Η επίδραση των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών Γυμνασίου – Λυκείου

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Ν. Κιλκίς

Με έχει απασχολήσει συχνά το γεγονός ότι οι πιο πολλές δυσκολίες, οι οποίες εμποδίζουν την πρόοδο των σπουδαστών που προσπαθούν να μάθουν Ανάλυση, οφείλονται στο εξής:

Αν και κατανοούν λίγα πράγματα από τη συνήθη άλγεβρα, επιμένουν εν τούτοις σ' αυτήν την πιο περίπλοκη τέχνη. Έτσι λοιπόν όχι μόνο παραμένουν στο περιθώριο, αλλά αποκτούν παράξενες ιδέες για την έννοια του απείρου, την οποία οφείλουν να χρησιμοποιήσουν.

Leonhard Euler: *Introductio in Analysin Infinitorum*, 1748

Είναι προτιμότερο για ένα παιδί να πιστεύει ότι δεν ξέρει μαθηματικά, παρά να του δοθεί η ψευδαίσθηση ότι ξέρει, χωρίς να ξέρει.

Γιάννης Ντάνης: *Το βιβλίο της μεθοδολογίας των γεωμετρικών τόπων,* 1977

Μια συνήθης διδακτική πρακτική στην Γ΄ Λυκείου

Η διδακτέα/εξεταστέα ύλη ολοκληρώνεται έναν ή και δύο μήνες πριν από την προγραμματισμένη λήξη των μαθημάτων.

Η αιτιολογία που δίνεται συνήθως για τη συγκεκριμένη πρακτική είναι ότι με την αρχική, γρήγορη διεκπεραίωση της ύλης δίνεται έμφαση στη θεωρία και τις ασκήσεις του βιβλίου, ενώ στη συνέχεια γίνεται επανάληψη μέσω της οποίας οι μαθητές εμβαθύνουν και ασκούνται στην αντιμετώπιση σύνθετων ή συνδυαστικών θεμάτων, παρόμοια μ' εκείνα που θα αντιμετωπίσουν στις πανελλαδικές εξετάσεις.

Μερικές βασικές επισημάνσεις

► Πολύ λίγοι μαθητές είναι σε θέση να αντιμετωπίσουν με επιτυχία στη διάρκεια της τρίωρης εξέτασης των σύνολο των θεμάτων που θέτει η Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων.

► Υπάρχει πολύ χαμηλή επίδοση στο θέμα Α της θεωρίας, όπου οι μαθητές καλούνται ουσιαστικά να αναπαράγουν μιαν απόδειξη και ορισμούς του σχολικού βιβλίου (η αποτυχία φτάνει συνήθως το 50%, ενώ στα ίδια γραπτά λύνονται σωστά αρκετές ασκήσεις!).

Είναι φανερό ότι παρά τα όσα λέγονται για έμφαση στη θεωρία, η διδασκαλία της τελευταίας είναι τελείως επιφανειακή και αυτό που αποκομίζουν οι μαθητές είναι ότι το “κλειδί” για την επιτυχία στις εξετάσεις είναι η “μεθοδολογία”.

► Σε πολλά γραπτά που ανήκουν στην κατηγορία των πολύ καλών (αρκετές φορές και των άριστων) εκδηλώνονται μεγάλες παρανοήσεις των μαθητών για βασικές μαθηματικές έννοιες.

Οι παρανοήσεις αυτές εμφανίζονται την ίδια στιγμή που γίνονται από τους μαθητές θεαματικές εφαρμογές υπαρξιακών θεωρημάτων για την επίλυση εξισώσεων ή την απόδειξη ανισοτήτων, καθώς και εξεζητημένες εφαρμογές του κανόνα De L'Hospital για τον υπολογισμό ορίων.

Πολλές φορές μάλιστα η χρήση των ισχυρών θεωρημάτων της Ανάλυσης είναι περιττή και αδιέξοδη, αφού η λύση προκύπτει με χρήση των ορισμών ή απλών ιδιοτήτων τις οποίες οι μαθητές δείχνουν να αγνοούν ή να έχουν ξεχάσει.

Μια χαρακτηριστική παρανόηση για την έννοια της μεταβλητής στο θέμα 4(α) των Εξετάσεων του 2008

Έστω f μια συνάρτηση συνεχής στο R για την οποία ισχύει

$$f(x) = (10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45$$

Να αποδείξετε ότι $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$ (Μονάδες 8)

Για την επίλυση αρκεί να θέσουμε: $\int_0^2 f(t)dt = k$

Τότε η υπόθεση γίνεται:

$$f(x) = 10kx^3 + 3kx - 45$$

Αντικαθιστώντας στην προηγούμενη ισότητα παίρνουμε την εξίσωση:

$$\int_0^2 \left(10kx^3 + 3kx - 45\right)dt = k \Leftrightarrow 10k\left[\frac{x^4}{4}\right]_0^2 + 3k\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^2 - 45[x]_0^2 = k$$

Μια “απόδειξη” με χρήση ισχυρών θεωρημάτων της Ανάλυσης

ΘΕΜΑ 4ο/α

$$f(x)=(10x^3+3x)\int_0^2 f(t)dt-45 \;\Rightarrow\; f(x)=10x^3\int_0^2 f(t)dt+3x\int_0^2 f(t)dt-45\ ,\ x\in R.$$

Αρκεί να δείξω ότι $\int_0^2 f(t)dt=2$

Έστω η $F(x)=\int_0^x f(t)dt\ ,\ x\in R$ **με F(0) = 0. Η F είναι συνεχής και**

παρ/μη στο [0, 2]. Από ΘΕΩΡΗΜΑ ΜΕΣΗΣ ΤΙΜΗΣ για την F στο [0, 2]

$$\exists\ \xi\in(0,2):\ F'(\xi)=\frac{F(2)-F(0)}{2}=\frac{F(2)}{2}$$

Όμως $F'(\xi)=f(\xi)$ **Άρα** $f(\xi)=\frac{F(2)}{2}\ \Rightarrow\ F(2)=2f(\xi).$

Δηλαδή $\boxed{\int_0^2 f(t)dt=2f(\xi).}$ **Αρκεί νδο ότι** $\exists\ \xi\in R$ **τέτοιο ώστε** $f(\xi)=1$

$f(0) = -45$

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty}(10x^3 + 3x)\int_0^2 f(t)dt - 45 = +\infty$$

Εφόσον η συνάρτηση f είναι συνεχής και εφόσον για x = 0 είναι

$f(0) = -45$, ενώ καθώς η f τείνει στο άπειρο παίρνει απείρως μεγάλη

τιμή, σύμφωνα με το ΘΕΩΡΗΜΑ ΕΝΔΙΑΜΕΣΩΝ ΤΙΜΩΝ, και επειδή το 1

βρίσκεται μεταξύ του –45 και του Μ >>>0, θα υπάρχει κάποιος ξ μεταξύ

του 0 και του $+\infty$ όπου $f(\xi) = 1$.

Άρα $\int_0^2 f(t)dt = 2$ **και** $f(x) = 20x^3 + 6x - 45$

Μερικές παρατηρήσεις στην προηγούμενη “απόδειξη”

Γνωρίζει ότι πρέπει να αποδείξει F(2) = 2.

Με εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στη συνάρτηση – ολοκλήρωμα F αποδεικνύει ότι υπάρχει αριθμός ξ του διαστήματος (0, 2) τέτοιος, ώστε F(2) = 2f(ξ).

Άρα αρκεί, για το συγκεκριμένο ξ, να αποδείξει ότι f(ξ) = 1.

Με εφαρμογή του Θ.Ε.Τ. στη συνάρτηση f αποδεικνύει ότι υπάρχει αριθμός ξ του διαστήματος (0, +∞) για τον οποίο η αντίστοιχη τιμή της f είναι ίση με 1.

Δηλαδή ταυτίζονται τα ξ δύο διαφορετικών υπαρξιακών θεωρημάτων, που εφαρμόζονται σε διαφορετικές συναρτήσεις και σε διαφορετικά διαστήματα!

Τα σύμβολα ξ και f(ξ) δεν χρησιμοποιούνται σαν αριθμητικές μεταβλητές που κάθε μία έχει ένα ιδιαίτερο σύνολο αναφοράς, αλλά σαν ονόματα συγκεκριμένων, σταθερών ποσοτήτων.

Μια χαρακτηριστική παρανόηση για το σύνολο των πραγματικών αριθμών

Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$60x^5 – 60x^4 + 60x^3 – 60x^2 + 60x – 23 = 0 \quad (1)$$

έχει ακριβώς μία ρίζα στο διάστημα (0, 1).

Ένας μαθητής αντιμετώπισε την άσκηση σύμφωνα με την καθιερωμένη “μεθοδολογία”:

Θεώρησε τη συνάρτηση

$$f(x) = 10x^6 – 12x^5 + 15x^4 – 20x^3 + 30x^2 – 23x$$

για την οποία ισχύει

$f'(x) = 60x^5 – 60x^4 + 60x^3 – 60x^2 + 60x – 23$ και $f(0) = f(1)$.

Με εφαρμογή του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [0, 1] έδειξε ότι υπάρχει ένας τουλάχιστον $\xi \in (0, 1)$ τέτοιος ώστε $f'(\xi) = 0$, δηλαδή ο ξ είναι ρίζα της εξίσωσης (1).

Για να αποδείξει τη μοναδικότητα της ρίζας ο μαθητής ακολούθησε μιαν αντίστοιχη “μεθοδολογία”:

Έστω ότι η εξίσωση (1) έχει και μια δεύτερη ρίζα ρ στο διάστημα (0, 1). Τότε για τη συνάρτηση

$$g(x) = 60x^5 - 60x^4 + 60x^3 - 60x^2 + 60x - 23$$

ισχύουν οι υποθέσεις του θεωρήματος Rolle στο διάστημα [ξ, ρ] και άρα υπάρχει ένα τουλάχιστον $\kappa \in (\xi, \rho)$ τέτοιο ώστε $g'(\kappa) = 0$.

Αλλά $g'(x) = 0 \Leftrightarrow 300x^4 - 240x^3 + 180x^2 - 120x + 60 = 0 \Leftrightarrow$

$$5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 = 0 \qquad (2)$$

Οι μόνες δυνατές ρίζες της εξίσωσης (2) είναι οι αριθμοί +1 και –1.

Με το σχήμα Horner βλέπουμε ότι καμία από αυτές δεν επαληθεύει την εξίσωση. Άρα καταλήγουμε σε άτοπο, αφού

$$5x^4 - 4x^3 + 3x^2 - 2x + 1 \neq 0 \ \forall x \in \mathbb{R}.$$

Ένας τρόπος, με αλγεβρικές γνώσεις της Α΄ Λυκείου, είναι ο εξής:

$$5x^4 - 4x^3 + 2x^2 + x^2 - 2x + 1 = 0 \Leftrightarrow x^2(5x^2 - 4x + 2) + (x - 1)^2 = 0$$

Μια ιδιάζουσα περίπτωση

Έστω συνάρτηση f: [α, β] $\to$ R, η οποία είναι συνεχής στο [α, β], παραγωγίσιμη στο (α, β) και f(α) = 2β, f(β) = 2α.

α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση f(x) = 2x έχει μια τουλάχιστον ρίζα στο (α, β)

β) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν $\xi_1, \xi_2 \in$(α, β) τέτοια ώστε $f'(\xi_1)f'(\xi_2) = 4$.

Ένας μαθητής αντιμετώπισε την άσκηση ως εξής:

Στο 1ο ερώτημα έκανε εφαρμογή του θεωρήματος Bolzano στη συνάρτηση g(x) = f(x) – 2x, που εξασφαλίζει την ύπαρξη αριθμού ξ$\in$(α, β) τέτοιου ώστε g(ξ) = f(ξ) – 2ξ = 0.

Το 2ο ερώτημα προκύπτει με εφαρμογή του Θεωρήματος Μέσης Τιμής στα διαστήματα [α, ξ] και [ξ, β], αλλά …

Ο μαθητής έκανε εφαρμογή του Θ.Μ.Τ. στο διάστημα [α, β] δύο φορές και ονόμασε $ξ_1$ και $ξ_2$ τα αντίστοιχα σημεία:

$$f'(ξ_1)=\frac{f(β)-f(α)}{β-α}=\frac{2α-2β}{β-α}=\frac{-2(β-α)}{β-α}=-2$$

$$f'(ξ_2)=\frac{f(β)-f(α)}{β-α}=\frac{2α-2β}{β-α}=\frac{-2(β-α)}{β-α}=-2$$

Από τις ισότητες αυτές προκύπτει αμέσως, με πολλαπλασιασμό κατά μέλη, το ζητούμενο αποτέλεσμα!

Ως επίλογος: Απόσπασμα από έναν πρόλογο …

Προτού αναφερθούμε στη μεθοδολογία που εισάγει το βιβλίο αυτό, θα θέλαμε να καθορίσουμε το περιεχόμενό της.

Αυτό το κάνουμε, γιατί είναι γνωστό ότι το περιεχόμενο πολλών λέξεων, σε διάφορους τομείς, έχει παραφθαρεί, βασικά από μια κάποια *σκοπιμότητα*, που στην περίπτωση αυτή, είναι το πέρασμα της λέξης στην καταναλωτική χρήση.

Έτσι για το καλύτερο πούλημα του περιεχομένου της λέξης, ταυτίζεται η μεθοδολογία με την *απλούστευση*, με *τεχνάσματα δευτερεύουσας αξίας*, με *μια διαδικασία συνταγών*, με *πλήθος λυμένων ασκήσεων* και, βασικά, με μια *έτοιμη χωνευμένη τροφή*.

Τα περιεχόμενα αυτά, τελείως ξένα με τη μεθοδολογία, είναι αντιπαιδαγωγικά και πάνω απ' όλα ξένα προς το πνεύμα της Μαθηματικής Επιστήμης.

(Γιάννης Ντάνης: *Το βιβλίο της μεθοδολογίας των γεωμετρικών τόπων*, 1977)