείξεις που ακολουθούν έχουν αναρτηθεί και στο Φόρουμ www.mathematica.gr από το φυλλάδιο του οποίου για τις εξετάσεις 2013 τις έχω πάρει έτοιμες.

1η μορφή απόδειξης

Είναι $v^3=-\alpha_2 v^2-\alpha_1 v-\alpha_0$ επομένως:

$$|v|^3=|\alpha_2 v^2+\alpha_1 v+\alpha_0|\le|\alpha_2||v|^2+|\alpha_1||v|+|\alpha_0|\le 3|v|^2+3|v|+3$$

Αν υποθέσουμε ότι $|v|\ge 4$ τότε

$$|v|^3\ge 4|v|^2=3|v|^2+|v||v|\ge 3|v|^2+4|v|=3|v|^2+3|v|+|v|\ge 3|v|^2+3|v|+4\text{, άτοπο.}$$

2η μορφή απόδειξης (ασάφειες ηθελημένες)

Όμοια όπως στην πρώτη λύση καταλήγουμε στο ότι $|v|^3 \le |v|^2 + 3|v| + 3$.

Θεωρώ την $f(x) = x^3 - 3x^2 - 3x - 3$

οπότε

$$f'(x) = 3x^2 - 6x - 3 = 3(x^2 - 2x - 1)$$

$$f'(x) \ge 0 \Leftrightarrow x \ge 1 + \sqrt{2} \ , \ \text{ή} \ \ x \le 1 - \sqrt{2}$$

άρα για $x \ge 4$ είναι γνησίως αύξουσα με $f(4) = 1 > 0$

Όμως, αφού έχουμε ότι $f(|v|) \le 0$ θα είναι $|v| < 4$.

3η μορφή απόδειξης (ασάφειες ηθελημένες)

$|v|^3 \le 3(|v|^2 + |v| + 1)$

Αν $|v| \le 1$ τότε,

$$|v|^3 \le 9|v|^3 = 3|v|^3 + 3|v|^3 + 3|v|^3 \le 3|v|^2 + 3|v| + 3 = 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right)$$

οπότε η σχέση ισχύει .

Αν $|v| > 1$ τότε έχουμε :

$$|v|^3 \le 3\frac{|v|^3 - 1}{|v| - 1} \Rightarrow |v|^4 \le 4|v|^3 - 3 < 4|v|^3 \Rightarrow |v| < 4$$

4η μορφή απόδειξης

Είναι: $v^3+\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0=0\Rightarrow v^3=-\left(\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0\right)\Rightarrow$

$$\Rightarrow\left|v^3\right|=\left|-\left(\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0\right)\right|\Rightarrow|v|^3=\left|\alpha_2v^2+\alpha_1v+\alpha_0\right|\le|\alpha_2||v|^2+|\alpha_1||v|+|\alpha_0|\Rightarrow$$

$$\Rightarrow|v|^3\le3|v|^2+3|v|+3\Rightarrow|v|^3<3|v|^2+3|v|+4\Rightarrow|v|^3-3|v|^2-3|v|-4<0.$$

Η τελευταία ανίσωση γράφεται ισοδύναμα (π.χ. με σχήμα Horner για $\rho=4$)

$$\left(|v|-4\right)\left(|v|^2+|v|+1\right)<0,$$

κι αφού $|v|^2+|v|+1>0$ (ως τριώνυμο του $|v|$ με $\Delta=-3<0$) θα είναι $|v|<4$.

5η μορφή απόδειξης

$$1+\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3}=0\Rightarrow-1=\frac{\alpha_2}{v}+\frac{\alpha_1}{v^2}+\frac{\alpha_0}{v^3}\Rightarrow1\le\frac{|\alpha_2|}{|v|}+\frac{|\alpha_1|}{|v|^2}+\frac{|\alpha_0|}{|v|^3}\quad(1)$$

Αν τώρα $|v|\ge4$, από $(1)\Rightarrow1\le\frac{3}{4}+\frac{3}{16}+\frac{3}{64}=\frac{63}{64}$, άτοπο

6η μορφή απόδειξης

Όμοια όπως στην πρώτη λύση καταλήγουμε στο ότι $|v|^3 \le |v|^2 + 3|v| + 3$.

Άρα

$$|v|^3 \le 3|v|^2 + 3|v| + 3 \Leftrightarrow |v|^3 - 1 \le 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right) - 1$$

$$\Leftrightarrow \frac{|v|^3 - 1}{|v|^2 + |v| + 1} \le \frac{3\left(|v|^2 + |v| + 1\right)}{|v|^2 + |v| + 1} - \frac{1}{|v|^2 + |v| + 1}$$

$$\Leftrightarrow |v| - 1 \le 3 - \frac{1}{|v|^2 + |v| + 1} \Leftrightarrow |v| - 4 \le -\frac{1}{|v|^2 + |v| + 1}$$

Επειδή το δεξί μέλος της ανισότητας είναι αρνητικό, θα πρέπει να είναι αρνητικό και το αριστερό μέρος οπότε θα πρέπει $|v| < 4$.

7η μορφή απόδειξης

Αρχικά είναι $|v|^3 \le 3\left(|v|^2 + |v| + 1\right) \Rightarrow |v|^2\left(|v| - 3\right) \le 3\left(|v| + 1\right)$

Έστω ότι $|v| \ge 4$

Έτσι λοιπόν έχουμε: $\begin{cases} |v|^2 \ge 16 \\ |v|^2 \le \dfrac{3\left(|v| + 1\right)}{|v| - 3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |v|^2 \ge 16 \\ \dfrac{3\left(|v| + 1\right)}{|v| - 3} \ge 16 \Rightarrow |v| \le \dfrac{51}{13} \end{cases}$ άτοπο, λόγω της δεύτερης σχέσης.

8η μορφή απόδειξης

- **Οι λύσεις που δόθηκαν στη Μαθηματική Εβδομάδα, Μάρτιος του 2014**
- **(μετά από 10 μήνες).**

2ο Παράδειγμα

Διαφορετικές λύσεις σε ένα «υποθετικό» θέμα.

Να βρεθεί ο πραγματικός αριθμός k, όταν $z \in C$, $|z - 2| = |z - k|$ και $Re(z)=3$.

1η προσέγγιση

Θέτουμε $z = x + yi$, αφού $Re(z) = 3$ έχουμε $x = 3$, άρα $z = 3 + yi$. Ισχύουν οι ισοδυναμίες $|z - 2| = |z - k| \Leftrightarrow |3-2 + yi| = |3 - k + yi| \Leftrightarrow$

$\sqrt{1+y^2} = \sqrt{(3-k)^2+y^2} \Leftrightarrow 1 = (3-k)^2 \Leftrightarrow 3 - k = 1$ ή $3 - k = -1 \Leftrightarrow k = 2$ ή $k = 4$.

2η προσέγγιση

Λόγω της ιδιότητας $|z|^2 = z \cdot \bar{z}$ για κάθε $z \in C$ ισχύουν οι ισοδυναμίες:

$|z - 2| = |z - k| \Leftrightarrow |z - 2|^2 = |z - k|^2 \Leftrightarrow (z - 2)(\bar{z} - 2) = (z - k)(\bar{z} - k) \Leftrightarrow$

$z\bar{z} - 2z - 2\bar{z} + 4 = z\bar{z} - zk - \bar{z}k + k^2 \Leftrightarrow z(k - 2) + \bar{z}(k - 2) + (2-k)(2+k) = 0 \Leftrightarrow$

$z(k-2) + \bar{z}(k-2) - (k-2)(k+2) = 0 \Leftrightarrow (k-2)(z + \bar{z} - k - 2) = 0 \Leftrightarrow k = 2$ ή $z + \bar{z} - k - 2 = 0$, αλλά $z + \bar{z} = 2Re(z) = 6$, άρα $z + \bar{z} = 6$. Τελικά ισχύει $k = 2$ ή $k = 4$.

3η προσέγγιση

Η σχέση $|z - 2| = |z - k|$ γεωμετρικά εκφράζει τις εικόνες των μιγαδικών αριθμών z που είναι σημεία της μεσοκάθετης ευθείας στο τμήμα με άκρα A(2,0) B(k,0). Τα σημεία αυτά είναι σημεία του άξονα xx΄. Άρα η μεσοκάθετη ευθεία θα είναι κάθετη στον άξονα xx΄ και θα διέρχεται από το σημείο $(x_0, 0)$ με τετμημένη $x_0 = \frac{k+2}{2}$. Αφού $x_0 = 3$ προκύπτει ότι $k = 4$.

Στην περίπτωση που τα σημεία A και B συμπίπτουν θα έχουμε $k = 2$.
Τελικά, οι δυνατές του ζητούμενου αριθμού k είναι 4 ή 2.

Σχόλια

- **Στο θέμα αυτό και οι τρεις προσεγγίσεις είναι «προβλέψιμες», έχουν διδαχθεί στην τάξη και τις συναντάμε συχνά ως απαντήσεις στα διαγωνίσματα των μαθητών.**
- **Εικάζουμε ότι ο 1ο τρόπος είναι η μέθοδος των «αρχαρίων» ή μαθητών που θέλουν να βαδίζουν στα σίγουρα, ο 2ος τρόπος των «μυημένων» στις αλγεβρικές ιδιότητες και ο 3ος σχετίζεται με αυτούς που έχουν γεωμετρική διαίσθηση και εργάζονται με εικόνες. Αυτοί θα κάνουν σχεδόν πάντα και σχήμα.**

Παράδειγμα 3ο: Το θέμα Δ3

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
ΘΕΤΙΚΗΣ ΚΑΙ ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ
ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΔΕΥΤΕΡΑ 25 ΜΑΪΟΥ 2015

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]$$

Παρατήρηση: Αν τεθεί «ανεξάρτητα» αυτό το θέμα είναι χρονοβόρο και πολύ δύσκολο. Για το λόγο αυτό δόθηκαν τα λεγόμενα «βήματα»

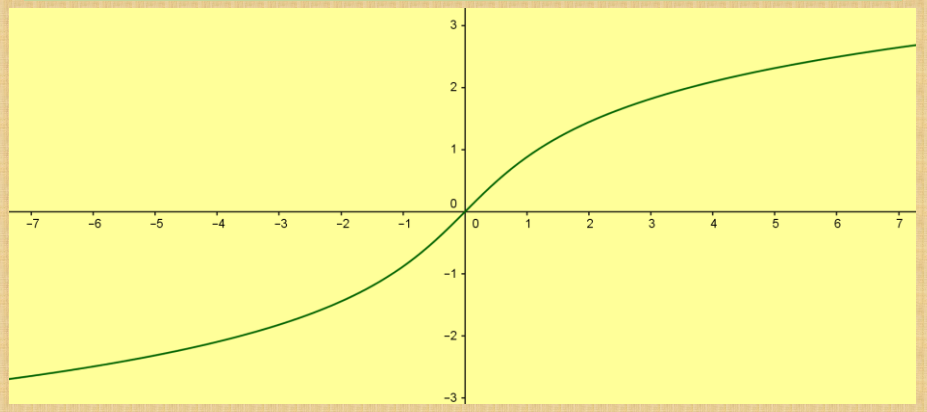
Δ2. α) Να βρείτε τα διαστήματα στα οποία η συνάρτηση f είναι κυρτή ή κοίλη και να προσδιορίσετε το σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της f.

β) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης f, την ευθεία $y=x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=1$.

$$f(x)=\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right).$$

Γραφική παράσταση της συνάρτησης f

(η οποία όμως δεν δίνεται και δεν ζητείται, αν και είναι ιδιαίτερα χρήσιμη)



Οι θεματοδότες υποθέτουν ότι οι λύτες από την προεργασία για να απαντήσουν στα ερωτήματα Δ1, Δ2 έχουν ανακαλύψει ότι:

f(x)> 0 για όλα τα x στο R, οπότε το ζητούμενο όριο απλοποιείται «ολίγον».

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right]$$

Θεωρούν ότι οι λύτες μπορούν να σκεφτούν το «τέχνασμα» της κατασκευής νέας συνάρτησης

$$F(x) = e^{\int_0^x f^2(t)dt}$$

- **Η παράγωγος αυτής της νέας συνάρτησης θα μας δώσει τα επιθυμητά αποτελέσματα.**

Δ3 Επειδή $f'(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2+1}} > 0$ άρα η f είναι αύξουσα και $x > 0$ ισχύει $f(x) > f(0) = 0$

Άρα $|f(x)| = f(x)$ για $x > 0$ και το όριο γίνεται:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\ln|f(x)|\right] = \lim_{x\to 0^+}\left[\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)}{x}x\ln(f(x))\right] = 0 \text{ διότι}$$

- $\lim\limits_{x\to 0^+}(x\ln f(x)) = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\ln f(x)}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{1}{x^2}} = -\lim\limits_{x\to 0^+}\frac{x^2}{\ln\left(x+\sqrt{x^2+1}\right)}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} =$

$$= \lim_{x\to 0^+}\frac{2x}{\frac{1}{\sqrt{x^2+1}}}\frac{1}{\sqrt{x^2+1}} = 0\cdot 1 = 0$$

- Αν $F(x) = e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ παραγωγίσιμη με $F'(x) = F(x)f^2(x)$ οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{x} = \lim_{x\to 0^+}\frac{F(x)-F(0)}{x} = F'(0) = 0$$

2ος τρόπος υπολογισμού

Με $f^2(t)$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ (δύναμη συνεχούς και $0\in\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η συνάρτηση $F(x)=\int_0^x f^2(t)dt$ είναι μια παράγουσα της f στο $\mathbb{R}$ άρα συνεχής και με $m(x)=e^x$ συνεχή στο $\mathbb{R}$ προκύπτει ότι η $(m\circ F)(x)=e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ είναι συνεχής στο $\mathbb{R}$ (άρα και στο μηδέν) οπότε

$$\lim_{x\to 0^+}\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)=e^{\int_0^0 f^2(t)dt}-1=e^0-1=1-1=0$$

και επειδή $f(x)>0$ για $x>0$ άρα

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\ln f(x)\right]\overset{(*)}{=}\lim_{u\to 0^+}\ln u=-\infty$$

(*) θέτουμε $u=f(x)$ οπότε $u_0=\lim_{x\to 0} f(x)=f(0)=0$ διότι η f είναι συνεχής.

Συνέχεια του 2ου τρόπου

Έτσι έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\ln|f(x)|\right]=\lim_{x\to 0^+}\left[\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}{\frac{1}{\ln f(x)}}\right]$$

Και με τις συναρτήσεις $e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1$, $\frac{1}{\ln f(x)}$ παραγωγίσιμες είναι

Συνέχεια του 2ου τρόπου

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{(\ln f(x))'}{\left(\frac{1}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}\right)'}\overset{\left(\frac{-\infty}{+\infty}\right)}{\underset{\text{DL'H}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}}=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot\left(\int_0^x f^2(t)dt\right)'}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{f'(x)}{f(x)}}{-\frac{e^{\int_0^x f^2(t)dt}\cdot f^2(x)}{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}}=\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\cdot\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\right]$$

Συνέχεια του 2ου τρόπου

Επειδή οι συναρτήσεις $f'(x)$, $e^{\int_0^x f^2(t)dt}$ είναι συνεχείς στο 0 άρα

$$\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\right)=-\frac{f'(0)}{e^{\int_0^0 f^2(t)dt}}=-\frac{1}{e^0}=-\frac{1}{1}=-1$$

και

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\overset{\left(\frac{0}{0}\right)}{\underset{\text{DL'H}}{=}}\lim_{x\to 0^+}\frac{\left[\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2\right]'}{\left(f^3(x)\right)'}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)'}{3f^2(x)\cdot f'(x)}=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot e^{\int_0^x f^2(t)dt}\,f^2(x)}{3f^2(x)\cdot f'(x)}$$

$$=\lim_{x\to 0^+}\frac{2\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)\cdot e^{\int_0^x f^2(t)dt}}{3\cdot f'(x)}=\frac{2\left(e^{\int_0^0 f^2(t)dt}-1\right)\cdot e^{\int_0^0 f^2(t)dt}}{3\cdot f'(0)}=\frac{2\cdot 0\cdot 1}{3\cdot 1}=0$$

Συνέχεια του 2ου τρόπου

Οπότε τελικά για το ζητούμενο όριο (από όρια και πράξεις) έχουμε:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(\ln f(x)\right)'}{\left(\dfrac{1}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1}\right)'}=\ldots=\lim_{x\to 0^+}\left[-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\cdot\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}\right]=\lim_{x\to 0^+}\left(-\frac{f'(x)}{e^{\int_0^x f^2(t)dt}}\right)\cdot\lim_{x\to 0^+}\frac{\left(e^{\int_0^x f^2(t)dt}-1\right)^2}{f^3(x)}=-1\cdot 0=0$$

Ποια είναι η βέλτιστη πρακτική για τη βαθμολόγηση γραπτών εξετάσεων;

- **Ο εξεταστής να έχει υπόψη του όσο γίνεται περισσότερους τρόπους επίλυσης του εξεταζόμενου θέματος.**
- **Αυτό προέρχεται μετά από το προσωπικό ενδιαφέρον για τα θέματα, μετά από ενημέρωση από τους επόπτες-συντονιστές του μαθήματος, μέσω συζητήσεων σε έγκυρα fora που ασχολούνται με τα Μαθηματικά, κλπ.**

- **Ο ίδιος να είναι θετικά διακείμενος στην πολλαπλή αντιμετώπιση και επίλυση προβλημάτων και ασκήσεων.**
Η μονόπλευρη θεώρηση δεν είναι χαρακτηριστικό αξιόλογου παιδαγωγού, αναπαράγει άτομα με περιορισμένη αντίληψη για την αντιμετώπιση και επίλυση των μαθηματικών προβλημάτων και όχι μόνον.

- **Είναι καθήκον των συντονιστών του μαθήματος στα Β.Κ. να δίνουν στις γραπτές οδηγίες προς τους βαθμολογητές όσο γίνεται περισσότερες λύσεις και τεχνικές αντιμετώπισης των θεμάτων, έγκυρες και ελεγμένες.**
- **Παράλληλα, να τονίζουν συνεχώς ότι αν οι βαθμολογητές συναντήσουν μια «ιδιάζουσα» λύση, όχι μόνο να μην διστάζουν να την συζητήσουν, αλλά κάτι τέτοιο επιβάλλεται. Διευρύνει την εμπειρία και την επαγγελματική μας κατάρτιση.**

- **Απαιτείται ιδιαίτερη προσοχή και ενδιαφέρον προς την «διαφορετική» λύση. Πρέπει να εκτιμηθεί σωστά η πρωτοτυπία, αλλά και η ορθή μαθηματική προσέγγιση του θέματος.**
- **Προφανώς, δεν πρέπει να πέσουμε στη λάθος παραδοχή, ότι είναι καινούργιο και πρωτότυπο, είναι και ορθό. Απαιτείται ρεαλιστική εκτίμηση και ψύχραιμη βαθμολόγηση.**

Παράδειγμα, «διαφορετικής» λύσης

(το πήρα από θέμα που έδωσε ο Αλέξανδρος Συγγελάκης στο σχολείο του)

Δίνεται η συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ με την ιδιότητα $f(x)+e^{f(x)}=x-1$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

B1. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι γνησίως αύξουσα. (Μονάδες 10)

B2. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει μοναδική λύση την $x=2$. (Μονάδες 13)

Για την επίλυση του θέματος Β2 οι περισσότεροι μαθητές έβαλαν όπου $f(x)$ το μηδέν και βρήκαν ότι $x = 2$ *«η οποία είναι και η μοναδική λύση της εξίσωσης επειδή η f είναι μονότονη»*. Το πρόβλημα με αυτή τη «λύση» είναι ότι το μόνο που έχει αποδειχθεί είναι ότι *«αν η συνάρτηση μηδενίζεται σε κάποιο σημείο τότε πρέπει $x = 2$»*. Δεν έχει αποδειχθεί όμως ότι πράγματι είναι λύση.

Ορθή λύση: Για $x = 2$ η αρχική γίνεται $f(2) + e^{f(2)}=1$ δηλαδή το $f(2)$ είναι η μοναδική λύση της εξίσωσης $x + e^x = 1$ και επειδή η συνάρτηση $g(x) = x + e^x - 1$ είναι γνησίως μονότονη με προφανή (άρα μοναδική) ρίζα το 2, άρα $f(2) = 0$.

Συμπεράσματα - Κλείσιμο

- **Η συζήτηση αυτή δεν κλείνει, δεν ολοκληρώνεται, διότι η διαδικασία των εξετάσεων οποιασδήποτε μορφής παράγει νέα ερωτήματα.**
- **Π.χ. τι γίνεται με τους μαθητές που εμφανίζουν στη λύση τους θεωρήματα (ορθά μεν) τα οποία όμως δεν υπάρχουν στο σχολικό βιβλίο;**
- **Πώς αντιμετωπίζουμε αυτές τις περιπτώσεις;**

- **Το ουσιώδες πρόβλημα στην περίπτωση των εισαγωγικών εξετάσεων στα Ελληνικά Α.Ε.Ι. είναι ότι δεν υπάρχει ενιαία γραμμή – ένας συντονισμός των Β.Κ. – από την (Κ.Ε.Ε.) την Αρχή που είναι υπεύθυνη για αυτές τις εξετάσεις ως προς τον τρόπο βαθμολόγησης των θεμάτων.**

- **Βέβαια το μεγαλύτερο πρόβλημα είναι τα ίδια τα θέματα των εισαγωγικών εξετάσεων.**
- **Αυτό το ζήτημα όμως είναι εκτός του πλαισίου της σημερινής ημερίδας.**
- **Αν θέλετε, υπάρχει και συνέχεια.**

Μερικές από τις ερωτήσεις που τέθηκαν και τις απαντήσεις που δόθηκαν κατά τη συζήτηση που ακολούθησε

Ερώτηση 1

Θα βοηθήσει η κατάργηση της συνάρτησης ολοκλήρωμα ;

Απάντηση

Θα βρεθεί «νέα». Ψάχνοντας πρωτότυπες ασκήσεις δυσκολεύουν τα θέματα των εξετάσεων.

Ερώτηση 2

Επεξηγήσεις χρειάζονται;

Απάντηση

Υπήρξαν χρονιές που οι επεξηγήσεις ζητούνταν επίσημα και βαθμολογούνταν με 2 μόρια. Πέρυσι αν κάποιος μαθητής έδινε αναλυτικά όλες τις επεξηγήσεις δεν προλάβαινε να απαντήσει σε όλα τα θέματα.

Ερώτηση 3

Χωρίς την παραγώγιση της συνάρτησης ολοκλήρωμα θα είναι πιο εύκολα τα θέματα;

Απάντηση

Όχι μάλλον θα είναι πιο δύσκολα.

Ερώτηση 4

Τα θέματα των εξετάσεων πρέπει να είναι κοντά στο βιβλίο;

Απάντηση

Έτσι θα είχαμε πολλούς αριστούχους οπότε η διαφορά μεταξύ των μαθητών θα κρινόταν σε λεπτομέρειες.

Ερώτηση 5

Γιατί η αιτιολόγηση των θεμάτων από την ΚΕΕ γίνεται μ’ αυτόν τον τρόπο;

Απάντηση

Δεν το γνωρίζουμε και πιστεύουμε ότι η αιτιολόγηση θα έπρεπε να είναι υποδειγματική από την ΚΕΕ.

Ερώτηση 6

Οι άριστοι μαθητές είναι άριστοι; Τι βαθμό κατανόησης έχουν**;**

Απάντηση

Οι άριστοι μαθητές είναι άριστοι στον τρόπο που εξετάζονται. Μάλλον δεν έχουν κατανοήσει βαθύτερα τις έννοιες. Προετοιμάζονται μόνο γι’ αυτά που χρειάζονται στις εξετάσεις.

Ερώτηση 7

Η ίδια παράλειψη τιμωρείται πολλές φορές (σε διαφορετικά) ερωτήματα-θέματα;

Απάντηση

Η ίδια παράλειψη τιμωρείται μια φορά και όχι συνεχώς.

Ερώτηση 8

Η μοριοδότηση των θεμάτων είναι ίδια σε όλα τα βαθμολογικά ;

Απάντηση

Τα βαθμολογικά συνεννοούνται μεταξύ τους για τη μοριοδότηση και έτσι υπάρχουν μικρές αποκλίσεις.

Ερώτηση 9

Ποιος θα αναλάβει την ευθύνη για τις αιτιολογήσεις;

Απάντηση

Την ευθύνη δεν μπορεί να την αναλάβει κάποιος. Οι καθηγητές πρέπει να καθοδηγούν τους μαθητές ώστε οι αιτιολογήσεις να γίνονται εκεί που πρέπει.