Μπορούν τα θέματα των Εξετάσεων να συμβάλουν στη διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου; Προβληματισμοί και προτάσεις

Γιάννης Θωμαΐδης, Σχολικός Σύμβουλος Ν. Κιλκίς
Δημήτρης Μπαρούτης, 4ο ΓΕ.Λ. Ευόσμου

Οδηγίες του Π.Ι. για τη διδασκαλία της Ανάλυσης

Κεφάλαιο 1 (Όριο – Συνέχεια Συνάρτησης)

Σε γενικές γραμμές, με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

7. Να γνωρίζουν τις ιδιότητες του ορίου συνάρτησης και με τη βοήθειά τους να υπολογίζουν τα όρια απλών συναρτήσεων.

Κεφάλαιο 2 (Διαφορικός Λογισμός):

Σε γενικές γραμμές με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

5. Να <u>κατανοήσουν</u> τα θεωρήματα Rolle, Μέσης Τιμής και Fermat και να μπορούν να τα <u>εφαρμόζουν</u> σε απλές ασκήσεις.

Κεφάλαιο 3 (Ολοκληρωτικός Λογισμός)

Ειδικότερα με τη διδασκαλία του κεφαλαίου αυτού επιδιώκεται οι μαθητές:

6. Να γνωρίζουν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού και να μπορούν να το εφαρμόζουν στον υπολογισμό απλών ολοκληρωμάτων.

***Οδηγίες για τη διδακτέα ύλη και τη διδασκαλία των Μαθηματικών του Γενικού Λυκείου κατά το σχολικό έτος 2007 – 2008* (σσ.129–132).**

Π.Δ. 86/2001 (και όλα τα μεταγενέστερα): "Αξιολόγηση των μαθητών του Ενιαίου Λυκείου"
Άρθρο 15

1. **Τα θέματα των γραπτών προαγωγικών και απολυτηρίων εξετάσεων λαμβάνονται από την ύλη που ορίζεται ως εξεταστέα για κάθε μάθημα κατά το έτος που γίνονται οι εξετάσεις. Οι ερωτήσεις είναι ανάλογες με εκείνες που υπάρχουν στα σχολικά εγχειρίδια και στις οδηγίες του Π.Ι., διατρέχουν όσο το δυνατόν μεγαλύτερη έκταση της εξεταστέας ύλης, ελέγχουν ευρύ φάσμα διδακτικών στόχων και είναι κλιμακούμενου βαθμού δυσκολίας. Οι μαθητές απαντούν υποχρεωτικά σε όλα τα θέματα.**

Αντικρουόμενοι στόχοι στη διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου

Στόχος 1 (Παιδαγωγικό Ινστιτούτο)

Οι μαθητές πρέπει να αποκτήσουν την ικανότητα:

Α) Να υπολογίζουν όρια <u>απλών</u> συναρτήσεων.

Β) Να μελετούν <u>απλές</u> συναρτήσεις ως προς τη συνέχεια και την παραγωγισιμότητα και να εφαρμόζουν σ' αυτές τα θεωρήματα Rolle και Μέσης Τιμής.

Γ) Να χρησιμοποιούν το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού σε <u>απλές</u> συναρτήσεις.

Στόχος 2 (Κεντρική Επιτροπή Εξετάσεων)

Τα θέματα των Πανελλαδικών Εξετάσεων πρέπει να είναι τέτοια ώστε το ποσοστό των αριστούχων να συγκρατείται σε "φυσιολογικά" επίπεδα.

Οι διακυμάνσεις του ποσοστού των αριστούχων στις Πανελλαδικές Εξετάσεις τα τελευταία 12 χρόνια

Έτος %	Βαθμολογική περιοχή 18 – 20 στα Μαθηματικά Θετικής Κατεύθυνσης										
2001	**2002**	**2003**	**2004**	**2005**	**2006**	**2007**	**2008**	**2009**	**2010**	**2011**	**2012**
17,25	**10,12**	**9,72**	**17,70**	**22,68**	**10,91**	**13,11**	**9,37**	**26,50**	**24,23**	**11,09**	**9,79**

Το ποσοστό των αριστούχων ως εξαρτημένη μεταβλητή

Ποια είναι η ανεξάρτητη μεταβλητή;

Με ποιους τρόπους επιχειρεί η Κ.Ε.Ε. να συγκρατήσει το ποσοστό των αριστούχων;

- **Δημιουργία "συνδυαστικών" θεμάτων**
- **"Αξιοποίηση" βασικών παρανοήσεων**
- **Δημιουργία "εξωτικών" συναρτήσεων**
- **Σύνθεση διαφορετικών ασκήσεων στο ίδιο ερώτημα**
- **Δημιουργία θεμάτων στα όρια της διδακτέας ή εξεταστέας ύλης**

Σύμφωνα με όσα έχουμε δει μέχρι στιγμής ….

Δημιουργία θεμάτων στα όρια της διδακτέας ή εξεταστέας ύλης

Θέματα στα οποία ζητείται ο προσδιορισμός συναρτήσεων που επαληθεύουν διαφορικές ή ολοκληρωτικές εξισώσεις

Υπενθυμίζουμε ότι η ενότητα 3.3. “Διαφορικές Εξισώσεις” βρίσκεται εκτός εξεταστέας ύλης …

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΠΡΩΤΟ

Επιλέγουμε μια συνεχή και θετική για κάθε x∈R συνάρτηση:

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2}$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι:

$$f'(x)=-\frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} \qquad =-2xf^2(x)$$

Μετασχηματίζοντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε ότι:

$$-\frac{f'(x)}{f^2(x)}-2x=0 \quad \Rightarrow \quad \left[\frac{1}{f(x)}-x^2\right]'=0$$

Άρα η συνάρτηση $g(x)=\frac{1}{f(x)}-x^2$ **είναι σταθερή στο R.**

$$[\, g(x) = 1 + x^2 - x^2 = 1]$$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση $f'(x)=-2xf^2(x)$ **από 0 έως x βρίσκουμε διαδοχικά:**

$$\int_0^x f'(u)du=-2\int_0^x uf^2(u)du$$

$$f(x)-f(0)=-2\int_0^x uf^2(u)du$$

$$f(x)=1-2\int_0^x uf^2(u)du \quad \overset{u=xt}{\Longrightarrow} \quad f(x)=1-2x^2\int_0^1 tf^2(xt)dt$$

Εξετάσεις 2001, Θέμα 4ο

Έστω η πραγματική συνάρτηση f, συνεχής στο σύνολο των πραγματικών αριθμών R, για την οποία ισχύουν οι σχέσεις:

(i) $f(x) \neq 0$, για κάθε $x \in R$.

(ii) $f(x) = 1 - 2x^2 \int_0^1 t f^2(xt)\,dt$ για κάθε $x \in R$.

Έστω ακόμη g η συνάρτηση που ορίζεται από τον τύπο

$$g(x) = \frac{1}{f(x)} - x^2 \quad \text{για κάθε } x \in R.$$

Α. Να δείξετε ότι ισχύει $f'(x) = -2x f^2(x)$

Β. Να δείξετε ότι η συνάρτηση g είναι σταθερή

Γ. Να δείξετε ότι ο τύπος της συνάρτησης f είναι $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$

Δ. Να βρείτε το όριο $\lim\limits_{x \to \infty} \left(x f(x) ημ2x \right)$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΔΕΥΤΕΡΟ

Επιλέγουμε μια συνεχή και θετική για κάθε $x \in R$ συνάρτηση:

$$f(x) = x + \sqrt{x^2 + 9}$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι είναι:

$$f'(x) = 1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{\sqrt{x^2+9} + x}{\sqrt{x^2+9}} = \frac{f(x)}{f(x) - x}$$

Μετασχηματίζοντας τη σχέση αυτή βρίσκουμε ότι:

$$f'(x)f(x) - xf'(x) - f(x) = 0$$

$$2f(x)f'(x) - 2\left[f(x) + xf'(x)\right] = 0$$

$$\left(f^2(x)\right)' - 2\left(xf(x)\right)' = 0 \Rightarrow \left[f^2(x) - 2xf(x)\right]' = 0$$

Άρα η συνάρτηση $g(x)=\left(f(x)\right)^2-2xf(x)$

είναι σταθερή στο R.

$$\left[g(x)=f(x)\left(f(x)-2x\right)=\left(\sqrt{x^2+9}+x\right)\left(\sqrt{x^2+9}-x\right)=9\right]$$

Από τη σχέση $f'(x)=\dfrac{f(x)}{f(x)-x}$ **βρίσκουμε διαδοχικά:**

$$f'(x)-1=\frac{f(x)}{f(x)-x}-1 \qquad f'(x)-1=\frac{x}{f(x)-x}$$

$$\int_0^x \left(f'(t)-1\right)dt=\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt \qquad f(x)-x-\left[f(0)-0\right]=\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

$$f(x)-x-3=\int_0^x \frac{t}{f(t)-t}dt$$

Εξετάσεις 2010, Θέμα 4ο

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση f: R → R η οποία για κάθε x∈R ικανοποιεί τις σχέσεις:

$$f(x) \neq x \ \text{ και } f(x) - x = 3 + \int_0^x \frac{t}{f(t)-t}\,dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι η f είναι παραγωγίσιμη στο R με παράγωγο

$$f'(x) = \frac{f(x)}{f(x)-x}, \ x \in R$$

Δ2. Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $g(x) = \left(f(x)\right)^2 - 2xf(x)$, $x \in R$ **είναι σταθερή**

Δ3. Να αποδείξετε ότι $f(x) = x + \sqrt{x^2+9}$, $x \in R$

Δ4. Να αποδείξετε ότι

$$\int_x^{x+1} f(t)\,dt < \int_{x+1}^{x+2} f(t)\,dt, \ \ x \in R$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ ΤΡΙΤΟ

Επιλέγουμε μια συνεχή και θετική για κάθε $x \in R$ συνάρτηση:

$$f(x) = e^{x}$$

Παραγωγίζοντας βλέπουμε ότι είναι: $f'(x) = e^{x} = f(x)$

Ολοκληρώνοντας τη σχέση $f'(x) = e^{x}$ **από 0 έως x βρίσκουμε ότι:**

$$\int_0^x f'(u)du = \int_0^x e^{u}du \qquad f(x) - f(0) = \int_0^x e^{u}du$$

και με την αλλαγή μεταβλητής u = t + x

$$f(x) - 1 = \int_{-x}^{0} e^{t+x}dt \Leftrightarrow 1 - f(x) = \int_0^{-x} e^{t+x}dt \Leftrightarrow 1 - f(x) = \int_0^{-x} \frac{e^{2t+2x}}{e^{t+x}}dt$$

για να καταλήξουμε στην ολοκληρωτική εξίσωση:

$$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}\,dt$$

Επειδή προφανώς η συγκεκριμένη εξίσωση δεν θεωρήθηκε αρκετά υψηλού βαθμού δυσκολίας, οι θεματοδότες είχαν της εξής φαεινή ιδέα:

Χρησιμοποίησαν για την ίδια συνάρτηση ένα διαφορετικό όνομα (έθεσαν $f(x)=e^x=g(x)$) και διατύπωσαν το θέμα με τον εξής τρόπο:

Εξετάσεις 2011, Θέμα 4ο

Δίνονται οι συνεχείς συναρτήσεις f, g: R→R, οι οποίες για κάθε x∈R ικανοποιούν τις σχέσεις:

i) $f(x) > 0$ και $g(x) > 0$

ii) $$\frac{1-f(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{g(x+t)}dt$$

iii) $$\frac{1-g(x)}{e^{2x}} = \int_0^{-x} \frac{e^{2t}}{f(x+t)}dt$$

Δ1. Να αποδείξετε ότι οι συναρτήσεις f και g είναι παραγωγίσιμες στο R και ότι f(x) = g(x) για κάθε x∈R.

Δ2. Να αποδείξετε ότι: $f(x) = e^x$, x∈R.

Δ3. Να υπολογίσετε το όριο: $$\lim_{x\to 0^-} \frac{\ln f(x)}{f\left(\frac{1}{x}\right)}$$

Δ4. Να υπολογίσετε το εμβαδόν του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της συνάρτησης $$F(x) = \int_1^x f\left(t^2\right)dt$$

τους άξονες x΄x και y΄y και την ευθεία με εξίσωση x = 1.

Εξετάσεις 2012, Θέμα 4ο

Έστω η συνεχής συνάρτηση f: (0, +∞)→R, η οποία για κάθε x > 0 ικανοποιεί τις σχέσεις

- $f(x) \neq 0$
- $\int_1^{x^2-x+1} f(t)dt \geq \frac{x-x^2}{e}$
- $\ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$

Δ1. Να αποδειχθεί ότι η f είναι παραγωγίσιμη και να βρείτε τον τύπο της.

Αν είναι $f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ x > 0$ τότε:

Δ2. Να υπολογίσετε το όριο $\lim_{x\to 0^+}\left[\left(f(x)\right)^2 \eta\mu\frac{1}{f(x)} - f(x)\right]$

Δ3. Με τη βοήθεια της ανισότητας lnx ≤ x – 1, που ισχύει για κάθε x > 0, να αποδείξετε ότι η συνάρτηση $F(x) = \int_\alpha^x f(t)dt,\ \ x > 0,$ όπου α > 0, είναι κυρτή. Στη συνέχεια να αποδείξετε ότι:

F(x) + F(3x) > 2F(2x), για κάθε x > 0.

Δ4. Δίνεται ο σταθερός πραγματικός αριθμός β > 0. Να αποδείξετε ότι υπάρχει μοναδικό ξ∈(β, 2β) τέτοιο ώστε:

$$F(\beta) + F(3\beta) = 2F(\xi).$$

Μια άσκηση για επίδοξους δημιουργούς θεμάτων:

Να αποδείξετε ότι από τη συνάρτηση $f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ x > 0$ παράγονται οι σχέσεις:

$$\int_1^{x^2 - x + 1} f(t)dt \geq \frac{x - x^2}{e} \quad \text{και} \quad \ln x - x = -\left(\int_1^x \frac{\ln t - t}{f(t)}dt + e\right) \cdot |f(x)|$$

Μια άσκηση στη δημιουργία παρόμοιων θεμάτων

Επιλογή συνάρτησης: $$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

Υπολογισμός παραγώγου: $$f'(x) = \frac{x-1}{x} \cdot e^{\frac{1}{x}}$$

Δημιουργία διαφορικής εξίσωσης: $$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{x-1}{x^2},\ x \in R^*$$

Τι εξετάζουμε στους μαθητές:

$$\frac{f'(x)}{f(x)} = \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} \Leftrightarrow \left(\ln|f(x)|\right)' = \left(\ln|x| + \frac{1}{x}\right)',\ x \in R^*$$

$$\ln|f(x)| = \begin{cases} \ln(-x) + \frac{1}{x} + c_1, & x < 0 \\ \ln x + \frac{1}{x} + c_2, & x > 0 \end{cases} \Leftrightarrow |f(x)| = \begin{cases} e^{\ln(-x)+\frac{1}{x}+c_1}, & x < 0 \\ e^{\ln x+\frac{1}{x}+c_2}, & x > 0 \end{cases}$$

Η μελέτη του προσήμου της συνάρτησης

$$f(x) = xe^{\frac{1}{x}}$$

Τι γνωρίζουμε για τη συγκεκριμένη συνάρτηση:

Ισχύει $f(x) \neq 0$ για κάθε $x \in R^*$, $f(x) < 0$ για κάθε $x \in (-\infty, 0)$ και $f(x) > 0$ για κάθε $x \in (0, +\infty)$

Η γραφική παράσταση της f έχει πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1$.

Τι μπορεί να ζητηθεί από τους μαθητές:

Δίνοντας την υπόθεση $f(x) \neq 0$ και $f(1) = e$, εξασφαλίζεται το πρόσημο της συνάρτησης και ο υπολογισμό της σταθεράς c_2 στο διάστημα $(0, +\infty)$.

Δίνοντας την υπόθεση ότι η η γραφική παράσταση της f έχει στο $-\infty$ πλάγια ασύμπτωτη την ευθεία $y = x + 1$, εξασφαλίζεται το πρόσημο της συνάρτησης και ο υπολογισμός της σταθεράς c_1 στο διάστημα $(-\infty, 0)$.

Σχόλια & κριτική για τα συγκεκριμένα θέματα

1. **Δεν εξυπηρετούν κανένα ουσιαστικό διδακτικό στόχο, δεδομένου ότι η ενότητα των διαφορικών εξισώσεων βρίσκεται εκτός εξεταστέας ύλης.**
2. **Συμβάλουν στο ακανθώδες και με πολιτικές προεκτάσεις ζήτημα “συγκράτησης” του ποσοστού των αριστούχων σε ανεκτά επίπεδα.**
3. **Μπορούν να αντικατασταθούν από τη μελέτη των συγκεκριμένων συναρτήσεων με ερωτήματα κλιμακούμενου βαθμό δυσκολίας.**
4. **Επηρεάζουν με αρνητικό τρόπο τη διδασκαλία και μάθηση της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου (εξάσκηση σε τεχνικές αντί για εμβάθυνση σε έννοιες).**

Ένα παράδειγμα στο ζήτημα 3

Μια διαφορετική πρόταση για τη διατύπωση του 4^{ου} θέματος τον Μάιο 2012

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = e^{-x}(\ln x - x),\ x > 0$

Δ1. Να προσδιορίσετε τις ασύμπτωτες της γραφικής παράστασης της συνάρτησης f.

Δ1. Να μελετήσετε την f ως προς τη μονοτονία, τα ακρότατα και να βρείτε το σύνολο τιμών της.

Δ3. Να αποδείξετε ότι η f είναι κοίλη στο πεδίο ορισμού της.

Ένα παράδειγμα για το ζήτημα 4

Η “ταυτότητα” της συνάρτησης

$$\mathbf{f(x) = \frac{1}{1+x^2}}$$

1. Πρωτοεμφανίστηκε ως καμπύλη – λύση σε ένα πρόβλημα γεωμετρικού τόπου

2. Ο τρόπος απόδειξης της σχετικής εξίσωσης συνδυάζει βασικές γεωμετρικές, τριγωνομετρικές και αλγεβρικές γνώσεις

3. Είναι η παράγωγος της συνάρτησης y = τοξεφx

4. Έχει πολύ σημαντικές εφαρμογές

Η προέλευση της συνάρτησης

$$f(x)=\frac{1}{1+x^2} \quad (1)$$

Maria Gaetana Agnesi (1718 – 1799)

Γενική εξίσωση της καμπύλης

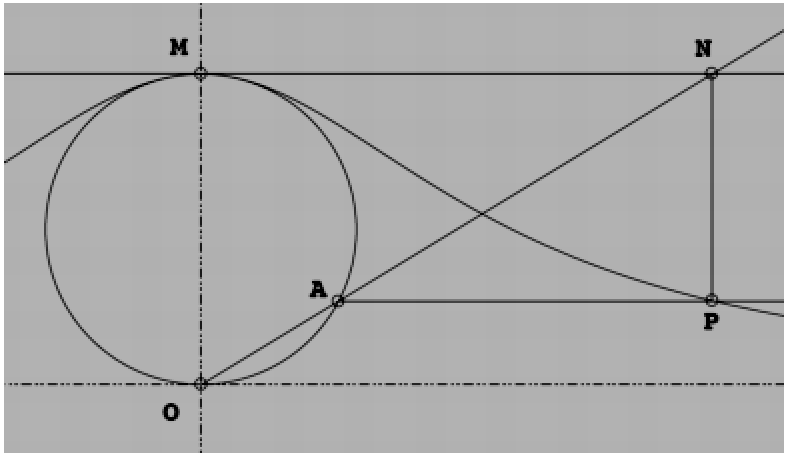
$$y=\frac{\alpha^3}{x^2+\alpha^2}$$

Για α = 1 προκύπτει η (1)

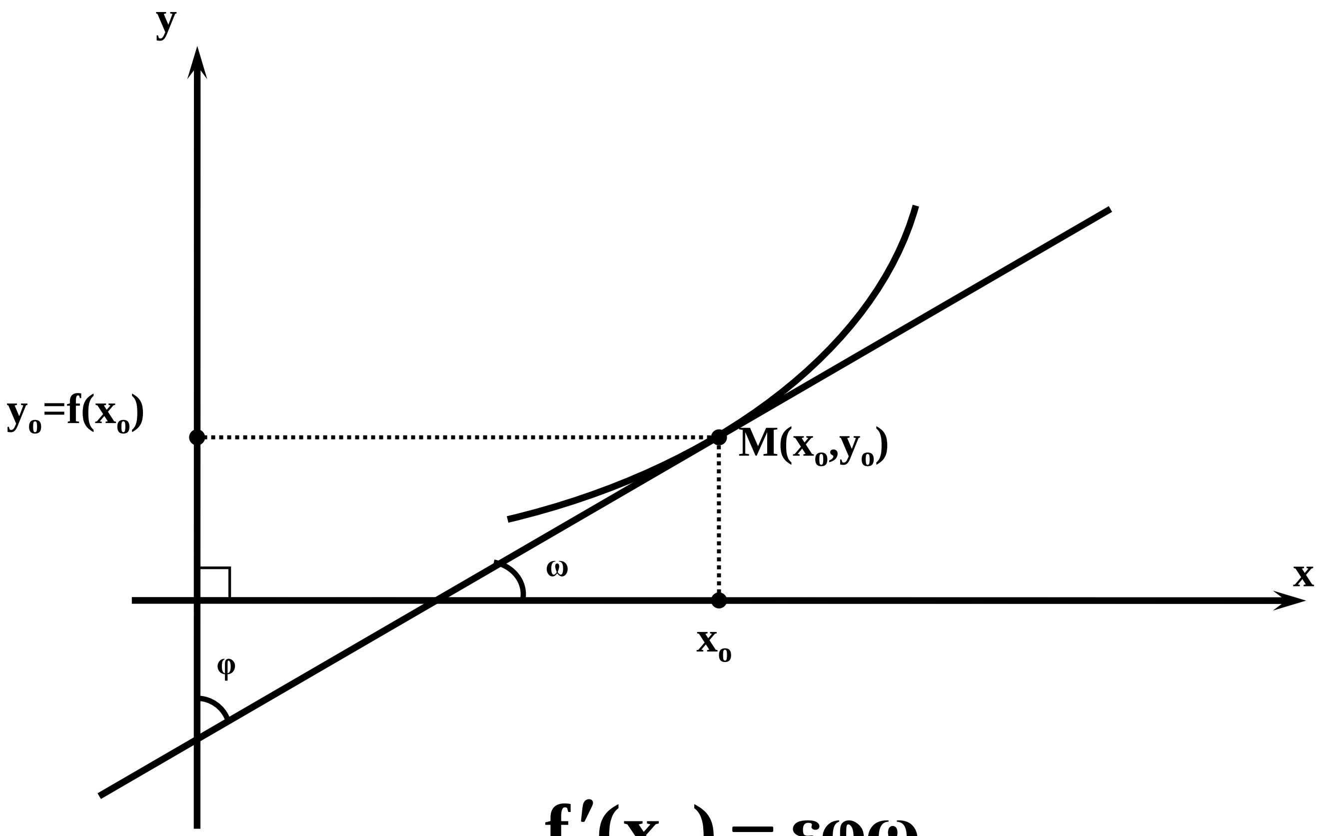
Θεωρούμε δύο αντιδιαμετρικά σημεία Ο και Μ ενός κύκλου και ένα μεταβλητό σημείο του Α. Φέρουμε επίσης την εφαπτομένη του κύκλου στο Μ.

Ονομάζουμε Ν το σημείο στο οποίο η ευθεία ΟΑ τέμνει την εφαπτομένη και Ρ το σημείο στο οποίο η παράλληλη από το Ν προς την ΟΜ τέμνει την κάθετη από το Α στην ΟΜ.

Όταν το Α κινείται στον κύκλο, τότε το Ρ διαγράφει μια καμπύλη που ονομάζεται “μάγισσα της Agnesi”



Η παράγωγος της αντίστροφης συνάρτησης



$$f'(x_o)=\varepsilon\varphi\omega$$

$$\left(f^{-1}\right)'(y_o)=\varepsilon\varphi\varphi=\varepsilon\varphi(90-\omega)=\sigma\varphi\omega=\frac{1}{\varepsilon\varphi\omega}=\frac{1}{f'(x_o)}$$

Εφαρμογή στην f(x) = εφx, $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$

Αν $y = f(x) = \text{εφ}x$ τότε $x = f^{-1}(y) = \text{τοξεφ}y,\ y \in R$

Επειδή $f'(x) = \dfrac{1}{\text{συν}^2 x}$ διαδοχικά έχουμε:

$$\left(f^{-1}\right)'(y_o) = \frac{1}{f'(x_o)} = \boxed{\text{συν}^2 x_o = \frac{1}{1 + \text{εφ}^2 x_o}} = \frac{1}{1 + y_o^2}$$

Άρα είναι $\left(f^{-1}\right)'(x) = (\text{τοξεφ}x)' = \dfrac{1}{1 + x^2}$