

ΜΙΑ ΔΙΑΘΕΜΑΤΙΚΗ ΔΙΔΑΚΤΙΚΗ ΠΡΟΣΕΓΓΙΣΗ ΤΗΣ ΕΝΝΟΙΑΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ ΚΑΙ ΙΔΙΟΤΗΤΩΝ ΤΗΣ ΜΕ ΧΡΗΣΗ ΦΥΛΛΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ ΚΑΙ ΣΥΝΕΡΓΑΤΙΚΗ ΜΑΘΗΣΗ

Γραμμένος Δ. Δελιγκάς

Μαθηματικός, MSc

Επιμορφωτής Β Επιπέδου στις Τ.Π.Ε

Καθηγητής της Ελληνογαλλικής Σχολής "Καλαμαρί" Θεσσαλονίκης

gdeligka@csd.auth.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Στην εργασία αυτή παρουσιάζεται μια διδακτική πρόταση που αφορά τη διδασκαλία των ιδιοτήτων των συναρτήσεων και συγκεκριμένα της μονοτονίας και των ακρότατων, στη Β' Λυκείου. Εισάγεται, με την αξιοποίηση ενός φύλλου εργασίας, ένα θέμα από τη Φυσική της Ατμόσφαιρας και συγκεκριμένα η κατακόρυφη διαίρεση της ατμόσφαιρας της Γης με βάση τη θερμοκρασία. Αρχικά, μέσα από τις ερωτήσεις, δίνεται η δυνατότητα στους μαθητές να θυμηθούν και να εμποδώσουν καλύτερα την έννοια της συνάρτησης. Στη συνέχεια, αφού παρουσιαστεί η έννοια της μονοτονίας και των ακρότατων συνάρτησης, οι μαθητές μελετούν τη συγκεκριμένη συνάρτηση ως προς τις ιδιότητες αυτές και επαναδιατυπώνουν τους αντίστοιχους ορισμούς. Οι μαθητές προβλέπεται να εργαστούν συνεργατικά σε ομάδες 3-4 ατόμων. Το συγκεκριμένο φύλλο εργασίας υλοποιήθηκε σε τμήματα της Β' Λυκείου, όπου οι μαθητές ανταποκρίθηκαν πολύ θετικά στη συνεργασία. Επίσης, βρήκαν πολύ ενδιαφέρον το θέμα και τη μέθοδο και κατανόησαν καλύτερα την έννοια της συνάρτησης, όπως οι ίδιοι δήλωσαν.

ΛΕΞΕΙΣ ΚΛΕΙΔΙΑ: Διαίρεσεις της ατμόσφαιρας, συνάρτηση, μονοτονία, ακρότατα

ΕΙΣΑΓΩΓΗ

Η έννοια της συνάρτησης διδάσκεται σε διάφορες τάξεις του Γυμνασίου και του Λυκείου και με διαφορετική εμβάθυνση. Στη Β' Λυκείου θεωρείται γνωστή η έννοια και εισάγονται κατευθείαν οι ιδιότητες της συνάρτησης, ξεκινώντας από τη μονοτονία και τα ακρότατα.

Όπως, όμως, προκύπτει από τη βιβλιογραφία, υπάρχει δυσκολία στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, από τους μαθητές. Ένας παράγοντας που επηρεάζει ιδιαίτερα τη μάθηση των συναρτήσεων, είναι οι πολλαπλές αναπαραστάσεις (πίνακας τιμών, γραφική παράσταση, τύπος) που σχετίζονται με την έννοια αυτή. Οι έρευνες δείχνουν ότι, την καλύτερη επίδοση στην κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης έχουν οι μαθητές που ακολουθούν τη γεωμετρική ή ολιστική προσέγγιση και όχι αυτοί που ακολουθούν την αλγεβρική. Σύμφωνα με την έρευνα των Μονογιού και Γαγάτη (2008), ένας μεγάλος αριθμός μαθητών εργάζεται μηχανικά, αλγεβρικά αγνοώντας το σχήμα που τους δίνεται. Επίσης, δυσκολία παρουσιάζεται και στην ερμηνεία των γραφικών παραστάσεων (Δαλιεράκη-Κολυβά, Γαγάτης και Γιασουμής, 2008).

Στη συγκεκριμένη διδακτική πρόταση δίνεται ιδιαίτερη έμφαση στη μελέτη της συνάρτησης με βάση τη γραφική της παράσταση.

ΘΕΩΡΗΤΙΚΟ ΠΛΑΙΣΙΟ

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση, δεν στηρίζεται στο παραδοσιακό πλαίσιο της διδασκαλίας και μάθησης – μετωπική διδασκαλία, ατομική μάθηση, αναπαραγωγή της γνώσης – αλλά στηρίζεται στις σύγχρονες θεωρίες μάθησης, που υποστηρίζονται από το εποικοδομητικό και το κοινωνικοπολιτιστικό μοντέλο. Σύμφωνα με τις θεωρίες αυτές, η ενεργός μάθηση αναπτύσσει ιδιαίτερες δεξιότητες στο μαθητή, με καλύτερη αφομοίωση της

γνώσης και μεγαλύτερη διάρκεια στη μνήμη. Ιδιαίτερα, η συνεργατική μάθηση δημιουργεί το κατάλληλο μαθησιακό και παιδαγωγικό περιβάλλον όπου ενθαρρύνεται η ενεργός συμμετοχή και η ατομική ευθύνη στην επιτυχία της εργασίας της ομάδας και εκτιμάται ότι εξασφαλίζει αποτελεσματικότερη σχολική επίδοση (Κόκκοτας, 2004).

Με τη διαθεματικότητα επίσης, επιτυγχάνονται πολλαπλοί στόχοι: ο μαθητής προσεγγίζει σφαιρικά και όχι κατακερματισμένα την πολύπλοκη στη φύση της πραγματικότητα, ενώ συσχετίζει τη σχολική γνώση με τα ενδιαφέροντα και τις εμπειρίες του από τον γύρω κόσμο. Ακόμη, η διαθεματικότητα τονίζει ότι η γνώση είναι υπό συνεχή διαπραγμάτευση και ότι η μάθηση συντελείται μέσα σε πλαίσιο συλλογικής επικοινωνίας και διαλεκτικής αντιπαράθεσης, αναδεικνύει τη διαδικαστική διάσταση της σχολικής γνώσης, αναπτύσσει στους μαθητές στάσεις και δεξιότητες που απαιτούν η δημιουργική ζωή και η επιτυχημένη άσκηση του επαγγέλματος και διευκολύνει την κοινωνική ένταξη κάθε κατηγορίας μαθητών, ασχέτως προέλευσης και ατομικών χαρακτηριστικών (Η. Μαρσαγγούρας, 2004).

Επί πλέον, η μάθηση με τη χρήση φύλλων εργασίας στοχεύει, εκτός από την ανάπτυξη κριτικής σκέψης και επιστημονικού τρόπου εργασίας, στην ανάπτυξη της δυνατότητας των μαθητών να εκφραστούν ελεύθερα και να αναπτύξουν στάσεις και δεξιότητες. Τέλος, βελτιώνει την επικοινωνία και τη συνεργασία των μαθητών, αναπτύσσοντας τη συνεργατική συμμετοχή τους (Norris, 1997).

Σύμφωνα με τον Κυνηγό (2006), στη διδακτική των μαθηματικών είναι έντονη η ανάγκη δημιουργίας μαθησιακών περιβαλλόντων όπου κυριαρχούν η δράση, ο διάλογος, το βίωμα, η έκφραση, η αναπαράσταση, ο πειραματισμός, η επιστημονική στάση απέναντι στη γνώση και η συμμετοχή σε πολλαπλές συλλογικότητες.

ΣΧΕΔΙΑΣΜΟΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Η βασική ιδέα πάνω στην οποία βασίστηκε η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση είναι η κατανόηση της έννοιας της συνάρτησης, η μελέτη της ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα και η ανακάλυψη – διατύπωση των ορισμών των ιδιοτήτων αυτών, από τους μαθητές. Για την επίτευξη αυτού του στόχου, επιλέχθηκε το γράφημα που μας δίνει την κατακόρυφη διαίρεση της ατμόσφαιρας της Γης με βάση τη θερμοκρασία, ώστε να κεντρίσει περισσότερο το ενδιαφέρον των μαθητών. Έτσι, κατασκευάστηκε ένα φύλλο εργασίας (βλ. Παράρτημα) με κατάλληλες πληροφορίες, οδηγίες και ερωτήσεις.

Οι μαθητές, προβλέπεται να εργάζονται συνεργατικά σε ομάδες 3 ή 4 ατόμων στο ίδιο φύλλο εργασίας, αν και σε κάποια περίπτωση ζητείται να εργαστούν και ατομικά. Κατά τη διάρκεια της δραστηριότητας, ο εκπαιδευτικός θα πρέπει να ελέγχει την πορεία των μαθητών, να ενθαρρύνει τη συνεργασία και το διάλογο μέσα στην ομάδα, να τους διευκολύνει στην επιχειρηματολογία και να προκαλεί συζητήσεις μέσα στην τάξη, όταν το κρίνει απαραίτητο.

Αυτή η διδακτική πρόταση αφορά μαθητές της Β' τάξης Γενικού Λυκείου και μπορεί να εφαρμοστεί στην αρχή του 2^{ου} κεφαλαίου της Άλγεβρας, με βάση το αναλυτικό πρόγραμμα και το σχολικό βιβλίο του Σ. Ανδρεαδάκη κ.α. έκδοσης 2012.

Προβλεπόμενος χρόνος υλοποίησης, 3 διδακτικές ώρες.

Για την αξιολόγηση των μαθητών κατά τη διαδικασία υλοποίησης του φύλλου εργασίας, ο εκπαιδευτικός μπορεί να στηριχθεί, τόσο στη δραστηριοποίηση, στη συμμετοχή, στο ενδιαφέρον και στη διάθεση συνεργασίας που θα επιδείξουν οι μαθητές, όσο και στο γνωστικό επίπεδο και τις ικανότητες που αναμένεται να αναδειχθούν μέσα από την ατομική προσπάθεια σε συγκεκριμένα ερωτήματα. Επίσης, η συνολική πορεία της ομάδας και η τεκμηρίωση των αποτελεσμάτων αντανακλάται και σε κάθε μέλος ξεχωριστά.

ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΤΟΥ ΦΥΛΛΟΥ ΕΡΓΑΣΙΑΣ & ΡΟΗ ΤΗΣ ΔΙΔΑΣΚΑΛΙΑΣ

Στο φύλλο εργασίας, παρουσιάζεται γραφικά η κατακόρυφη διαίρεση της ατμόσφαιρας με βάση τη θερμοκρασία μέχρι το ύψος των 100Km.

Στην 1^η φάση της εργασίας τους, οι μαθητές καλούνται να καταγράψουν σε έναν πίνακα τις ζώνες αυτές με τα αντίστοιχα διαστήματα του ύψους και της θερμοκρασίας. Στη συνέχεια, τους ζητείται να θυμηθούν τον ορισμό της συνάρτησης και να αποφανθούν αν το

συγκεκριμένο γράφημα της ατμόσφαιρας αντιστοιχεί σε συνάρτηση. Προφανώς, η σωστή διατύπωση και κατανόηση του ορισμού θα τους οδηγήσει σε αρνητική απάντηση.

Στη 2^η φάση, εναλλάσσονται οι θέσεις και οι ρόλοι των δυο μεταβλητών (της θερμοκρασίας και του ύψους) και πρέπει οι μαθητές να κατασκευάσουν το γράφημα σε καινούριους άξονες. Κατόπιν, καλούνται να αιτιολογήσουν αν η εναλλαγή αυτή δημιουργεί συνάρτηση. Στην περίπτωση βέβαια αυτή η απάντηση πρέπει να είναι θετική. Κατόπιν, καλούνται να προσδιορίσουν τις σχέσεις που δίνουν τη θερμοκρασία (θ) συναρτήσει του ύψους (h) σε κάθε ζώνη της ατμόσφαιρας, το οποίο θα επιτύχουν με χρήση της εξίσωσης ευθείας, αφού το γράφημα αποτελείται από ευθύγραμμα τμήματα. Στη στρατόσφαιρα και σε ύψος 25km βρίσκεται η ζώνη του όζοντος, για την οποία πρέπει να βρουν τη θερμοκρασία αξιοποιώντας τον αντίστοιχο τύπο.

Στην 3^η φάση, δίνονται οι έννοιες της μονοτονίας και των ακρότατων και ζητείται από τους μαθητές να μελετήσουν τη συνάρτηση ως προς τις ιδιότητες αυτές. Στο σημείο αυτό τονίζεται στο φύλλο εργασίας ότι το δεύτερο γράφημα αποτελεί συνάρτηση, ώστε αν κάποια ομάδα έκανε λάθος να επιστρέψει να το διορθώσει. Στην τελική αυτή φάση, οι μαθητές με τη συμπλήρωση κατάλληλων κενών θα οδηγηθούν στην επανακατασκευή των ορισμών της μονοτονίας και των ακρότατων. Επίσης, καλούνται να επιβεβαιώσουν τα συμπεράσματά τους για τη μονοτονία και αλγεβρικά, κάνοντας χρήση του ορισμού.

ΠΡΟΕΚΤΑΣΕΙΣ

Η συγκεκριμένη διδακτική πρόταση μπορεί να εξελιχτεί σε ένα εκπαιδευτικό σενάριο, με την αξιοποίηση κατάλληλου εκπαιδευτικού λογισμικού για τη μελέτη της συνάρτησης. Επίσης, μπορεί να εμπλουτιστεί με κάποιο video σχετικού με τα στρώματα της γήινης ατμόσφαιρας ή να ζητηθεί από τους μαθητές να αναζητήσουν και να παρουσιάσουν πληροφορίες για τα χαρακτηριστικά των στρωμάτων αυτών.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΚΕΣ ΑΝΑΦΟΡΕΣ

1. Δαλιεράκη-Καλυβά Ε., Γαγάτσης Α. και Γιασουμής Ν., «Σχόλια για ένα σχέδιο μαθήματος στην παραβολή με βάση αποτελέσματα ερευνών της διδακτικής των μαθηματικών», 10ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής παιδείας και Επιστήμης, 1-3 Φεβρουαρίου 2008, Πάφος
2. Κόκκοτας Π., (2004), «Διδακτική των Φυσικών Επιστημών», Εκδόσεις Π. Κόκκοτα, Αθήνα
3. Ματσαγγούρας, Η. (2004), «Ομαδοσυνεργατική Διδασκαλία και Μάθηση», (3η εκ.), Αθήνα: Γρηγόρης
4. Μονογιού, Γ. (2008). Χρήση και ευέλικτος χειρισμός πολλαπλών αναπαραστάσεων συναρτήσεων και η επίλυση προβλήματος. Στο 10ο Παγκύπριο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας και Επιστήμης, 1-3 Φεβρουαρίου 2008. Πάφος, Κύπρος.
5. Χρόνης Κυνηγός (2006), «Το μάθημα της Διερεύνησης», Παιδαγωγική αξιοποίηση των Ψηφιακών Τεχνολογιών για τη διδακτική των μαθηματικών, Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα, 2006

ΠΑΡΑΡΤΗΜΑ

ΦΥΛΛΟ ΕΡΓΑΣΙΑΣ

ΕΝΝΟΙΑ ΚΑΙ ΒΑΣΙΚΕΣ ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ

Εφαρμογή: Κατακόρυφη διαίρεση της ατμόσφαιρας της Γης με βάση τη θερμοκρασία

Τμήμα:

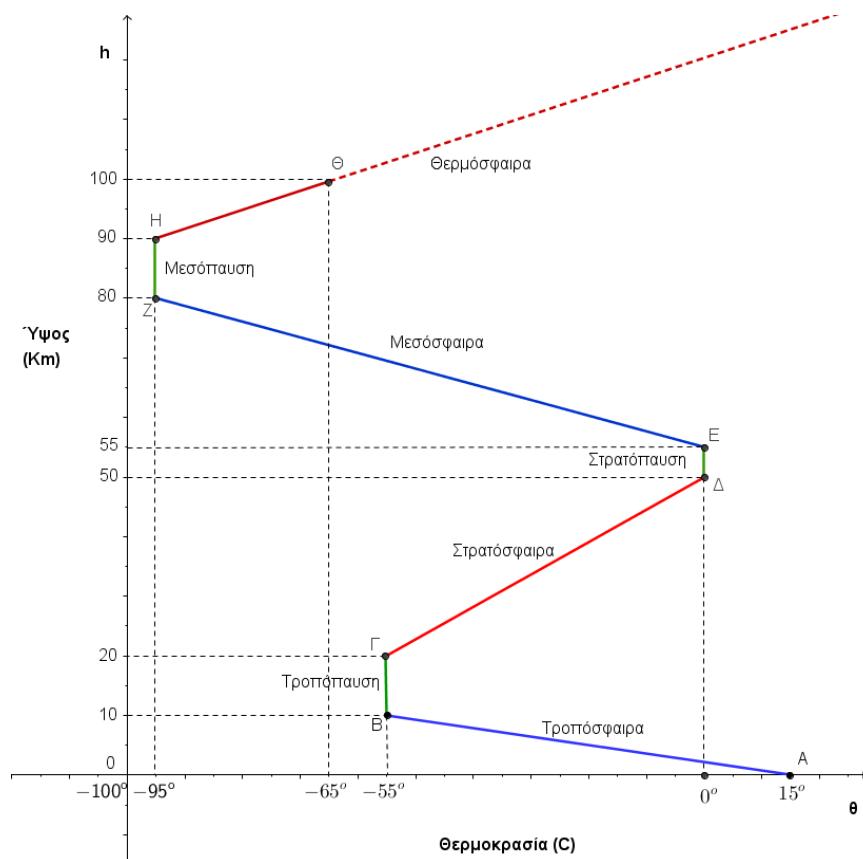
Ημερομηνία:

Όνοματεπώνυμο μαθητών (ομάδας):

.....
.....
.....
.....

Οι ζώνες της ατμόσφαιρας

Με βάση τη μεταβολή της θερμοκρασίας με το ύψος μπορούμε να διακρίνουμε στην ατμόσφαιρα της Γης τέσσερις χαρακτηριστικές περιοχές: **την τροπόσφαιρα, τη στρατόσφαιρα, τη μεσόσφαιρα και τη θερμόσφαιρα**. Οι επιφάνειες διαχωρισμού των περιοχών αυτών, που στην πραγματικότητα είναι ζώνες αρκετού πάχους, είναι: **η τροπόπαυση, η στρατόπαυση και η μεσόπαυση** (Εικ. 1).



Εικόνα 1. Φυσική διαίρεση της ατμόσφαιρας μέχρι το ύψος των 100Km

ΦΑΣΗ 1^η Μελέτη του γραφήματος της Εικ. 1

I. Με βάση την Εικόνα 1 συμπληρώστε τον πίνακα

ΖΩΝΕΣ ΑΤΜΟΣΦΑΙΡΑΣ	ΥΨΟΣ (Km)	ΘΕΡΜΟΚΡΑΣΙΑ (°C)
Τροπόσφαιρα	[0,10]	[-55,15]
Τροπόπαυση		
	[90,100]	

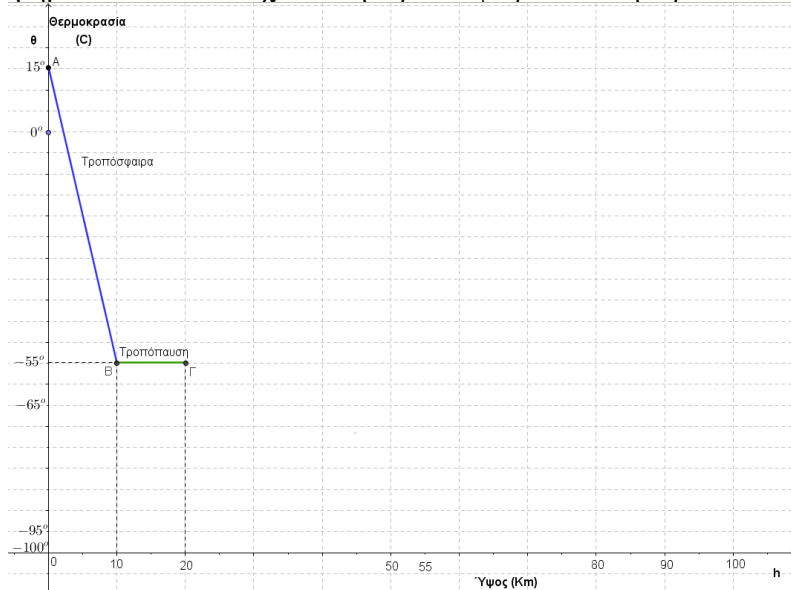
II. Αν ονομάσουμε $Y=[0, 100]$ το διάστημα μεταβολής του ύψους (h) τότε το διάστημα C μεταβολής της θερμοκρασίας (θ) είναι

III. Προσπαθήστε να θυμηθείτε και να γράψετε τον ορισμό της συνάρτησης.

IV. Το γράφημα της Εικόνας 1 αντιστοιχεί σε συνάρτηση με πεδίο ορισμού το C και πεδίο τιμών το Y; Αιτιολογήστε την απάντησή σας.

ΦΑΣΗ 2^η Μελέτη της θερμοκρασίας συναρτήσει του ύψους

Στους παρακάτω άξονες (Εικ.2) έγινε αντιστροφή του θ με το h δηλ. το θ τοποθετήθηκε στον κατακόρυφο άξονα και το h στον οριζόντιο. Επίσης, έχουν κατασκευαστεί και τα ευθύγραμμα τμήματα που αντιστοιχούν στην τροπόσφαιρα και στην τροπόπαυση.



Εικόνα 2. Μεταβολή της θερμοκρασίας συναρτήσει του ύψους

IV. Όπως είναι γνωστό στο ύψος των 25Km της ατμόσφαιρας εμφανίζεται η μεγαλύτερη συγκέντρωση όζοντος. Μπορείτε να υπολογίσετε τη θερμοκρασία του στρώματος αυτού;

ΦΑΣΗ 3η Μελέτη της συνάρτησης ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα – Κατασκευή Ορισμών

A) Μονοτονία

Ισχύουν τα εξής:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα διάστημα Δ . Τότε:

- Αν η αύξηση των τιμών στο Δ προκαλεί και αύξηση των τιμών της συνάρτησης, λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **γνησίως αύξουσα** στο διάστημα Δ .
- Αν η αύξηση των τιμών στο Δ προκαλεί ελάττωση των τιμών της συνάρτησης, λέμε ότι η συνάρτηση f είναι **γνησίως φθίνουσα** στο διάστημα Δ .
- Μια συνάρτηση που είτε είναι γνησίως αύξουσα είτε γνησίως φθίνουσα σε ένα διάστημα Δ λέγεται **γνησίως μονότονη** στο Δ .

I. Γράψτε τα διαστήματα στα οποία θεωρείτε ότι η συνάρτηση της θερμοκρασίας ως προς το ύψος (πεδίο ορισμού το Y) είναι γνησίως αύξουσα και εκείνα στα οποία θεωρείτε ότι είναι γνησίως φθίνουσα.

II. Η αύξηση του ύψους δεν μεταβάλλει (διατηρεί σταθερή) τη θερμοκρασία στα διαστήματα:

III. Επιλέξτε το σωστό από τις *παρενθέσεις*, ώστε να ολοκληρωθούν οι ορισμοί.

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως αύξουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) \dots f(x_2) \quad (<, =, >)$$

Η γραφική της παράσταση (ανεβαίνει, κατεβαίνει) από αριστερά προς τα δεξιά.

Μια συνάρτηση f λέγεται **γνησίως φθίνουσα** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ με $x_1 < x_2$ ισχύει

$$f(x_1) \dots f(x_2) \quad (<, =, >)$$

Η γραφική της παράσταση (ανεβαίνει, κατεβαίνει) από αριστερά προς τα δεξιά.

Μια συνάρτηση f λέγεται **σταθερή** σε ένα διάστημα Δ του πεδίου ορισμού της, όταν για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \Delta$ ισχύει

$$f(x_1) \dots f(x_2) \quad (<, =, >)$$

Η γραφική της παράσταση είναι ευθύγραμμο τμήμα (παράλληλο, κάθετο) στον άξονα του πεδίου ορισμού.

IV. Στα διαστήματα που βρήκατε ότι η συνάρτηση είναι γνησίως μονότονη, επιβεβαιώστε τα συμπεράσματά σας και αλγεβρικά χρησιμοποιώντας τον ορισμό.

B) Ακρότατα

Ισχύουν τα εξής:

Έστω μια συνάρτηση f ορισμένη σ' ένα σύνολο A . Τότε:

- Αν υπάρχει σημείο του A στο οποίο η f παίρνει την ελάχιστη τιμή της, το σημείο αυτό λέμε ότι είναι θέση ελαχίστου και η τιμή του μέσω της f λέγεται **ολικό ελάχιστο** ή απλά **ελάχιστο**.
- Αν υπάρχει σημείο του A στο οποίο η f παίρνει τη μέγιστη τιμή της, το σημείο αυτό λέμε ότι είναι θέση μεγίστου και η τιμή του μέσω της f λέγεται **ολικό μέγιστο** ή απλά **μέγιστο**.

I. Εξετάστε αν η συνάρτηση της θερμοκρασίας ως προς το ύψος έχει ελάχιστο ή μέγιστο και συμπληρώστε τα παρακάτω κενά.

α. Η ελάχιστη τιμή της θερμοκρασίας στα πρώτα 100Km της ατμόσφαιρας της Γης είναι $^{\circ}$ C και παρατηρείται σε ύψος

β. Η μέγιστη τιμή της θερμοκρασίας στα πρώτα 100Km της ατμόσφαιρας της Γης είναι $^{\circ}$ C και παρατηρείται σε ύψος

II. Επιλέξτε το σωστό από τις *παρενθέσεις*, ώστε να ολοκληρωθούν οι ορισμοί.

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **ελάχιστο** όταν: $f(x) \dots (\geq, \leq) f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

Το $(x_0, f(x_0))$ λέγεται **θέση ελαχίστου**, ενώ το $(x_0, f(x_0))$ **ολικό ελάχιστο** ή απλώς **ελάχιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **min** $f(x)$.

Μια συνάρτηση f , με πεδίο ορισμού ένα σύνολο A , λέμε ότι παρουσιάζει στο $x_0 \in A$ **μέγιστο** όταν: $f(x) \dots (\geq, \leq) f(x_0)$, για κάθε $x \in A$.

Το $(x_0, f(x_0))$ λέγεται **θέση μεγίστου**, ενώ το $(x_0, f(x_0))$ **ολικό μέγιστο** ή απλώς **μέγιστο** της συνάρτησης f και το συμβολίζουμε με **max** $f(x)$.