γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Διδασκαλία και η απόδειξη στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου

Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Δύο λόγοι για να διδάσκονται αποδείξεις:

Η απόδειξη είναι η ουσία των Μαθηματικών

Η απόδειξη είναι χρήσιμη για τις εξετάσεις

ΘΕΜΑ 4ο

Δίνεται η συνάρτηση $f(x)=\dfrac{x+1}{x-1}-\ln x$.

α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού και το σύνολο τιμών της συνάρτησης f.

β. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $f(x)=0$ έχει ακριβώς 2 ρίζες στο πεδίο ορισμού της.

γ. Αν η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $g(x)=\ln x$ στο σημείο $A(\alpha,\ln\alpha)$ με $\alpha>0$ και η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης της συνάρτησης $h(x)=e^x$ στο σημείο $B(\beta,e^\beta)$ με $\beta\in\mathbb{R}$ ταυτίζονται, τότε να δείξετε ότι ο αριθμός α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$.

δ. Να αιτιολογήσετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων g και h έχουν ακριβώς δύο κοινές εφαπτόμενες.

2006

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Β1. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη **Σωστό** ή **Λάθος** δίπλα στο γράμμα που αντιστοιχεί σε κάθε πρόταση.

α. Αν η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0, τότε η f′ είναι πάντοτε συνεχής στο x_0.

β. Αν η f δεν είναι συνεχής στο x_0, τότε η f είναι παραγωγίσιμη στο x_0.

γ. Αν η f έχει δεύτερη παράγωγο στο x_0, τότε η f′ είναι συνεχής στο x_0.

2000

$$f(x)=\begin{cases} x^2\eta\mu\dfrac{1}{x} & x\neq 0 \\ 0 & x=0 \end{cases}$$

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

- Καλή γνώση της θεωρίας
- Καλή τεχνική κατάρτιση
- Αποδεικτική ικανότητα

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

- Θεωρία δεν είναι ένα σύνολο κανόνων αλλά μία οργανική ενότητα.

- Τα σχολικά βιβλία δεν έχουν θεωρία αλλά πληροφορίες.

- Το ζητούμενο δεν είναι λιγότερη (= «συνοπτική») θεωρία αλλά η πληρέστερη ανάπτυξη της.

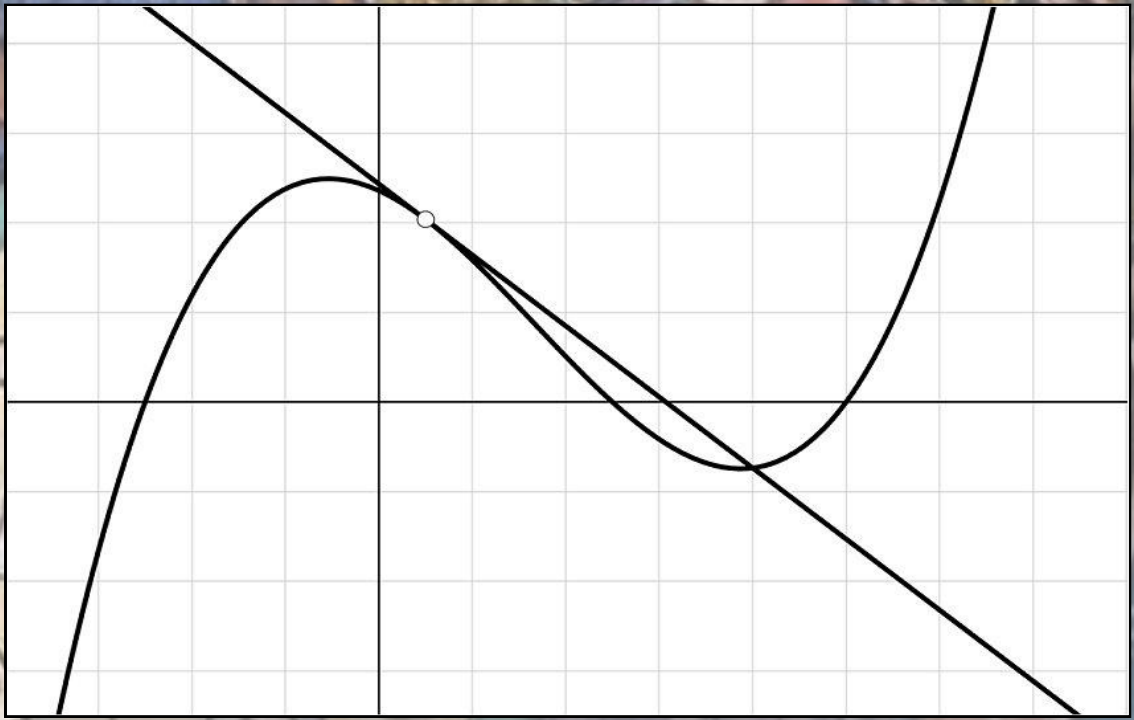
Στόχος:
Θεωρητική ανάπτυξη με «πυκνότητα» αποδείξεων ανάλογη με εκείνη της Γεωμετρίας

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

<u>Γεωμετρία:</u>
Μελέτη βασικών σχημάτων (τρίγωνο, τετράπλευρο, κύκλος)

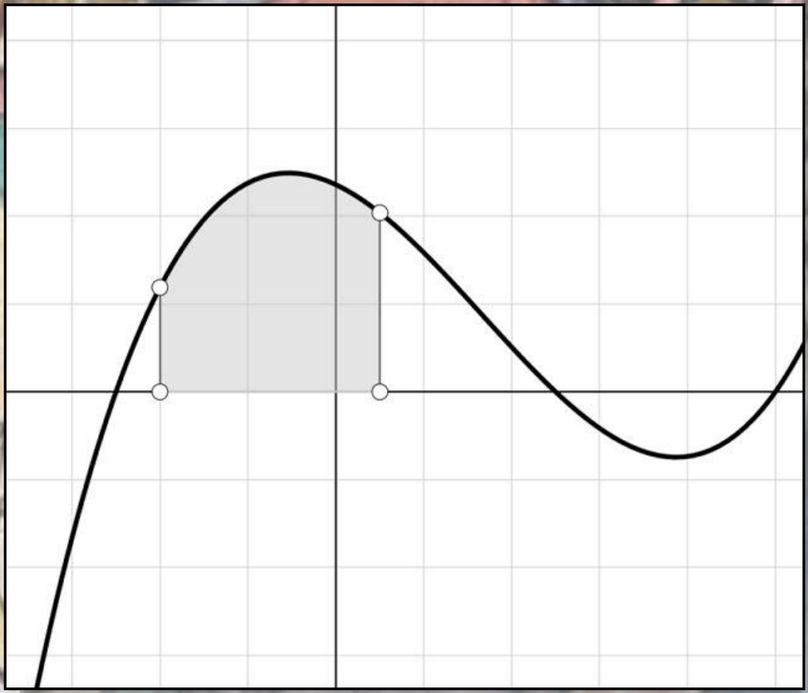
<u>Ανάλυση:</u>
Επίλυση δύο προβλημάτων

Πρόβλημα 1 Να βρεθεί η εφαπτομένη της γραφικής παράστασης μίας συνάρτησης σε ένα σημείο της.



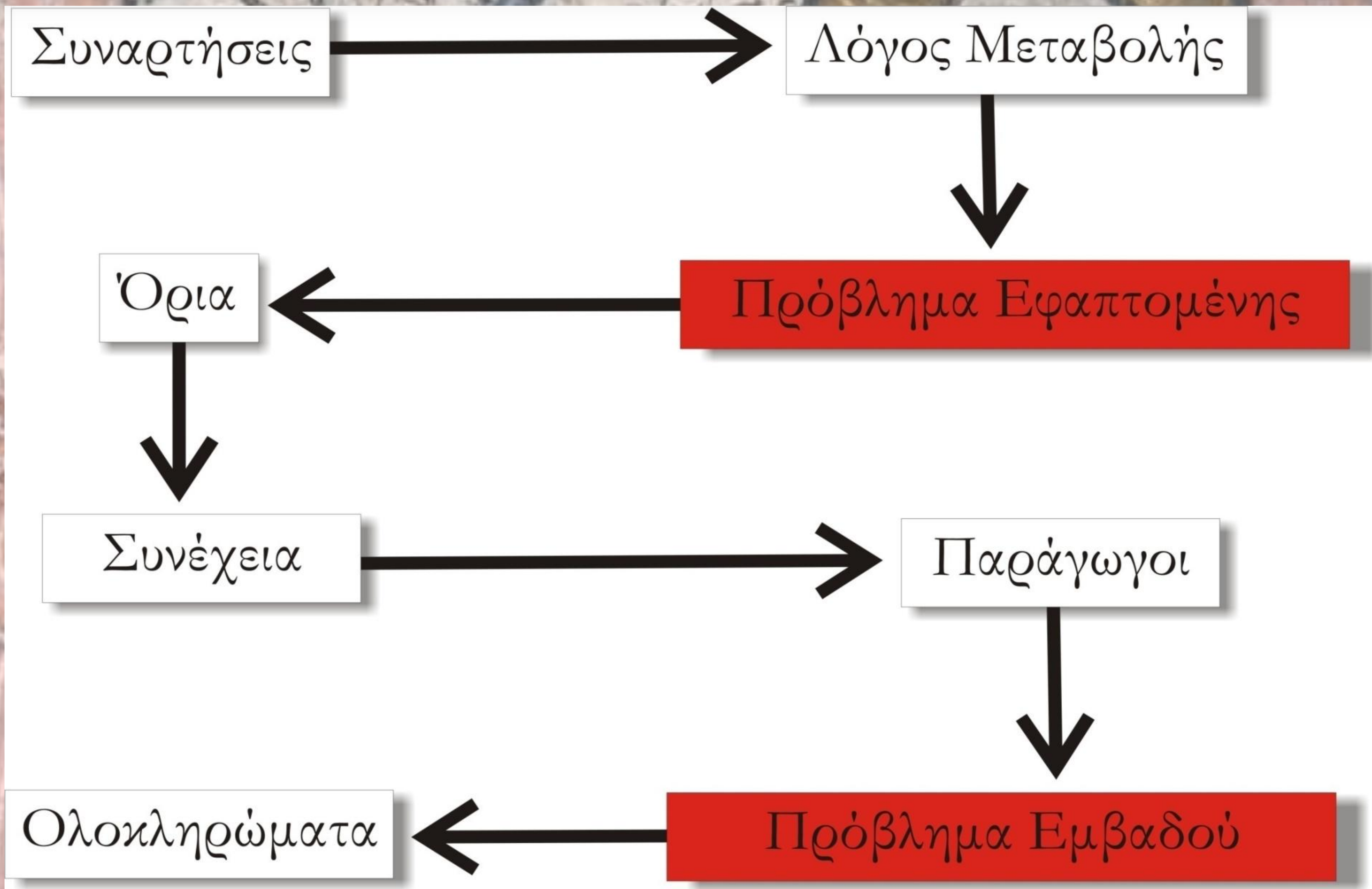
γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Πρόβλημα 2 Να βρεθεί το εμβαδόν του χωρίου που σχηματίζεται από την γραφική παράσταση μίας συνάρτησης πάνω από ένα διάστημα.

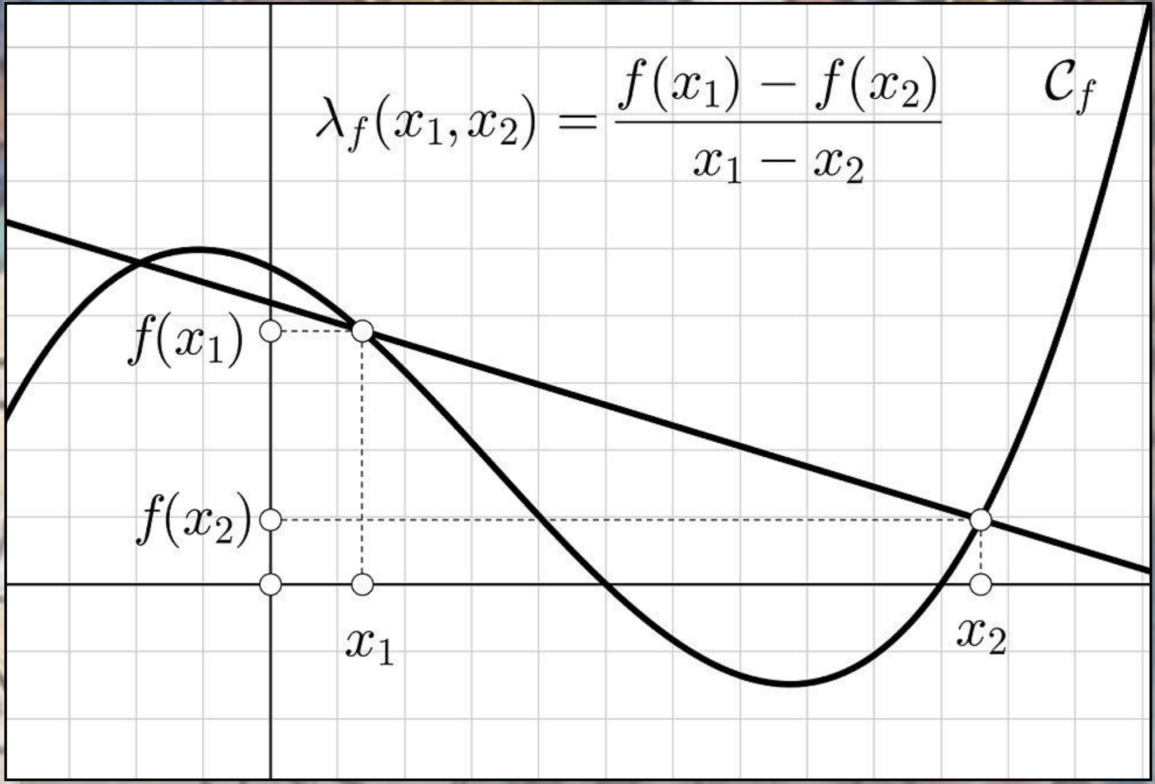


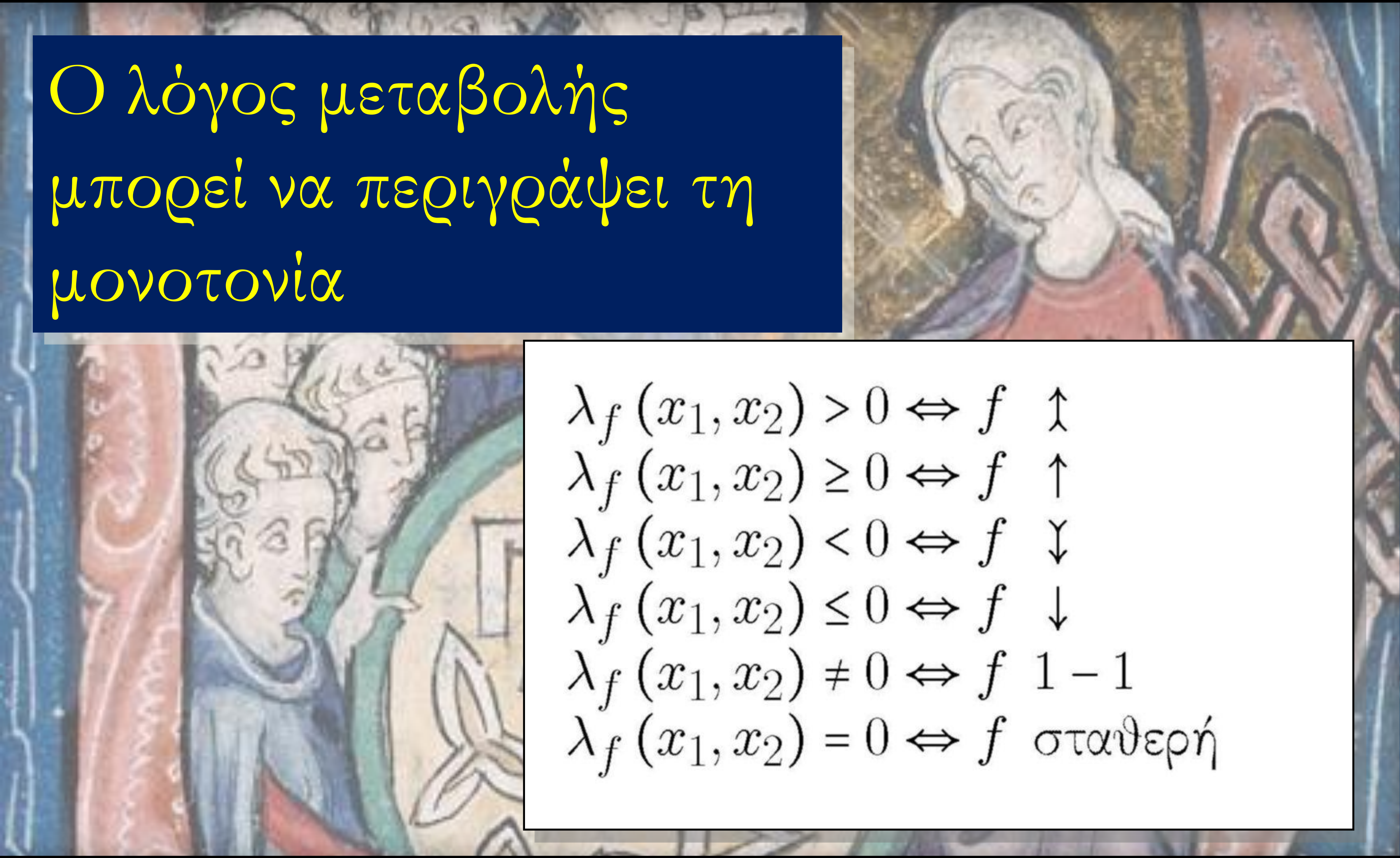
Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD , Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



Εισαγωγή:
Λόγος Μεταβολής: Μία ενοποιός έννοια

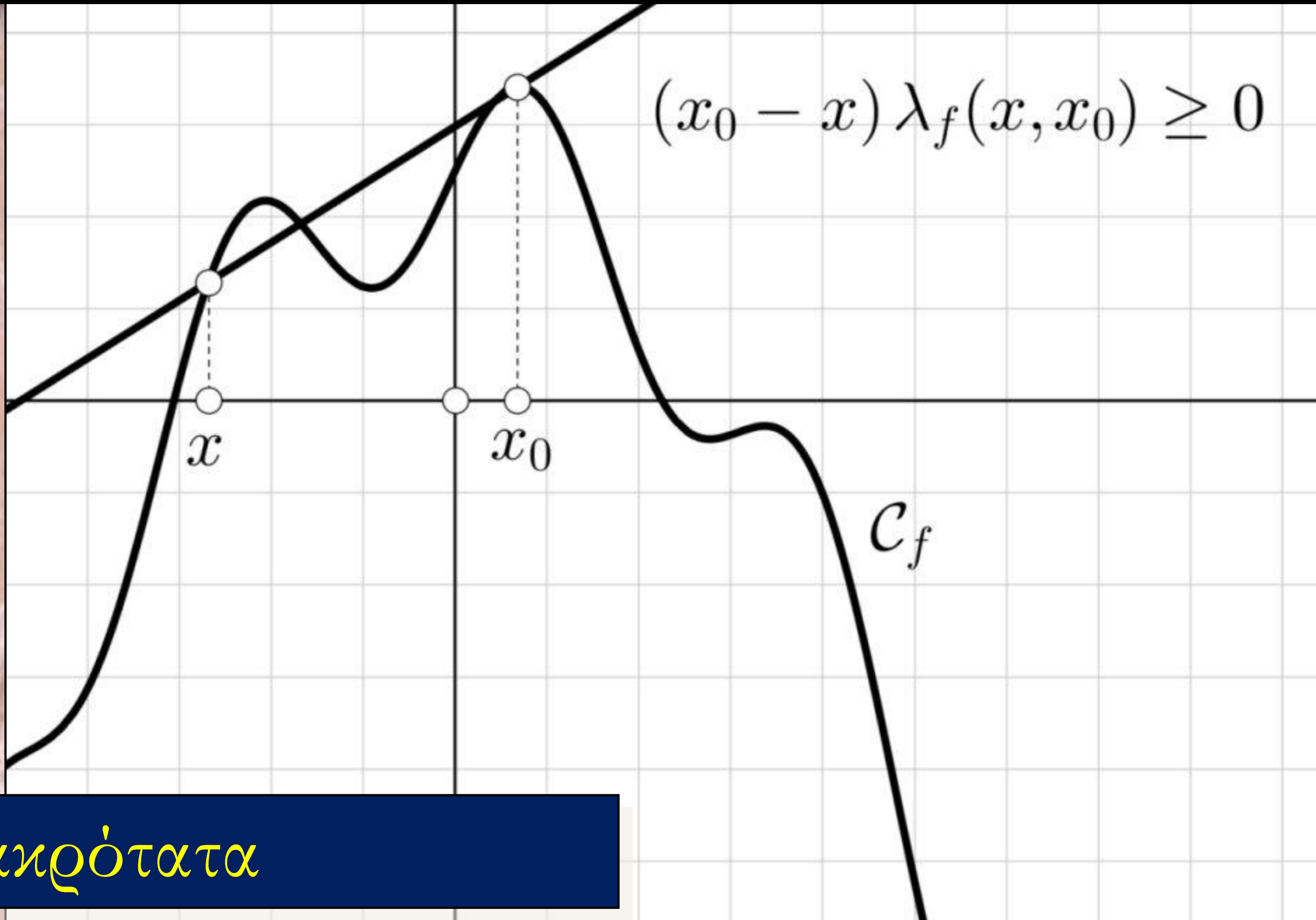




Ο λόγος μεταβολής μπορεί να περιγράψει τη μονοτονία

$$\lambda_f\left(x_1, x_2\right) > 0 \Leftrightarrow f \ \text{↥}$$
$$\lambda_f\left(x_1, x_2\right) \geq 0 \Leftrightarrow f \ \uparrow$$
$$\lambda_f\left(x_1, x_2\right) < 0 \Leftrightarrow f \ \text{↧}$$
$$\lambda_f\left(x_1, x_2\right) \leq 0 \Leftrightarrow f \ \downarrow$$
$$\lambda_f\left(x_1, x_2\right) \neq 0 \Leftrightarrow f \ 1-1$$
$$\lambda_f\left(x_1, x_2\right) = 0 \Leftrightarrow f \ \text{σταθερή}$$

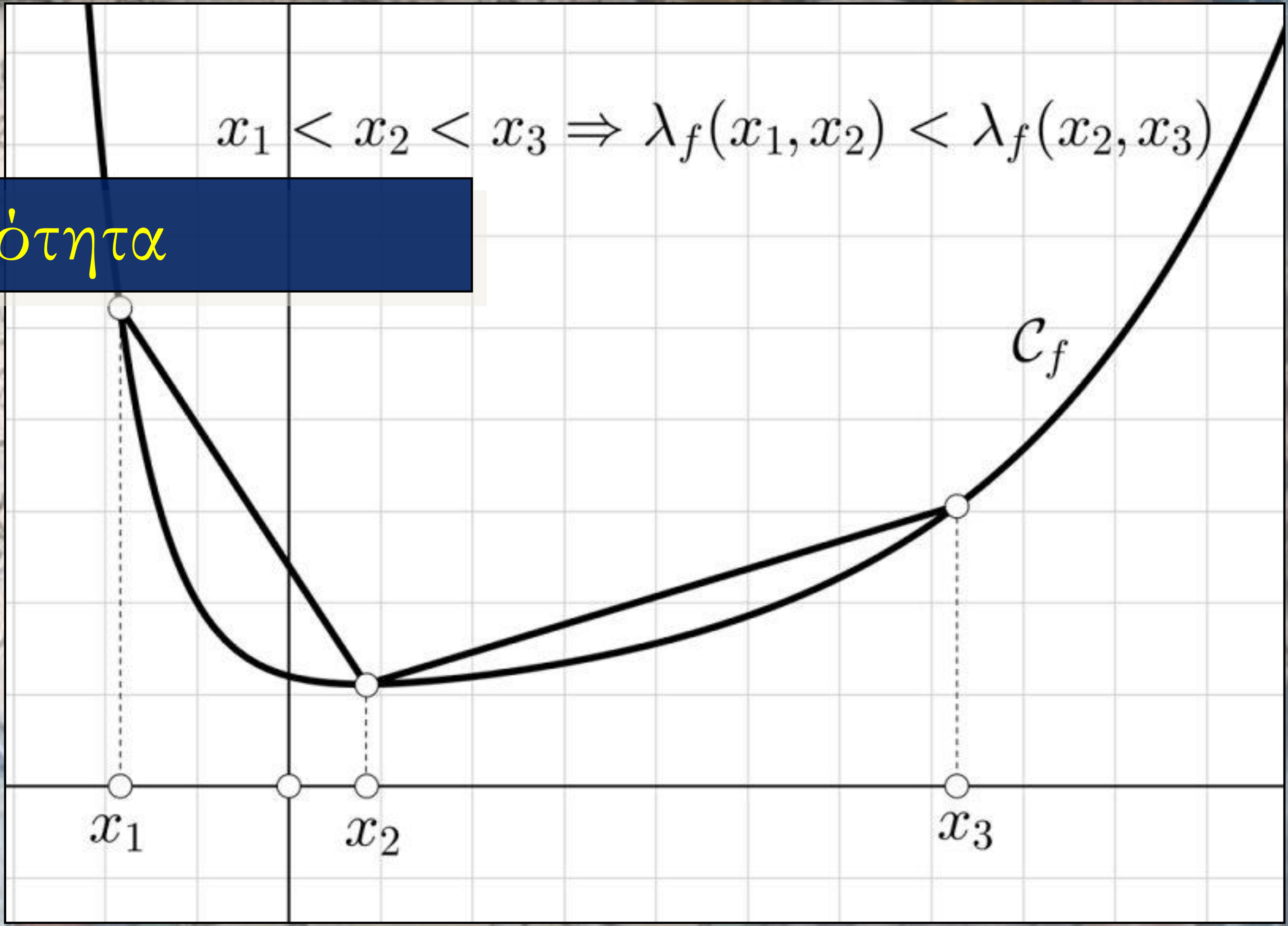
γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



τα ακρότατα

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

την κυρτότητα



γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Ο λόγος μεταβολής έχει αλγεβρικές ιδιότητες ανάλογες της παραγώγου

$$\lambda_{cf}\left(x_1, x_2\right) = c\lambda_f\left(x_1, x_2\right)$$

$$\lambda_{f\pm g,}\left(x_1, x_2\right) = \lambda_f\left(x_1, x_2\right) \pm \lambda_g\left(x_1, x_2\right)$$

$$\lambda_{fg,}\left(x_1, x_2\right) = \lambda_f\left(x_1, x_2\right) g\left(x_1\right) + \lambda_g\left(x_1, x_2\right) f\left(x_2\right)$$

$$\lambda_{\frac{1}{g}}\left(x_1, x_2\right) = -\frac{1}{g\left(x_1\right) g\left(x_2\right)} \lambda_g\left(x_1, x_2\right)$$

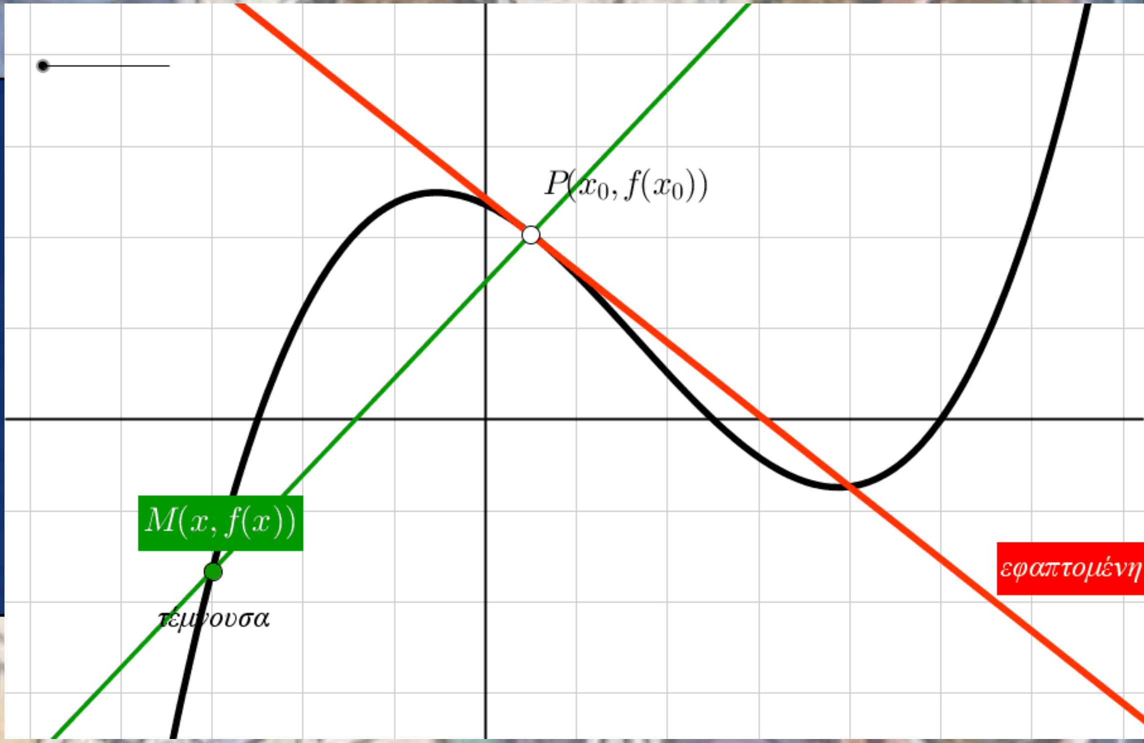
$$\lambda_{g\circ f}\left(x_1, x_2\right) = \lambda_g\left(f\left(x_1\right), f\left(x_2\right)\right) \lambda_f\left(x_1, x_2\right)$$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Μέρος Ι, Το όριο ως έννοια χωρίς ορισμό

Η εισαγωγή στο όριο μπορεί να γίνει από το πρόβλημα της εφαπτομένης



όταν $\boxed{M \to P}$ τότε $\boxed{\text{τέμνουσα} \to \text{εφαπτομένη}}$

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

όταν $\boxed{M \to P}$ τότε $\boxed{\text{τέμνουσα} \to \text{εφαπτομένη}}$

όταν $\boxed{x \to x_0}$ τότε $\boxed{\text{τέμνουσα} \to \text{εφαπτομένη}}$

όταν $\boxed{x \to x_0}$ τότε $\boxed{\lambda_{\text{τέμνουσας}} \to \lambda_{\text{εφαπτομένης}}}$

όταν $\boxed{x \to x_0}$ τότε $\boxed{\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} \to \lambda_{\text{εφαπτομένης}}}$

$$\boxed{\lambda_{\text{εφαπτομένης}} = \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}}$$

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Μερικές απλές εφαπτομένες

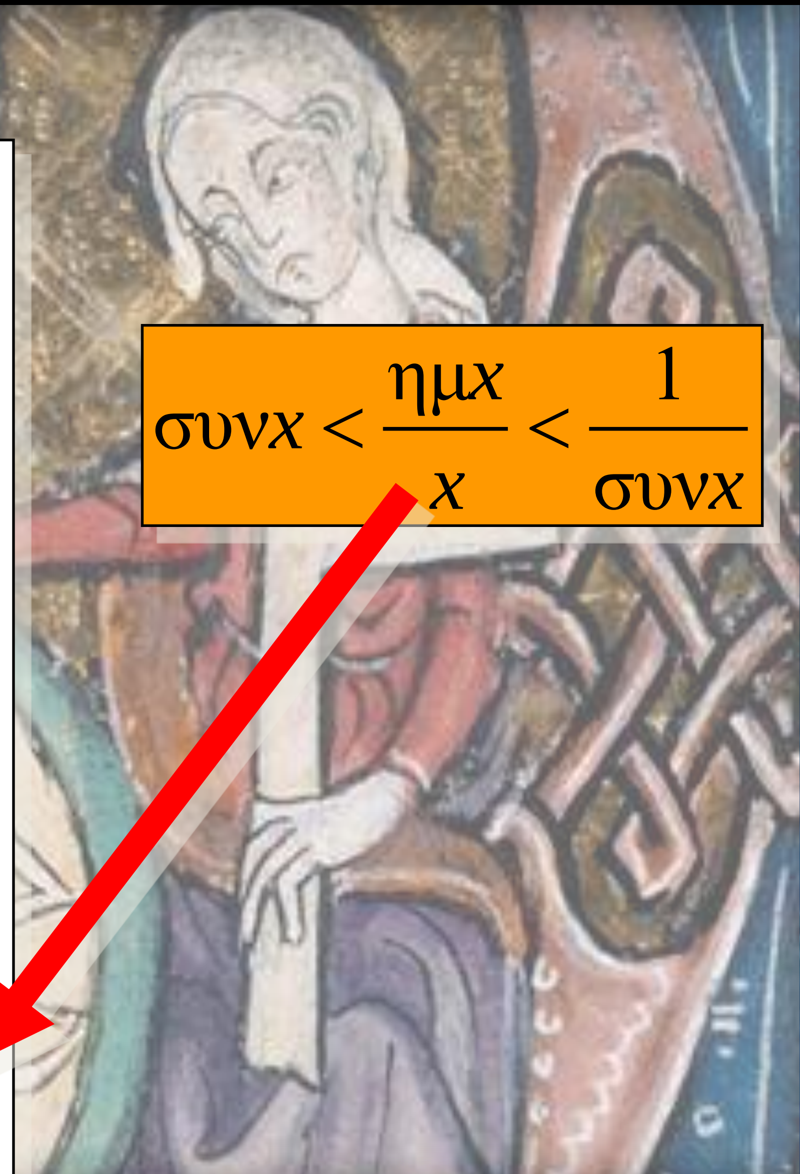
$$f(x)=x^2 \qquad x_0=1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{x^2-1}{x-1}$$

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad x_0=1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\frac{1}{x}-1}{x-1}$$

$$f(x)=\sqrt{x} \qquad x_0=1 \qquad \lim_{x\to 1}\frac{\sqrt{x}-1}{x-1}$$

$$f(x)=\eta\mu x \qquad x_0=0 \qquad \lim_{x\to 0}\frac{\eta\mu x}{x}$$

$$\sigma\upsilon\nu x<\frac{\eta\mu x}{x}<\frac{1}{\sigma\upsilon\nu x}$$



Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

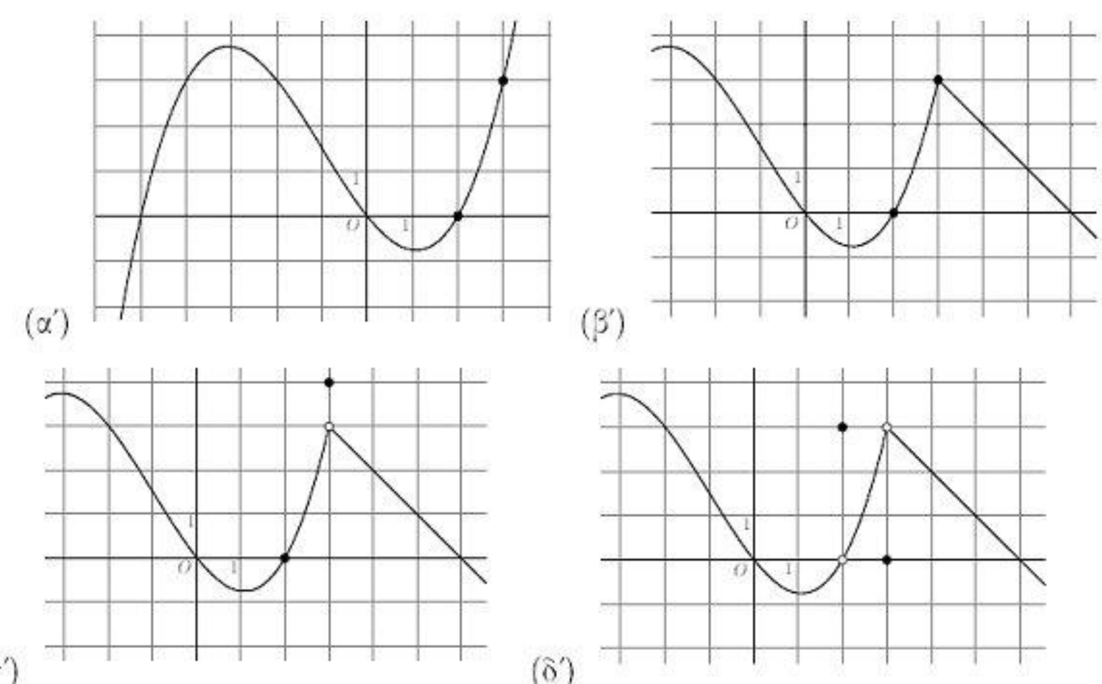
Η ανάπτυξη των ορίων μπορεί αρχικά να γίνει μέσω της γραφικής παράστασης

2.2 Όρια Συναρτήσεων

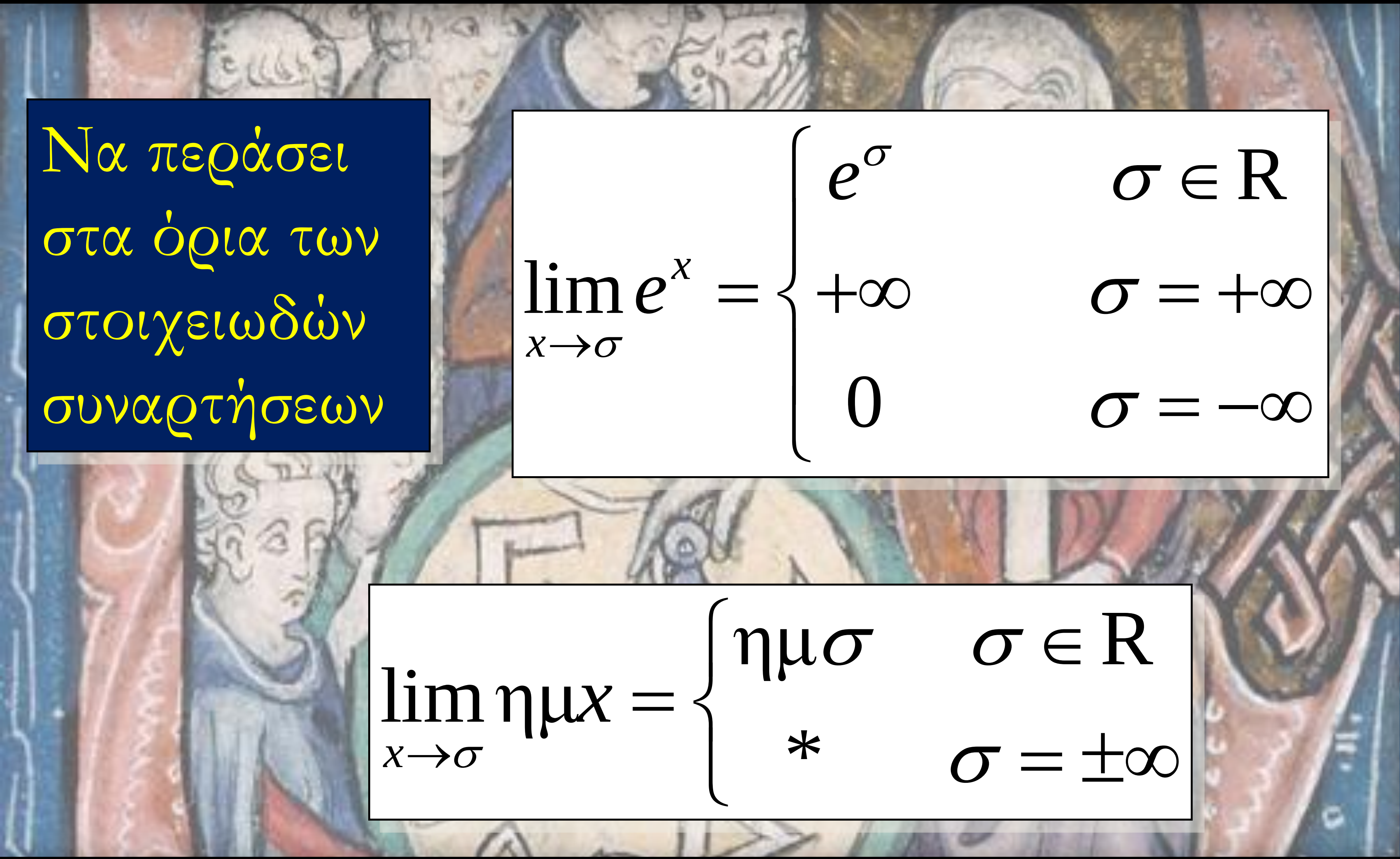
2.2.1 Α′ ΟΜΑΔΑ

415. Στα επόμενα σχήματα απεικονίζεται η γραφική παράσταση μίας συνάρτησης f με πεδίο ορισμού το $\mathbb{R}$. Σε κάθε περίπτωση να συμπληρώσετε τις ισότητες:

$$f(2) = \ldots \qquad \lim_{x\to 2} f(x) = \ldots \qquad f(3) = \ldots \qquad \lim_{x\to 3} f(x) = \ldots$$



γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



Να περάσει στα όρια των στοιχειωδών συναρτήσεων

$$\lim_{x\to\sigma} e^x = \begin{cases} e^\sigma & \sigma \in R \\ +\infty & \sigma = +\infty \\ 0 & \sigma = -\infty \end{cases}$$

$$\lim_{x\to\sigma} \eta\mu x = \begin{cases} \eta\mu\sigma & \sigma \in R \\ * & \sigma = \pm\infty \end{cases}$$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Να συνδεθούν τα όρια με τις πράξεις

$+$	$-\infty$	$\alpha\in\mathbb{R}$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$*$
$\beta\in\mathbb{R}$	$-\infty$	$\alpha+\beta$	$+\infty$
$+\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$

$\times$		$-\infty$	$\alpha\in\mathbb{R}$			$+\infty$
			<0	$=0$	>0	
$-\infty$		$+\infty$	$+\infty$	$*$	$-\infty$	$-\infty$
$\beta\in\mathbb{R}$	<0	$+\infty$	$\alpha\beta$			$-\infty$
	$=0$	$*$				$*$
	>0	$-\infty$				$+\infty$
$+\infty$		$-\infty$	$-\infty$	$*$	$+\infty$	$+\infty$

$$\lim_{x\to\sigma}\left(f(x)\square g(x)\right)=\lim_{x\to\sigma}f(x)\square\lim_{x\to\sigma}g(x)$$

- $f\square g$ ορίζεται κοντά στο σ
- τα όρια του β΄ μέλους υπάρχουν
- η πράξη στο β΄ μέλος επιτρέπεται

$$\lim_{x\to\sigma}\left(f\left(g(x)\right)\right)=\lim_{u\to\lim\limits_{x\to\sigma}g(x)}f(u)$$

- $f\circ g$ ορίζεται κοντά στο σ
- τα όρια του β΄ μέλους υπάρχουν
- $g(x)\neq\lim\limits_{x\to\sigma}g(x)$ κοντά στο σ

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Να γίνει σύνδεση με την διάταξη

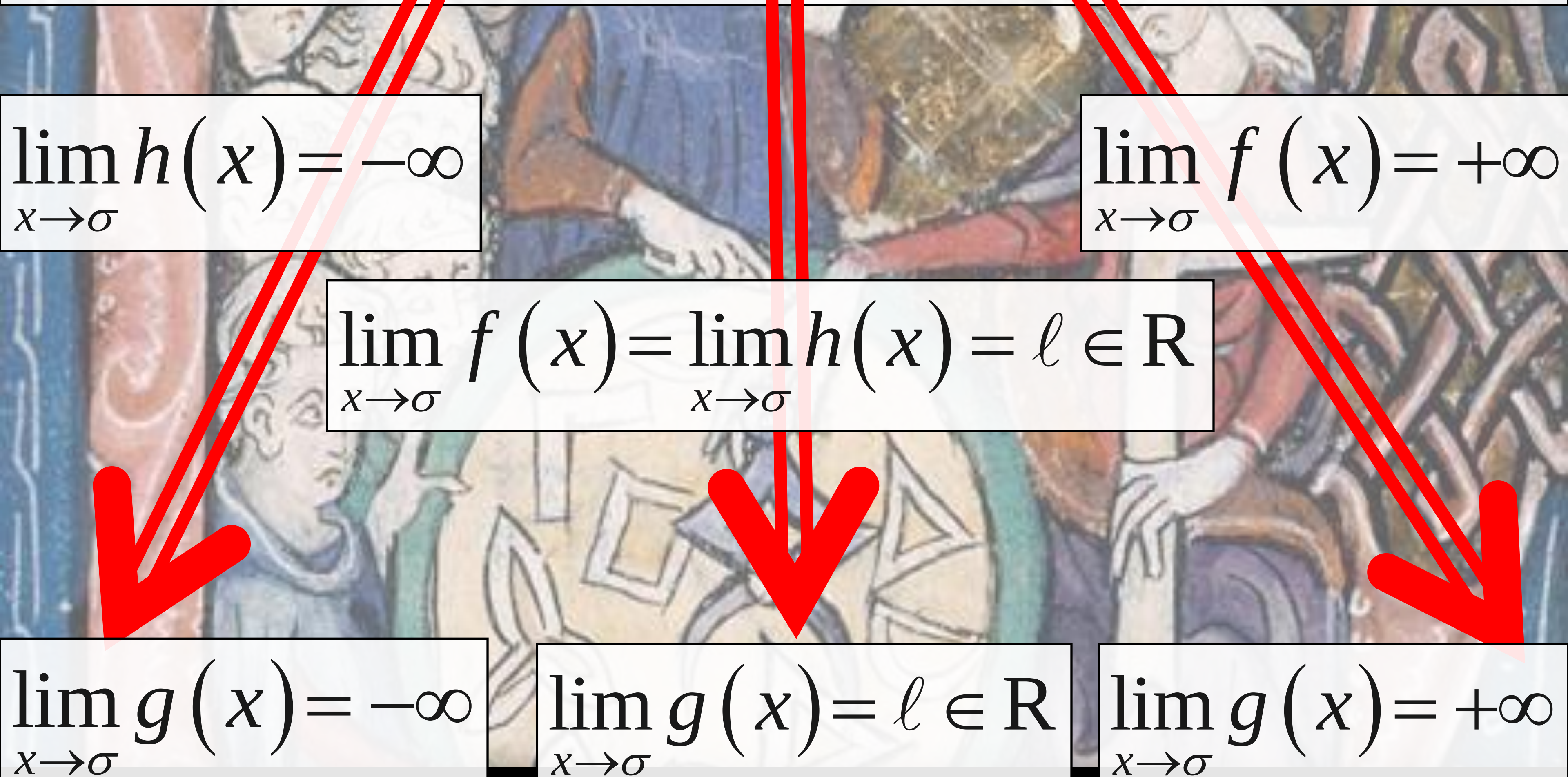
$$f(x)=g(x) \text{ κοντά στο } \sigma \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to\sigma} f(x)=\lim_{x\to\sigma} g(x)$$

$$f(x)\leq g(x) \text{ κοντά στο } \sigma \Rightarrow$$
$$\lim_{x\to\sigma} f(x)\leq \lim_{x\to\sigma} g(x)$$

$$\lim_{x\to\sigma} f(x)\neq 0 \Rightarrow$$
$$f(x), \lim_{x\to\sigma} f(x) \text{ ομόσημα κοντά στο } \sigma$$

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x) \text{ κοντά στο } \sigma$$



$$\lim_{x\to\sigma} h(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\sigma} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x\to\sigma} f(x) = \lim_{x\to\sigma} h(x) = \ell \in \mathrm{R}$$

$$\lim_{x\to\sigma} g(x) = -\infty$$

$$\lim_{x\to\sigma} g(x) = \ell \in \mathrm{R}$$

$$\lim_{x\to\sigma} g(x) = +\infty$$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

Συνεχείς Συναρτήσεις

Τα όρια $\lim_{x \to x_0} f(x)$ βρίσκονται με «αντικατάσταση»

Όταν δεν διακόπτεται το D_f δεν «διακόπτεται» και το C_f

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Μέρος ΙΙ, Η παράγωγος

Πρόβλημα Εφαπτομένης

$$\lambda_{\text{εφαπτομένης}} = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h}$$

+

Πρόβλημα Στιγμιαίας Ταχύτητας

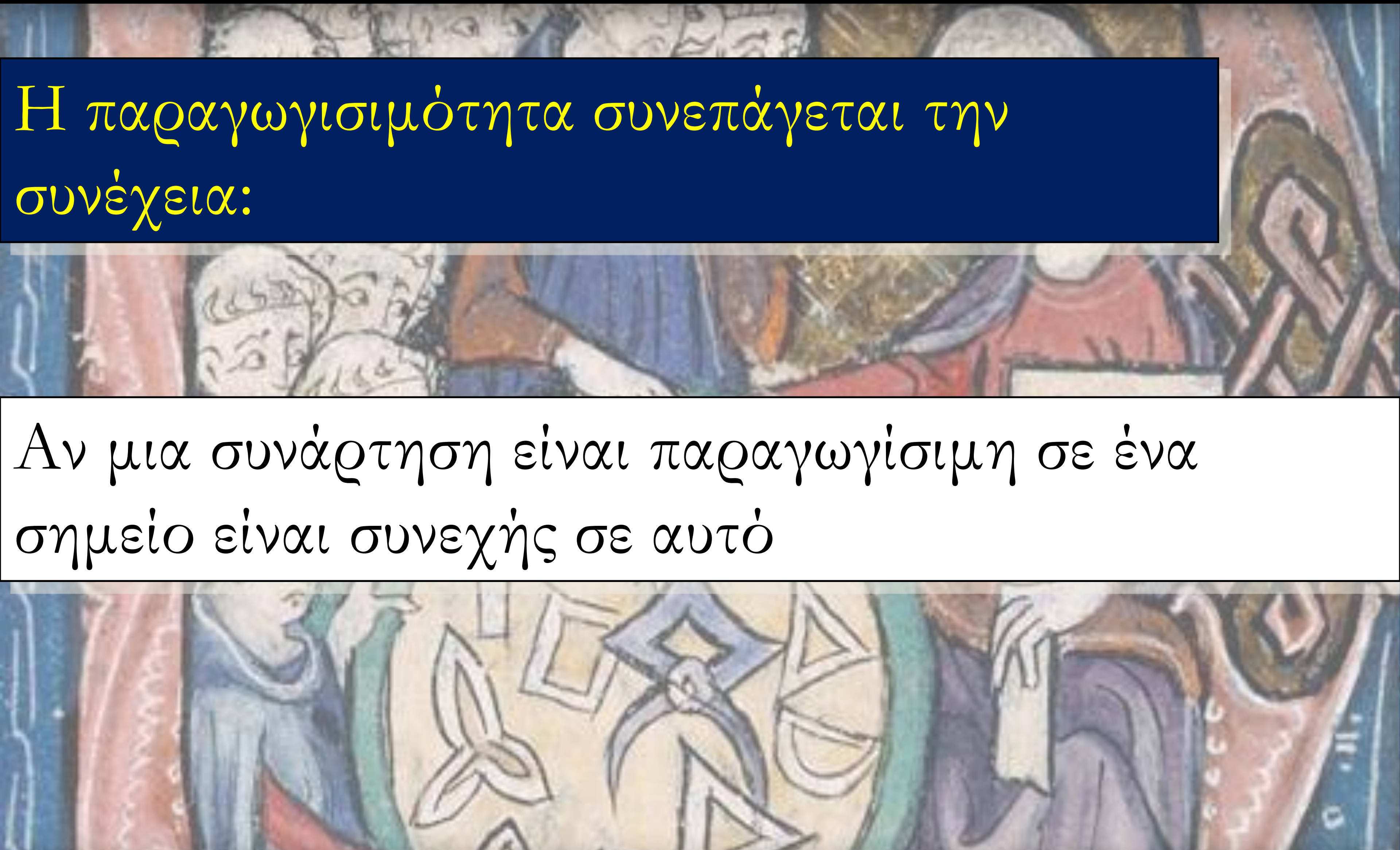
$$\upsilon\left(t_0\right) = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{f\left(t_0+\Delta t\right)-f\left(t_0\right)}{\Delta t}$$

=

Μία «Θεωρία»

$$f'\left(x_0\right) = \lim_{h\to 0}\frac{f\left(x_0+h\right)-f\left(x_0\right)}{h} = \lim_{x\to x_0}\frac{f\left(x\right)-f\left(x_0\right)}{x-x_0}$$

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



Η παραγωγισιμότητα συνεπάγεται την συνέχεια:

Αν μια συνάρτηση είναι παραγωγίσιμη σε ένα σημείο είναι συνεχής σε αυτό

Αλλά και η συνέχεια μπορεί να περιγράψει την παραγωγισιμότητα:

$$f \text{ παραγωγίσιμη στο } x_0 \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \text{υπάρχει } \alpha \text{ τέτοιο ώστε} \\ \text{η συνάρτηση} \\ f(x) = \begin{cases} \lambda_f(x, x_0) & x \neq x_0 \\ \alpha & x = x_0 \end{cases} \\ \text{να είναι συνεχής στο } x_0 \end{array} \right\}$$

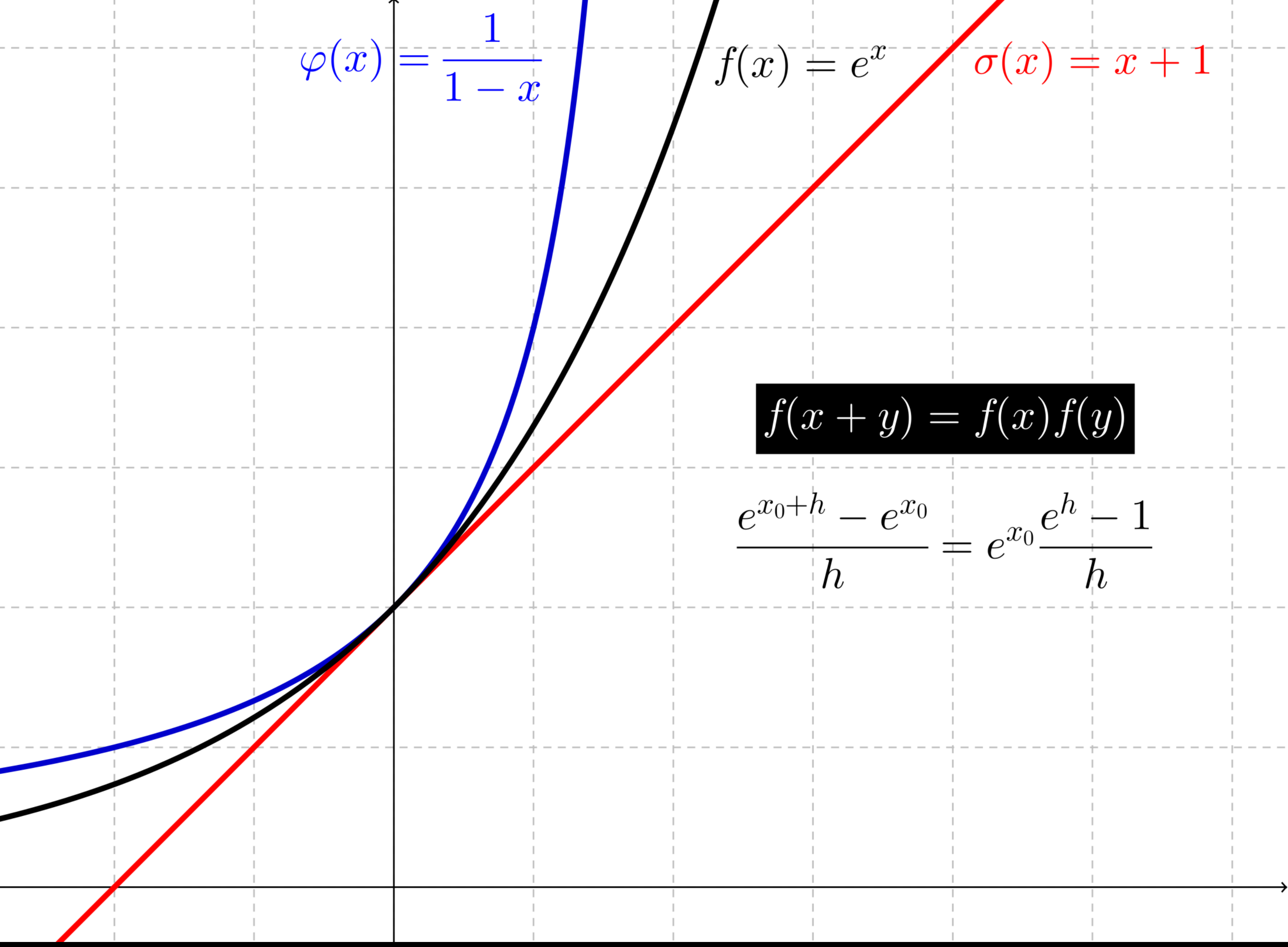
Η *«παρατήρηση του Καραθεοδωρή»* ή αλλιώς ο ορισμός της παραγώγου κατά Καραθεοδωρή.

f παραγωγίσιμη στο $x_0 \Leftrightarrow$

υπάρχει συνάρτηση $\hat{f}$ συνεχής στο x_0 τέτοια ώστε

$$f(x) = f(x_0) + \hat{f}(x)(x - x_0)$$

$$\boxed{\text{Σε αυτή την περίπτωση } \hat{f}(x_0) = f'(x_0)}$$



$\varphi(x) = \frac{1}{1-x}$
$f(x) = e^x$
$\sigma(x) = x + 1$
$f(x+y) = f(x)f(y)$
$\frac{e^{x_0+h} - e^{x_0}}{h} = e^{x_0}\frac{e^h - 1}{h}$

5) Αποδεικνύοντας τους τύπους για τις παραγώγους των

$$cf,\ f+g,\ f\cdot g,\ \frac{1}{g},\ \frac{f}{g}$$

6) Αποδεικνύοντας τον τύπο για την παράγωγο της $g\circ f$:

$$(g\circ f\ )'(x_0)=\lim_{x\to x_0}\frac{g\big(f(x)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\frac{g\big(f(x_0)\big)+\hat{g}\big(f(x)\big)\big(f(x)-f(x_0)\big)-g\big(f(x_0)\big)}{x-x_0}=$$

$$\lim_{x\to x_0}\hat{g}\big(f(x)\big)\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}=$$

$$g'\big(f(x_0)\big)f'(x_0)$$

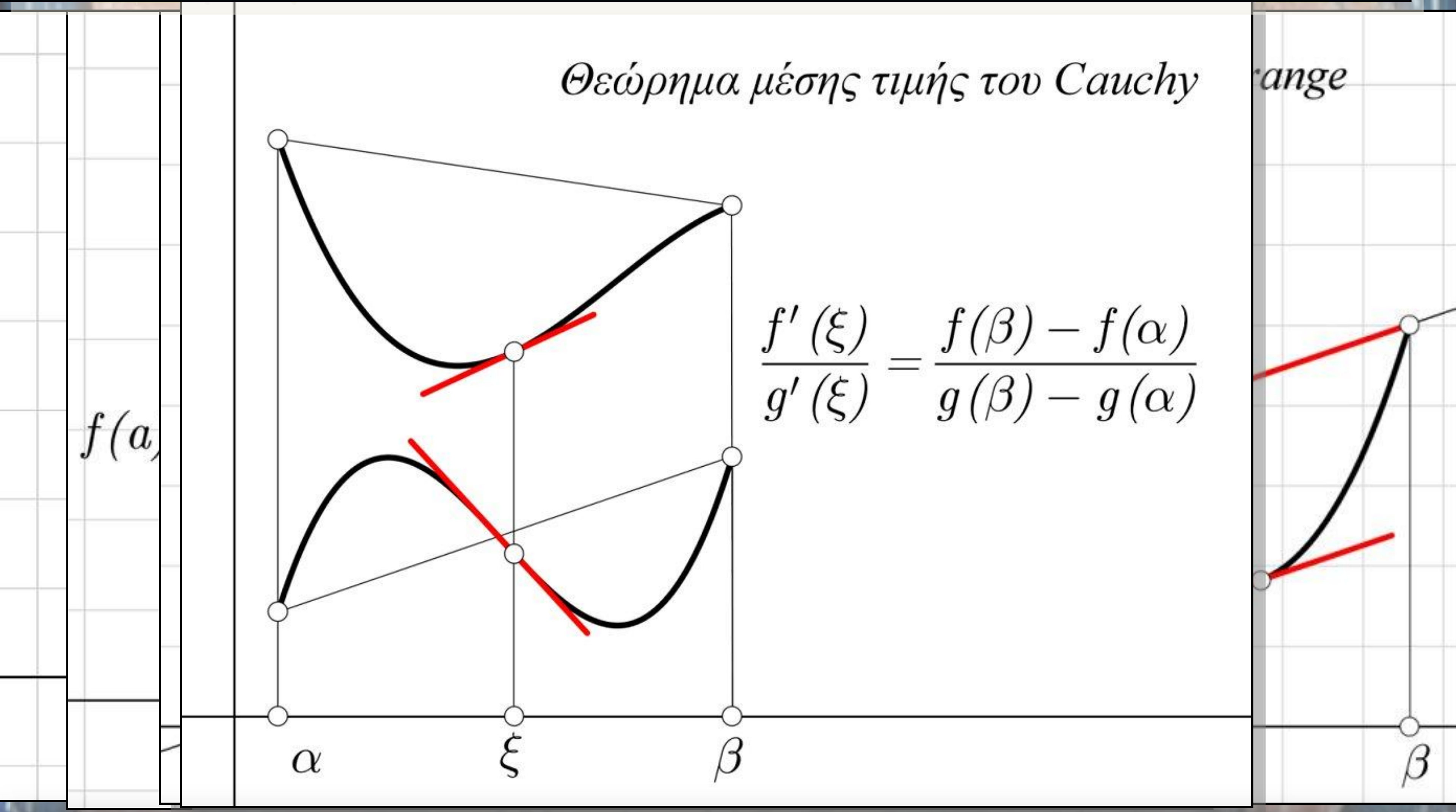
γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

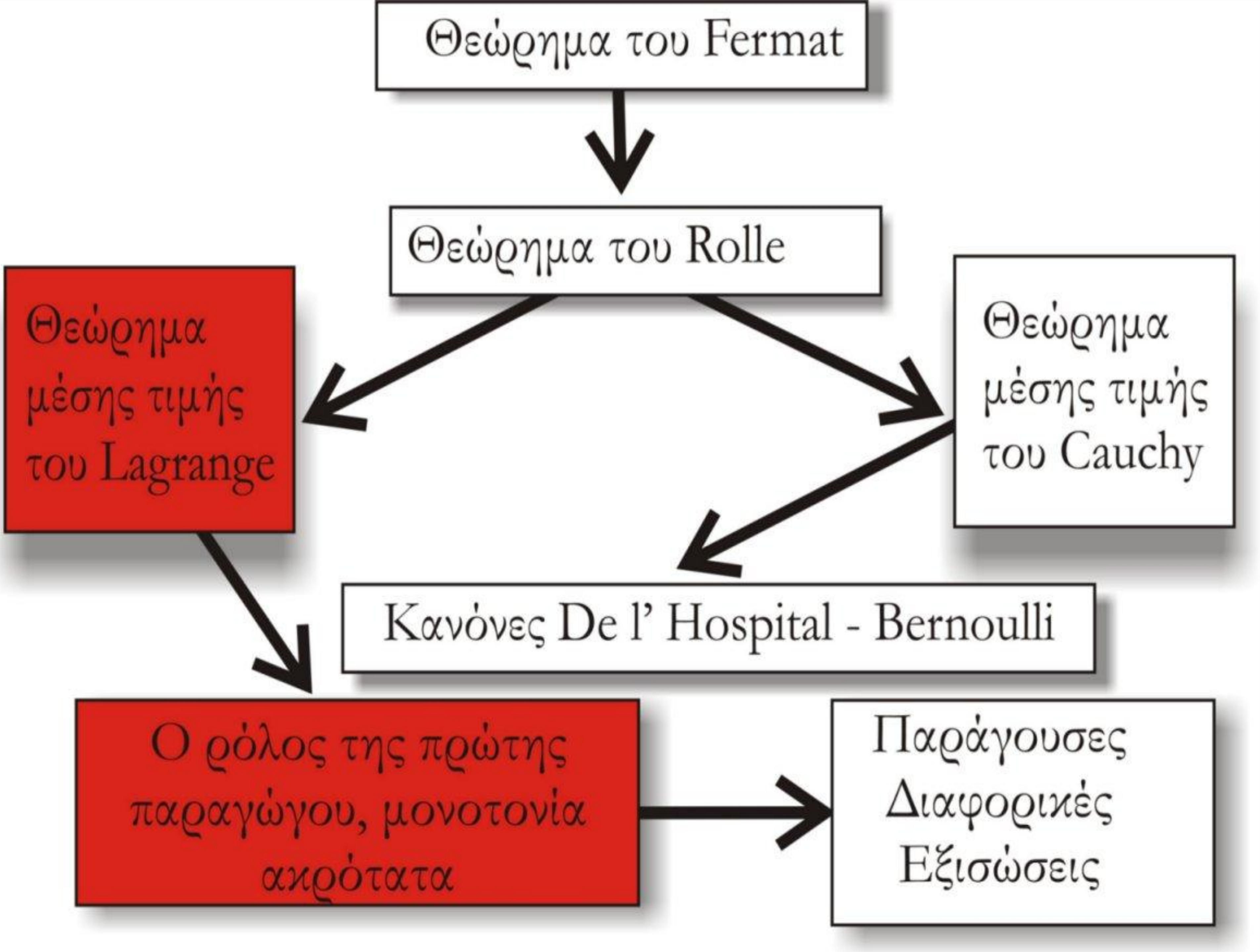
7) Υπολογίζοντας τις παραγώγους των

α^{x}, x^{α} $\sigma\upsilon\nu x$, $\varepsilon\varphi x$, $\log_{\alpha} x$

Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD , Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

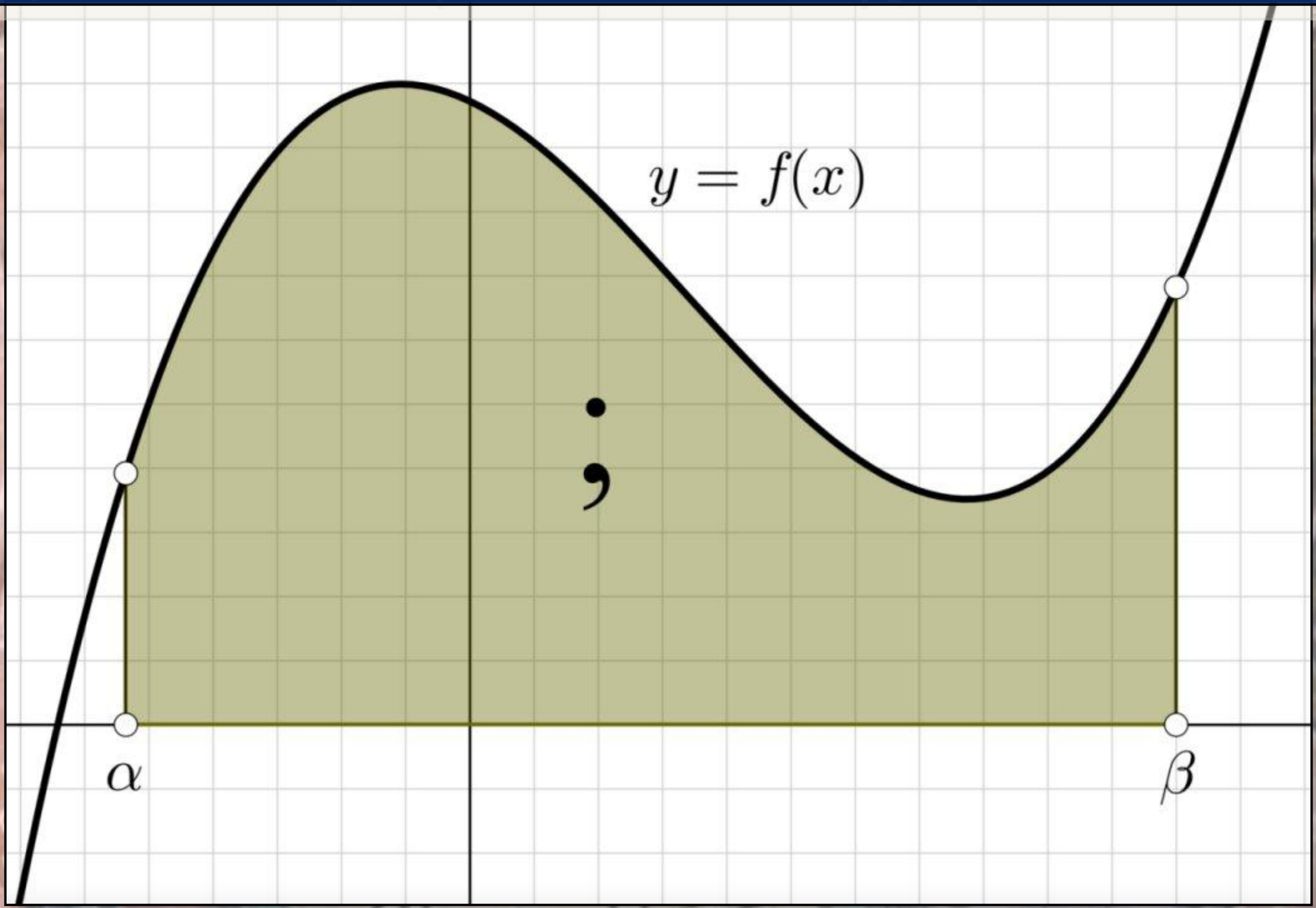
Μέρος ΙΙΙ, Τα βασικά θεωρήματα των παραγώγων



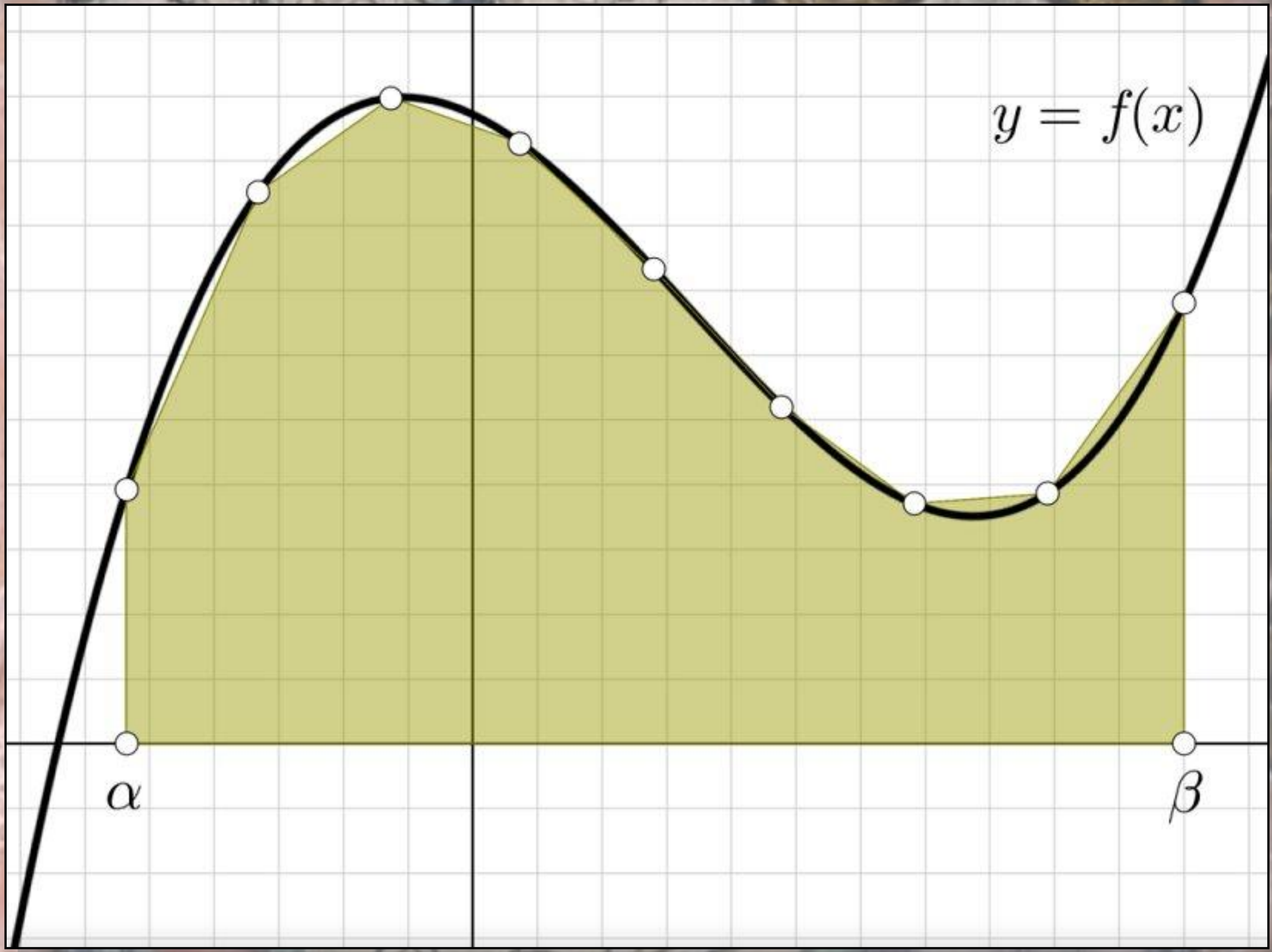

Θεώρημα του Fermat
Θεώρημα του Rolle
Θεώρημα μέσης τιμής του Lagrange
Θεώρημα μέσης τιμής του Cauchy
Κανόνες De l’ Hospital - Bernoulli
Ο ρόλος της πρώτης παραγώγου, μονοτονία ακρότατα
Παράγουσες Διαφορικές Εξισώσεις

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

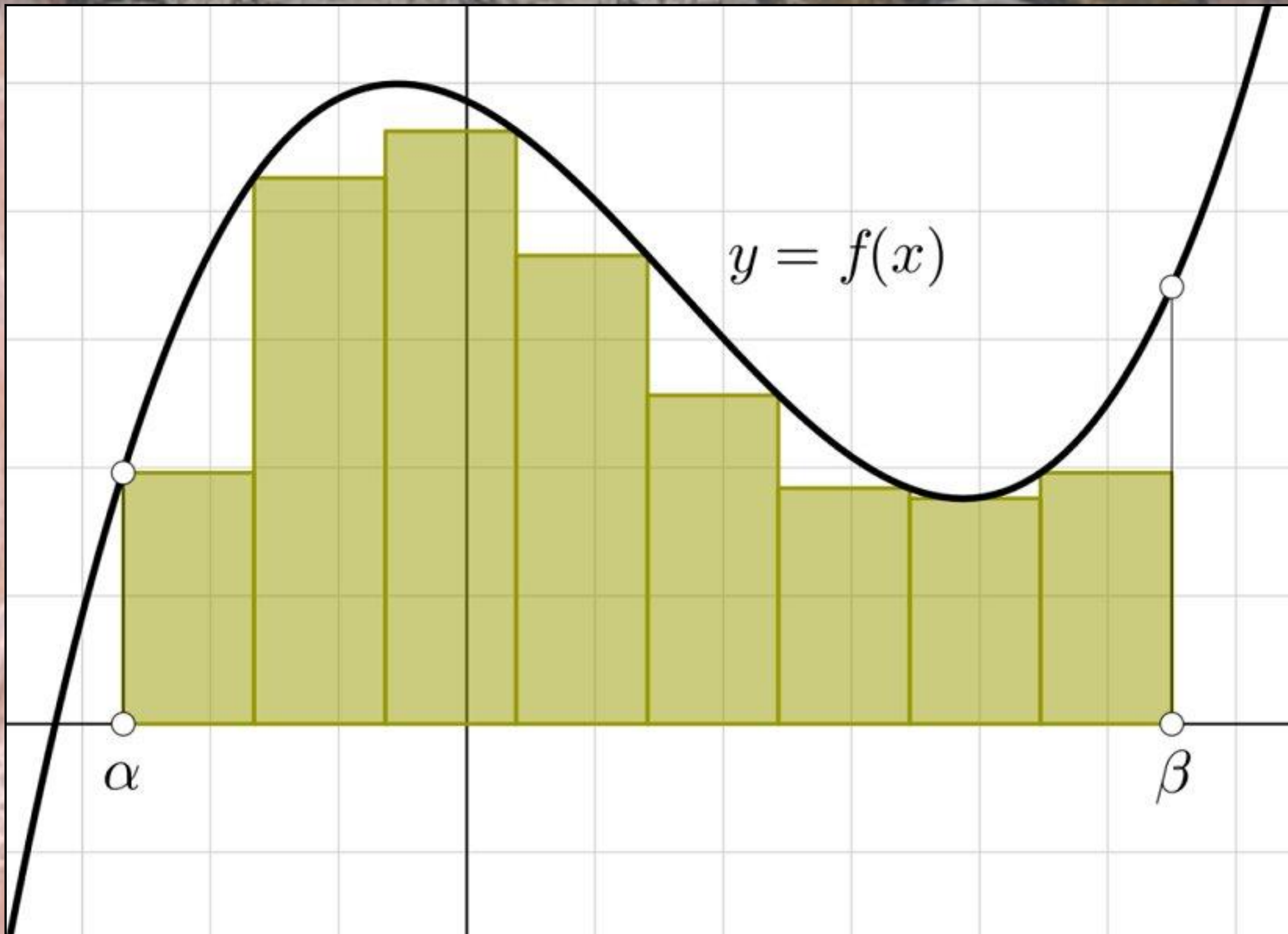
Μέρος IV, Το ορισμένο ολοκλήρωμα



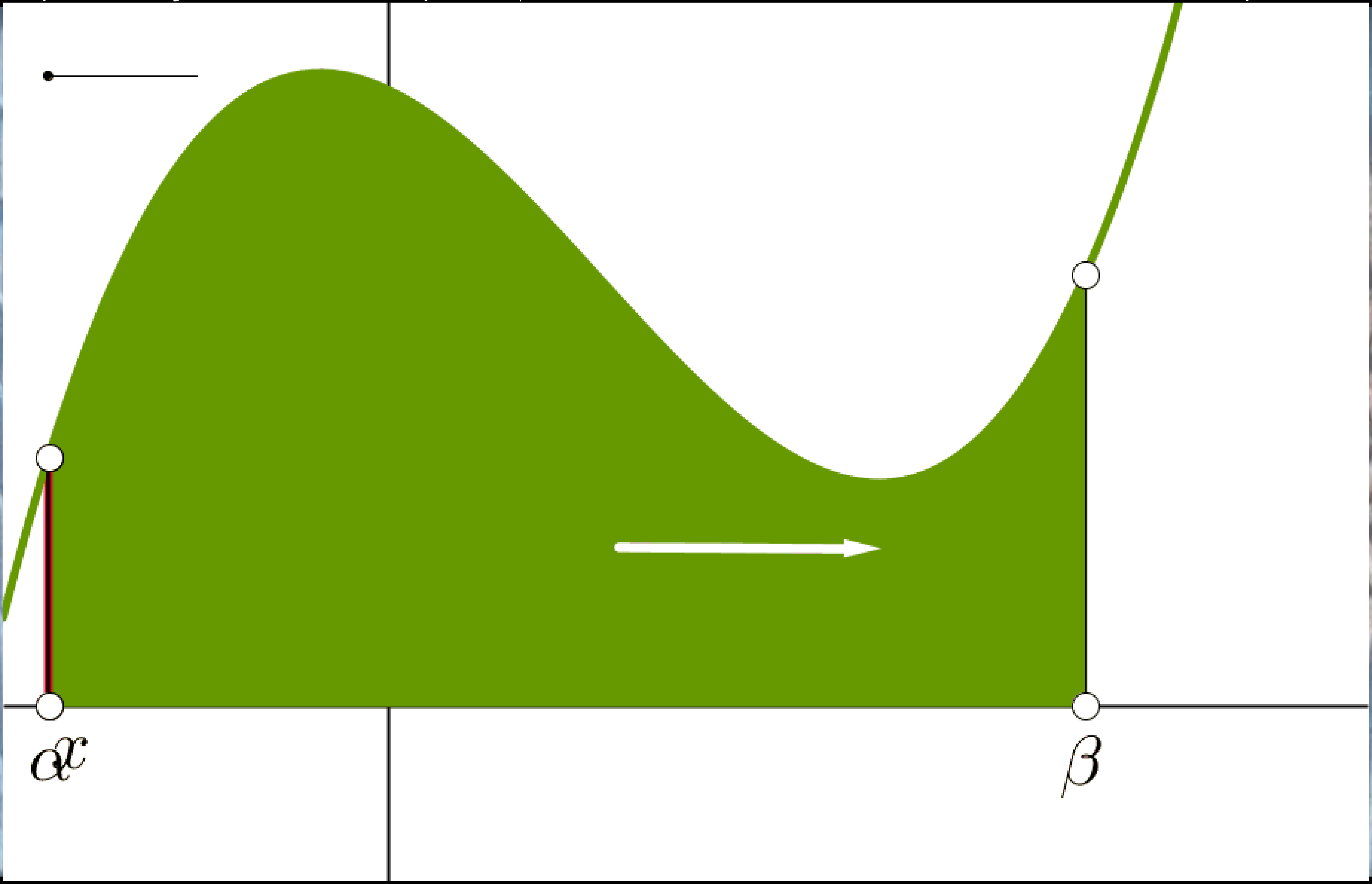
γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

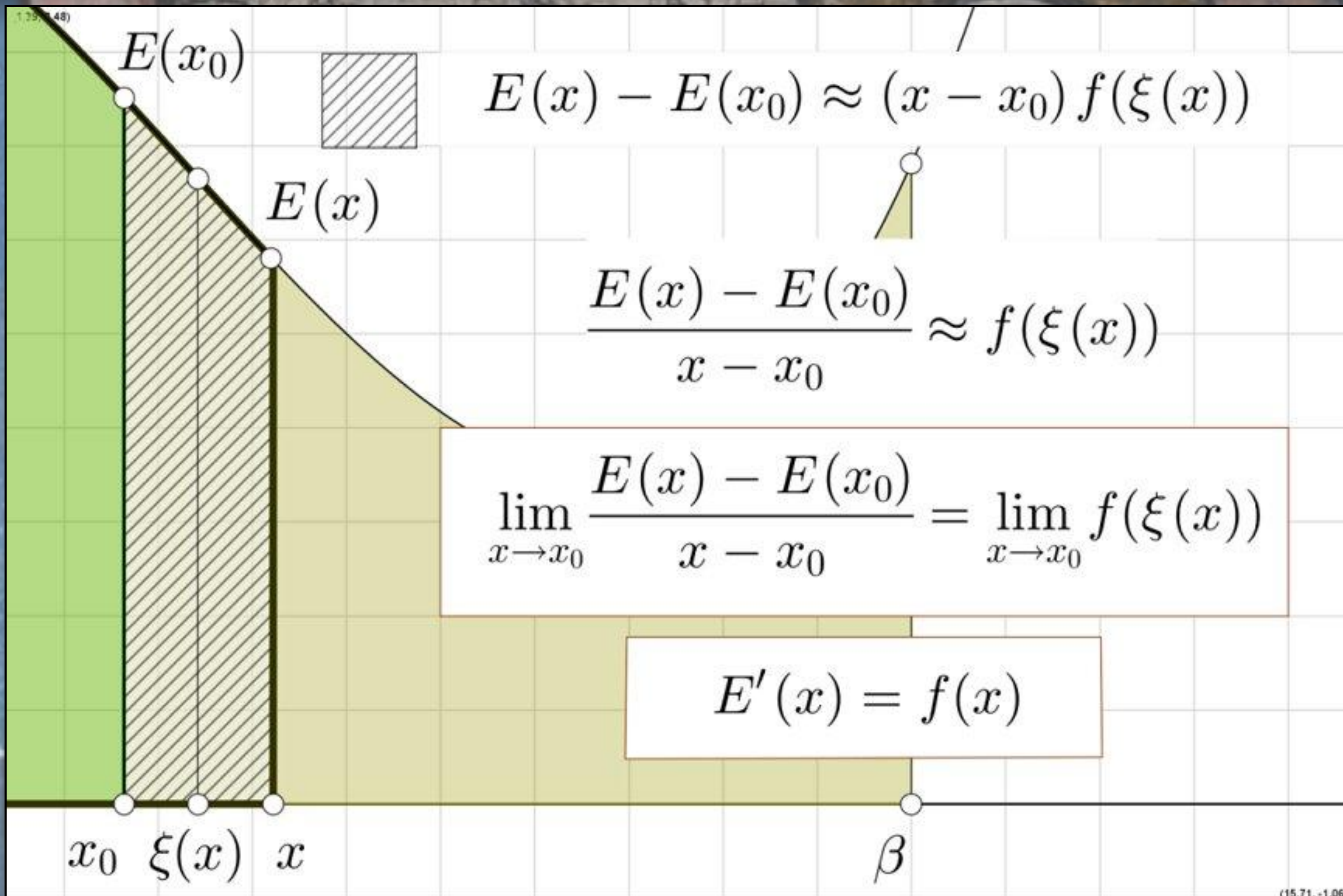


γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



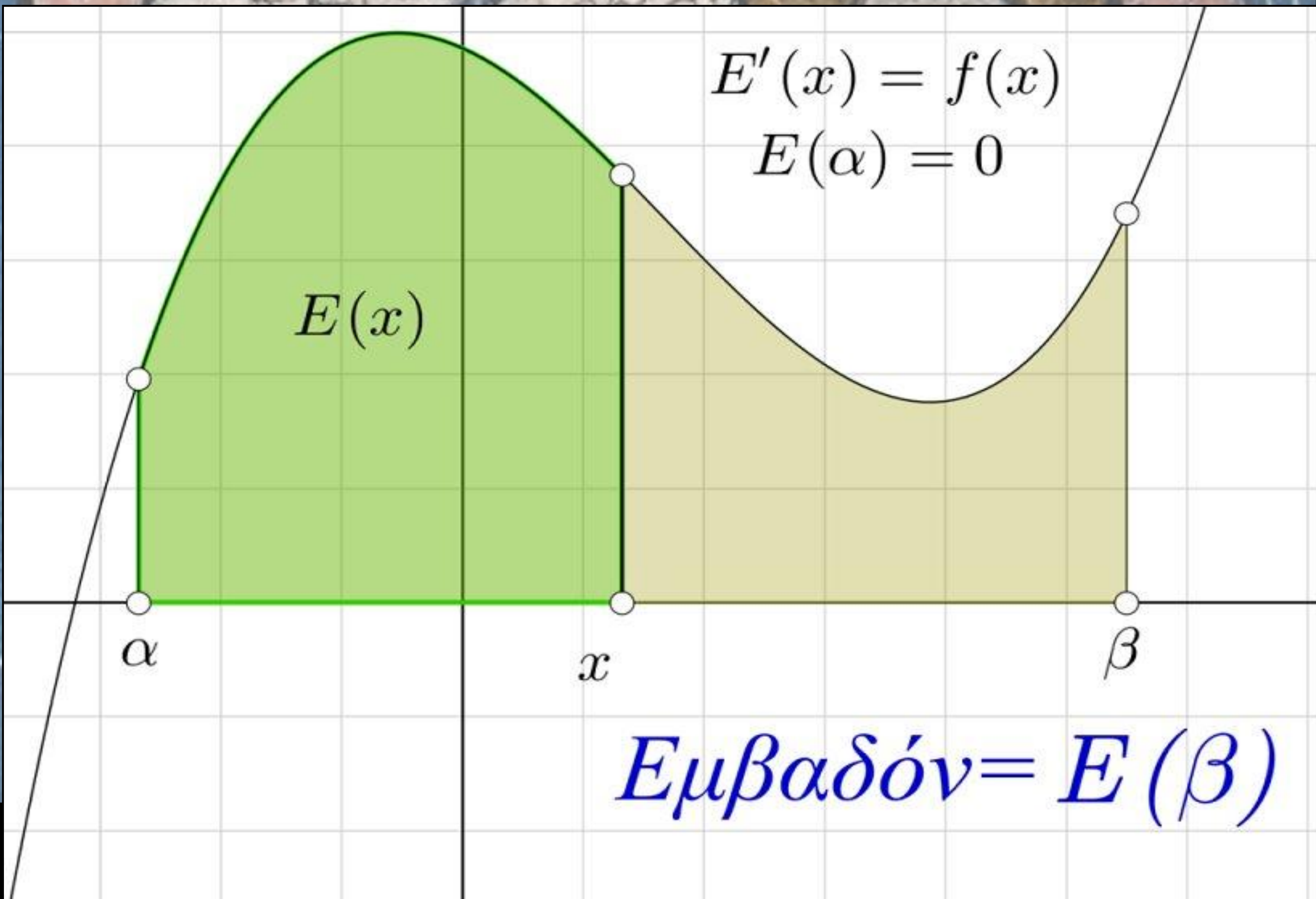
Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD , Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον



γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

1. Αν F, G είναι δύο παράγουσες της f στο Δ τότε για κάθε α, β ισχύει

$$\boxed{F(\beta) - F(\alpha) = G(\beta) - G(\alpha)}$$

2. **Ορίζουμε**

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = F(\beta) - F(\alpha)}$$

όπου F μία οποιαδήποτε παράγουσα της f.

3. $\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(u)\,du}$

4. $\boxed{\int_{\alpha}^{\alpha} f(x)\,dx = 0}$

5. $\boxed{\int_{\beta}^{\alpha} f(x)\,dx = -\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}$

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

6. $\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\beta}^{\gamma} f(x)\,dx = \int_{\alpha}^{\gamma} f(x)\,dx}$

7. $\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} (f(x) + g(x))\,dx = \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx}$

8. $\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} cf(x)\,dx = c\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx}$

9. $\boxed{\left(\int_{\alpha}^{x} f(t)\,dt\right)' = f(x)}$

10. Αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$ τότε

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \geq 0}$$

11. Αν $f(x) \geq 0$ στο $[\alpha, \beta]$ και έστω για ένα x στο $[\alpha, \beta]$ είναι

$$\boxed{f(x) \neq 0 \text{ τότε } \int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx > 0}$$

12. Αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ και τότε

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx \leq \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx}$$

13. Αν $f(x) \leq g(x)$ στο $[\alpha, \beta]$ και και έστω για ένα x στο $[\alpha, \beta]$ είναι $f(x) \neq g(x)$ τότε

$$\boxed{\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx < \int_{\alpha}^{\beta} g(x)\,dx}$$

14. Αν $\alpha < \beta$ τότε

$$\boxed{\left|\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx\right| \leq \int_{\alpha}^{\beta} |f(x)|\,dx}$$

15. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,g'(x)\,dx = [f(x)\,g(x)]_{\alpha}^{\beta} - \int_{\alpha}^{\beta} f'(x)\,g(x)\,dx$

16. $\int_{\alpha}^{\beta} f(g(x))\,g'(x)\,dx = \int_{g(\alpha)}^{g(\beta)} f(u)\,du$

17. $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)\,dx = f(\xi)(\beta - \alpha)$, $\xi \in (\alpha, \beta)$

γινομένων γὰρ πάντων κατὰ τὸν λόγον

Σας
Ευχαριστώ

Ν.Σ. Μαυρογιάννης MSc, PhD
Πρότυπο Πειραματικό Γενικό Λύκειο Ευαγγελικής Σχολής Σμύρνης