“ΜΕΤΑ ΤΗ ΛΥΣΗ, ΤΙ;”

ΓΕΩΡΓΙΟΣ ΤΣΑΠΑΚΙΔΗΣ

Συνήθως, μετά τη λύση ενός Μαθηματικού προβλήματος στην τάξη, ο διδάσκων συνεχίζει με τη λύση και άλλων προβλημάτων λίγο – πολύ παρόμοιων με το προηγούμενο. Όπως, όμως δείχνει η εμπειρία, η διδασκαλία τετριμμένων ομοιόμορφων προβλημάτων δεν οδηγεί σε Μαθηματική γνώση.
Έτσι αντί να προτείνουμε προς λύση ενός παρόμοιου προς το προηγούμενο πρόβλημα θα ήταν απείρως χρησιμότερο να προσπαθήσουμε να απαντήσουμε μαζί με τους μαθητές ερωτήματα, όπως τα:

- Μπορούμε να βρούμε και άλλες λύσεις του προβλήματος; Μπορούμε να λύσουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας διαφορετικούς κλάδους των Μαθηματικών;
- Ποια είναι τα αντίστροφα του θεωρήματος; Ποια από αυτά αληθεύουν;
- Αν μεταβάλλουμε τις υποθέσεις του προβλήματος πως μεταβάλλεται το συμπέρασμα;
- Συσχετίζεται το πρόβλημα μας με άλλα που έχουμε μελετήσει;
- Γενικεύεται το πρόβλημα; Ποια άλλα προβλήματα λύνει η γενίκευση;
- Έχει μηχανικό ανάλογο το πρόβλημα;
- Έχει εφαρμογή στην επιστήμη, την τεχνολογία ή τη ζωή το πρόβλημα μας;

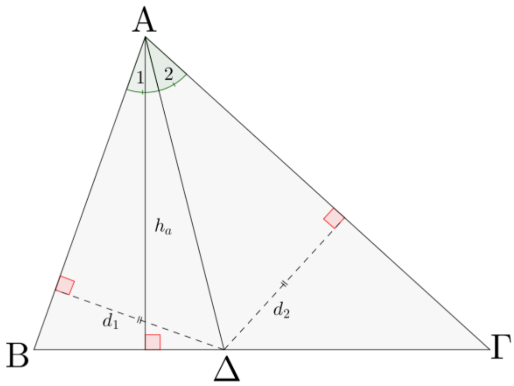
Εφαρμόζουμε τα προηγούμενα στο Θεώρημα των Διχοτόμων.

Μετά από την διατύπωση και την παράθεση της απόδειξης του Θεωρήματος των Διχοτόμων που περιέχεται στο σχολικό βιβλίο, θέτουμε το πρώτο ερώτημα:

“*Μήπως μπορούμε να βρούμε και άλλες αποδείξεις του θεωρήματος;*”

- “*Στη προηγούμενη απόδειξη χρησιμοποιήσαμε όλες τις ιδιότητες της διχοτόμου; Ποια είναι η βασική ιδιότητα των σημείων της διχοτόμου;*”

Η απάντηση στο ερώτημα αυτό δίνει την απόδειξη:



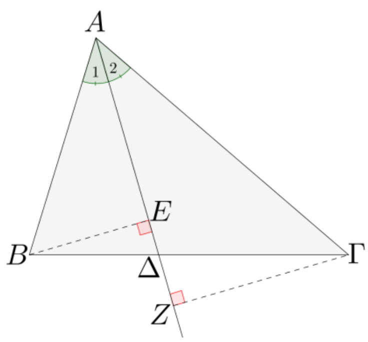
Αν d_1, d_2 είναι οι αποστάσεις του ίχνους Δ της διχοτόμου ΑΔ από τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ, θα είναι $d_1 = d_2$, οπότε:

$$\frac{E_{ΑΒΔ}}{E_{ΑΓΔ}} = \frac{\frac{1}{2}ΑΒ \cdot d_1}{\frac{1}{2}ΑΓ \cdot d_2} \quad (1)$$

$$\frac{E_{ΑΒΔ}}{E_{ΑΓΔ}} = \frac{\frac{1}{2}ΑΒ \cdot h_a}{\frac{1}{2}ΑΓ \cdot h_a} \quad (2)$$

Από τις σχέσεις (1) και (2) συνεπάγεται ότι: $\frac{ΑΒ}{ΒΓ} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ}$.

- “*Ποιο είναι το συμπέρασμα; Τι θέλουμε να δείξουμε; Μια αναλογία. Που υπάρχουν αναλογίες; Στα όμοια τρίγωνα.*”

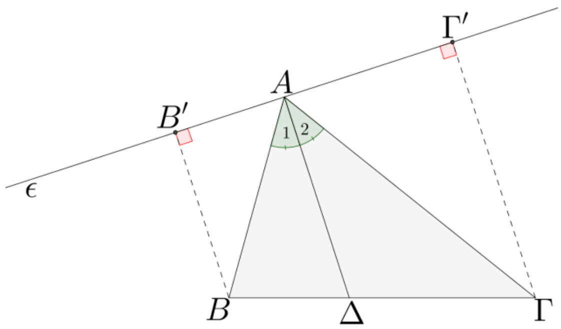


Αν $ΒΕ \perp ΑΔ$ και $ΓΖ \perp ΑΔ$, τότε τα τρίγωνα ΑΒΕ και ΑΓΖ είναι όμοια, οπότε:

$$\frac{ΑΒ}{ΑΓ} = \frac{ΒΕ}{ΓΖ} = \frac{ΒΔ}{ΔΓ}$$

Η τελευταία ισότητα ισχύει από την ομοιότητα των τριγώνων ΒΕΔ και ΓΖΔ.

- “*Μήπως μπορούμε να εφαρμόσουμε τη μέθοδο των σκιών (προβολών);*

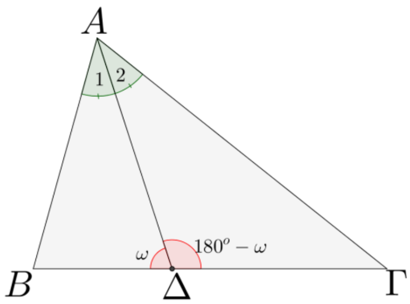


Φέρνουμε την ευθεία $\varepsilon \perp A\Delta$ στο Α και τις προβολές Β΄ και Γ΄ των Β και Γ αντίστοιχα στην ε. Τα ορθογώνια τρίγωνα ΑΒΒ΄ και ΑΓΓ΄ είναι όμοια οπότε:

$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{AB'}{A\Gamma'} = \frac{B\Delta}{\Gamma\Delta}$$

Η τελευταία ισότητα προκύπτει από το θεώρημα του Θαλή.

- “*Ποιο είναι το κυρίαρχο χαρακτηριστικό της υπόθεσης του θεωρήματος; Οι ίσες γωνίες στο Α και οι παραπληρωματικές γωνίες στο σημείο Δ. Ποιος κλάδος των Μαθηματικών ασχολείται με τη μέτρηση των γωνιών; Η Τριγωνομετρία. Τι θέλουμε να κάνουμε; Από την ισότητα των γωνιών να πάρουμε μια αναλογία πλευρών. Οπότε θα χρησιμοποιήσουμε το Θεώρημα των Ημιτόνων.*”



Από το Θεώρημα των Ημιτόνων στο τρίγωνο ΑΒΔ, προκύπτει:

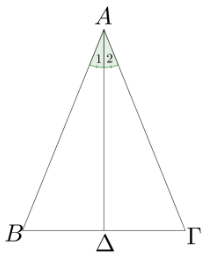
$$\frac{AB}{\eta\mu\omega} = \frac{B\Delta}{\eta\mu A_1} \ (1)$$

και από το τρίγωνο ΑΓΔ, προκύπτει:

$$\frac{A\Gamma}{\eta\mu\,(180^o - \omega)} = \frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\,A_2} \Leftrightarrow \frac{A\Gamma}{\eta\mu\omega} = \frac{\Delta\Gamma}{\eta\mu\,A_2} \ (2).$$

Από τις σχέσεις (1) και (2), παίρνουμε την επιθυμητή ισότητα: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}$.

- “*Υπάρχουν ειδικές περιπτώσεις του θεωρήματος;*”



Στο ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ έχουμε: $\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma} = \frac{AB}{A\Gamma} = 1$, έτσι ΒΔ=ΔΓ, άρα η διχοτόμος που άγεται από την κορυφή του τριγώνου προς την βάση του είναι και διάμεσος.

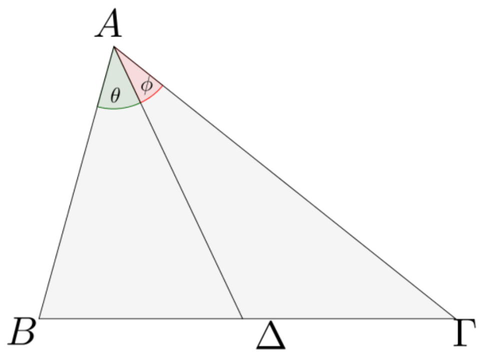
- “*Ποιο είναι το αντίστροφο του θεωρήματος;*”

Αν σημείο Δ της πλευράς ΒΓ του τριγώνου ΑΒΓ χωρίζει τη ΒΓ σε μέρη ανάλογα των προσκείμενων σε αυτή πλευρών, τότε η ΑΔ είναι διχοτόμος.

“*Ισχύει το αντίστροφο;*” Ναι, όπως είναι εύκολο να αποδειχθεί με εις άτοπον απαγωγή.

- “*Γενικεύεται το θεώρημα;*”

Στο θεώρημα κεντρικό ρόλο παίζει η διχοτόμος ΑΔ, που σχηματίζει ίσες γωνίες με τις πλευρές ΑΒ και ΑΓ. Μια ενδεχόμενη γενίκευση του θεωρήματος θα ήταν η συσχέτιση των γωνιών θ, φ με τις πλευρές ΑΒ, ΑΓ και τα τμήματα ΒΔ, ΔΓ. Όπως εύκολα βλέπουμε από το θεώρημα των ημιτόνων ισχύει:



$$\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{B\Delta \cdot \eta\mu\phi}{\Delta\Gamma \cdot \eta\mu\theta}$$

Η σχέση αυτή αποτελεί γενίκευση του θεωρήματος της διχοτόμου γιατί από αυτή προκύπτει το θεώρημα των διχοτόμων για θ=φ.

- “*Λύνει άλλα προβλήματα η γενίκευση;*”

Πάρα πολλά. Χαρακτηριστική περίπτωση είναι το Θεώρημα του Ceva:

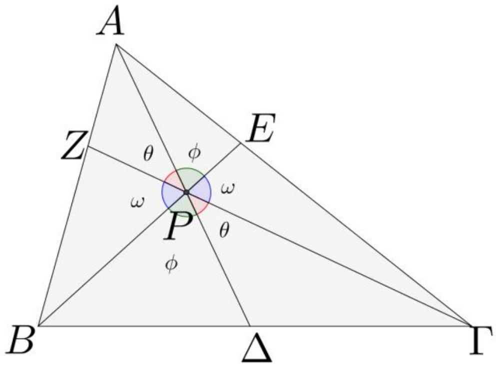
“Αν Δ, Ε, Ζ είναι σημεία των πλευρών ΒΓ, ΓΑ και ΑΒ αντίστοιχα του τριγώνου ΑΒΓ και οι ΑΔ, ΒΖ και ΓΕ περνάνε από το ίδιο σημείο, τότε ισχύει

$$\frac{AZ}{ZB}\cdot\frac{B\Delta}{\Delta\Gamma}\cdot\frac{\Gamma E}{EA}=1\text{”}$$

Απόδειξη

Στο τρίγωνο ΡΑΒ, από τη γενίκευση του θεωρήματος των διχοτόμων, ισχύει:

$$\frac{PA}{PB}=\frac{AZ\cdot\eta\mu\omega}{ZB\cdot\eta\mu\theta}\ (1)$$



Αντίστοιχα στο τρίγωνο ΡΒΓ, ισχύει:

$$\frac{PB}{P\Gamma}=\frac{B\Delta\cdot\eta\mu\theta}{\Delta\Gamma\cdot\eta\mu\phi}\ (2)$$

και τέλος, στο τρίγωνο ΡΓΑ, ισχύει:

$$\frac{P\Gamma}{PA}=\frac{\Gamma E\cdot\eta\mu\phi}{EA\cdot\eta\mu\omega}\ (3)$$

Από τον πολλαπλασιασμό κατά μέλη των σχέσεων (1), (2) και (3) προκύπτει το ζητούμενο.

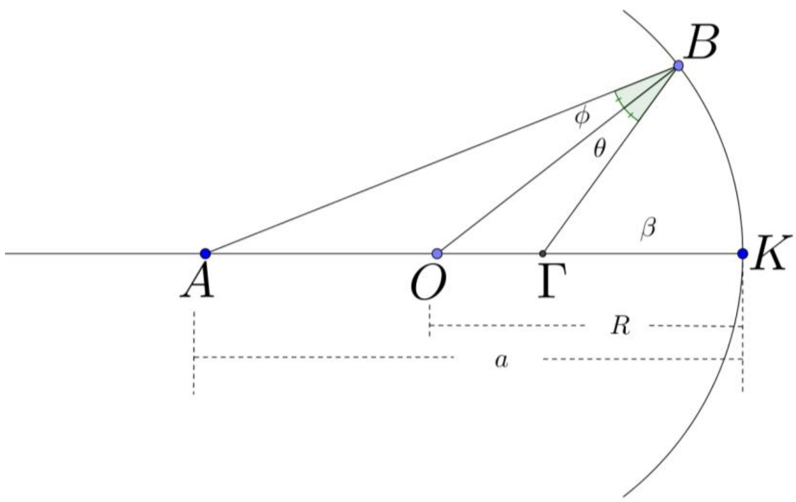
- “*Έχει εφαρμογή το θεώρημα στην επιστήμη και την τεχνολογία;Ναι, στην περίπτωση του κοίλου κατόπτρου.* ”

  Έστω σφαιρικό κοίλο κάτοπτρο μικρού ανοίγματος, κέντρου Ο και κορυφής Κ. Σε σημείο Α του άξονά του υπάρχει μια σημειακή πηγή φωτός της οποίας μια φωτεινή ακτίνα κατευθύνεται στο σημείο Β του κατόπτρου και ανακλάται στο σημείο Γ του άξονα του κατόπτρου. Αν R είναι η ακτίνα του κατόπτρου, α η απόσταση της φωτεινής πηγής από την κορυφή Κ και β η απόσταση του Γ από την κορυφή Κ, με ποια σχέση συνδέονται τα α, β, R;

  Από το νόμο της ανάκλασης οι γωνίες φ και θ του σχήματος είναι ίσες και έτσι η ΒΟ είναι η διχοτόμος της γωνίας ΑΒΓ, άρα θα ισχύει:

$$\frac{AB}{B\Gamma}=\frac{AO}{O\Gamma}\Leftrightarrow\frac{AK}{\Gamma K}=\frac{AO}{O\Gamma}$$

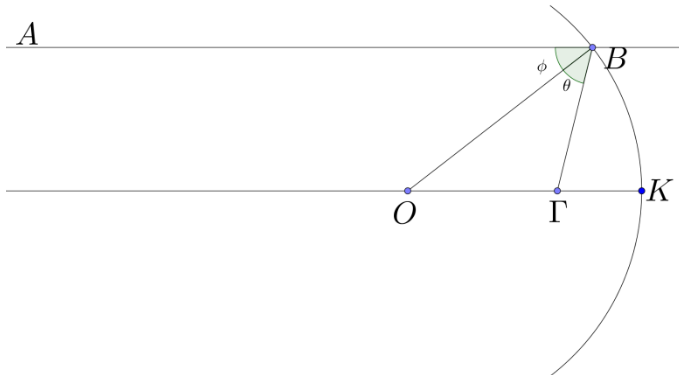
(λόγω του μικρού ανοίγματος του κατόπτρου είναι $AB\simeq AK$και $B\Gamma\simeq\Gamma K$)



$$\Leftrightarrow \frac{a}{\beta} = \frac{a - R}{R - \beta} \Leftrightarrow aR - a\beta = a\beta - \beta R = aR + \beta R = 2a\beta \Leftrightarrow \frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{R}$$

Στην εφαρμογή αυτή μπορούμε να θέσουμε μερικά επιπρόσθετα ερωτήματα, όπως:

- Αν η σημειακή πηγή τοποθετηθεί στο Ο θα πρέπει το Γ να ταυτιστεί με το Ο. Προκύπτει αυτό από το νόμο $\frac{1}{a} + \frac{1}{\beta} = \frac{1}{R}$; Πράγματι, αν $A \equiv O$, τότε α=R και ο νόμος δίνει $\frac{1}{\beta} = \frac{1}{R} \Leftrightarrow \beta = R$ άρα $\Gamma \equiv O$.
- Αν η φωτεινή πηγή βρίσκεται σε πάρα πολύ μεγάλη απόσταση από το κάτοπτρο τότε η φωτεινή ακτίνα ΑΒ γίνεται παράλληλη προς τον άξονα ΟΚ και ο νόμος γίνεται $\frac{1}{\beta} = \frac{2}{R}$ (αφού $a \to +\infty$, οπότε $\frac{1}{a} \to 0$) $\Leftrightarrow \beta = \frac{R}{2}$. Είναι αυτό φυσιολογικό;



Ναι, γιατί τότε έχουμε $O\Gamma = \frac{R}{2} \simeq \Gamma B \Rightarrow τρίγωνο\ \Gamma OB\ ισοσκελές \Rightarrow B\widehat{O}\Gamma = \theta$ αλλά $\phi = B\widehat{O}\Gamma$ (εντός εναλλάξ) = θ δηλαδή ισχύει ο νόμος της ανάκλασης του φωτός.

Για εργασία κατ' οίκον μπορούμε να ζητήσουμε από τους μαθητές να ψάξουν και άλλες αποδείξεις ή γενικεύσεις στο διαδίκτυο ή στη βιβλιογραφία, να βρουν και άλλες ειδικές περιπτώσεις, να εξετάσουν οριακές ή εκφυλισμένες περιπτώσεις, να δώσουν σχηματικές αναπαραστάσεις των αποδείξεων του θεωρήματος, να βρουν διάφορα προβλήματα ως εφαρμογές του θεωρήματος.

Με ανάλογο τρόπο, μπορούν να απαντηθούν τα αρχικά ερωτήματα της εισήγησης και σε άλλα θεωρήματα σε όλους τους κλάδους των Μαθηματικών.

Η διδασκαλία των Μαθηματικών με αυτή την οπτική γωνία, διδάσκει τους μαθητές πως να θέτουν ερωτήματα, πως να διερευνούν τις διάφορες πτυχές ενός μαθηματικού θέματος και προετοιμάζει το έδαφος των αυριανών ερευνητών.