Πραγματοποίηση συνδέσεων και εισαγωγή νέων εννοιών στη διδασκαλία των Μαθηματικών μέσα από δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος

Γιάννης Θωμαΐδης

Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Η σημασία της δημιουργίας συνδέσεων στα Μαθηματικά

Στην εισαγωγή του νέου Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, που εκπονήθηκε το 2011 και εφαρμόστηκε πιλοτικά επί μία τριετία, τεκμηριώνονται και διατυπώνονται δύο κεντρικοί στόχοι της μάθησης:

● Να αποκτήσουν οι μαθητές την ικανότητα διατύπωσης και επίλυσης προβλημάτων μέσα στα Μαθηματικά και μέσω αυτών.

● Να διαμορφώσουν μια θετική στάση απέναντι στα Μαθηματικά, εκτιμώντας την κοινωνική και την αισθητική τους προοπτική αλλά και το ρόλο τους στην ανάπτυξη του ανθρώπινου πολιτισμού.

Η υλοποίηση των παραπάνω στόχων επιχειρείται να διασφαλιστεί μέσα από τέσσερις βασικές διεργασίες:

α) του μαθηματικού συλλογισμού και της επιχειρηματολογίας

β) της δημιουργίας συνδέσεων/δεσμών

γ) της επικοινωνίας μέσω της χρήσης εργαλείων

δ) της μεταγνωστικής ενημερότητας.

Το περιεχόμενο και ο προσανατολισμός της δεύτερης βασικής διεργασίας (δημιουργία συνδέσεων) περιγράφονται στη συνέχεια ως εξής (βλ. [9], σ.8):

Διεργασία δημιουργίας συνδέσεων: Σημαντικό στοιχείο του μαθηματικού συλλογισμού και, γενικά, του μαθηματικού τρόπου σκέψης αποτελεί η ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων. Οι μαθητές κατανοούν σε βάθος τα μαθηματικά, όταν συνειδητοποιούν τις σχέσεις μεταξύ μαθηματικών εννοιών και διαδικασιών, όταν συνειδητοποιούν ότι τα μαθηματικά είναι μια επιστήμη που συγκροτείται στη βάση λογικών σχέσεων και δομών. Είναι σημαντικό το Πρόγραμμα Σπουδών να παρέχει ευκαιρίες στους μαθητές να δημιουργούν συνδέσεις μέσα στα μαθηματικά και μεταξύ των μαθηματικών και άλλων επιστημονικών περιοχών και του πραγματικού κόσμου.

Είναι περιττό να προσθέσει κανείς έστω και μία λέξη για να τονίσει τη μεγάλη σημασία που έχει η ικανότητα δημιουργίας συνδέσεων στη διδασκαλία και μάθηση των Μαθηματικών.

Εκείνο όμως που χρειάζεται να επαναληφθεί για άλλη μία φορά είναι ότι ο τρόπος με τον οποίο διδάσκονται σήμερα τα Μαθηματικά ελάχιστα συμβάλει στην ανάπτυξη αυτής της ικανότητας. Για την τεκμηρίωση αυτού του ισχυρισμού, αλλά και για να γίνουν αντιληπτές οι πραγματικές διαστάσεις του προβλήματος, θα επιχειρήσουμε μια σύνθεση των αποτελεσμάτων ορισμένων ερευνών που έχουμε πραγματοποιήσει τα τελευταία χρόνια.

Τι δείχνουν ορισμένες έρευνες που πραγματοποιήθηκαν τα τελευταία χρόνια στον ελληνικό χώρο [1]

Σε μια έρευνα στο επίπεδο του Γυμνασίου εξετάσαμε την ικανότητα των μαθητών δύο τμημάτων της Β΄ τάξης να χρησιμοποιήσουν την έννοια της γραμμικής συνάρτησης για να μοντελοποιήσουν και να λύσουν αριθμητικά προβλήματα. Οι μαθητές και των δύο τμημάτων όχι μόνο είχαν διδαχθεί όλη την προβλεπόμενη ύλη, αλλά κατά τη διδασκαλία είχε δοθεί ιδιαίτερη έμφαση στη χρήση των μεταβλητών x και y για τη συμβολική αναπαράσταση των δεδομένων ενός προβλήματος στη μορφή συναρτησιακών σχέσεων. Το πρόβλημα που δόθηκε στους μαθητές, παρόμοιο με άλλα που είχαν λυθεί στην τάξη ήταν το εξής:

> Τρία αδέλφια ηλικίας 40, 34 και 26 ετών κληρονόμησαν ένα οικόπεδο 1200 m^2 και αποφάσισαν να το μοιραστούν ανάλογα με τις ηλικίες τους. Να βρείτε πόσα τετραγωνικά μέτρα θα είναι το μερίδιο του καθενός.

Παρά τη διδασκαλία που είχε προηγηθεί, και το γεγονός ότι πριν από το πρόβλημα υπήρχαν στο φύλλο εργασίας ερωτήσεις κατανόησης για την έννοια της συνάρτησης, οι μισοί περίπου μαθητές απέτυχαν να κάνουν τις αναγκαίες συνδέσεις και να δημιουργήσουν τη συνάρτηση $y = 12x$, από την οποία προκύπτει αμέσως η λύση. Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι αρκετοί μαθητές δεν έκαναν την παραμικρή αναφορά στην έννοια της συνάρτησης και κατέφυγαν σε μεθόδους πρακτικής αριθμητικής (π.χ. αναγωγή στη μονάδα) ορισμένοι δε εξ’ αυτών κατόρθωσαν να δώσουν ορθή απάντηση (βλ. [1]).

Σε μια άλλη έρευνα εξετάσαμε την ικανότητα των μαθητών δύο τμημάτων της Γ΄ Γυμνασίου να συνδέσουν τις αλγεβρικές ταυτότητες (που είχαν διδαχθεί για μεγάλο χρονικό διάστημα) με τον ταχύ υπολογισμό αριθμητικών παραστάσεων, δηλαδή ένα πεδίο που βρίσκεται έξω από το συνηθισμένο πλαίσιο εφαρμογών των αλγεβρικών ταυτοτήτων (παραγοντοποίηση, επίλυση εξισώσεων κ.ο.κ.). Τα θέματα που δόθηκαν στους μαθητές ήταν

---

[1] Οι έρευνες που αναφέρονται στη συνέχεια πραγματοποιήθηκαν με την ενεργό συμμετοχή του γράφοντα και αναδεικνύουν φυσικά ένα μικρό μέρος του προβλήματος. Για μια πιο συστηματική προσέγγιση, το ζήτημα που εξετάζουμε εδώ πρέπει να τοποθετηθεί μέσα στο ευρύτερο πλαίσιο των διεθνών αξιολογήσεων της επίδοσης στα Μαθηματικά, στις οποίες έχει λάβει μέρος η Ελλάδα τα τελευταία χρόνια (π.χ. TIMSS, PISA). Οφείλουμε βέβαια να επισημάνουμε ότι μέσα σε αυτό το πλαίσιο τα προβλήματα της ελληνικής μαθηματικής εκπαίδευσης αποκτούν τραγικές διαστάσεις.

τα εξής:

Θέμα 1ο

Να υπολογίσετε με τον μικρότερο δυνατό κόπο την παράσταση:

$$24\times2{,}78 + 35\times2{,}78 + 41\times2{,}78$$

Θέμα 2ο

Να υπολογίσετε με τον μικρότερο δυνατό κόπο την παράσταση:

$$1{,}5^3 + 3\times1{,}5^2\times0{,}5 + 3\times1{,}5\times0{,}5^2 + 0{,}5^3$$

Θέμα 3ο

Να αποδείξετε την ταυτότητα: $(7x – y)^2 – 50x^2 + 14xy = (y – x)(x + y)$

Να υπολογίσετε με τον μικρότερο δυνατό κόπο την παράσταση:

$$(7\times100000 – 100001)^2 – 50\times100000^2 + 14\times100000\times100001$$

Ένα βασικό αποτέλεσμα αυτής της έρευνας, εκτός από την πολύ χαμηλή γενική επίδοση, ήταν η συμπεριφορά ορισμένων πολύ ικανών μαθητών οι οποίοι, ενώ δεν έκαναν καμιά σύνδεση με τις αλγεβρικές ταυτότητες κατόρθωσαν να υπολογίσουν τις αριθμητικές παραστάσεις επινοώντας ευφυή τεχνάσματα (βλ. [5]).

Στο επίπεδο του Λυκείου εξετάσαμε την ικανότητα των μαθητών ενός τμήματος της Α΄ τάξης να συνδέσουν την έννοια της δύναμης που είχαν διδαχθεί στο Γυμνάσιο και το Λύκειο με την επίλυση των εξισώσεων. Στους μαθητές δόθηκε ένα ασυνήθιστο πρόβλημα το οποίο όμως είχε διατυπωθεί έτσι ώστε να προκαλεί τουλάχιστον το διανοητικό ενδιαφέρον και την περιέργεια:

Αντιμετωπίζοντας μια άγνωστη κατάσταση …

Κάθε φορά στη ζωή που συμβαίνει να βρεθούμε μπροστά σε μια άγνωστη, δύσκολη, πρωτόγνωρη κατάσταση, την οποία οφείλουμε να αντιμετωπίσουμε με όσα (γνωστικά) εφόδια διαθέτουμε από προηγούμενες εμπειρίες , η λογική, η ψυχραιμία, η ετοιμότητα και η διερευνητική ικανότητα είναι κάποια από τα προσόντα, που – όταν τα διαθέτουμε – βοηθούν να αντεπεξέλθουμε και να προχωρήσουμε, βρίσκοντας την καλύτερη δυνατή λύση!

Ας υποθέσουμε ότι η άγνωστη κατάσταση που έχουμε να αντιμετωπίσουμε παίρνει τη μορφή μιας περίεργης εξίσωσης που μάλλον δεν έχουμε ξανασυναντήσει:

$$\left(x^2-5x+5\right)^{x^2-9x+20}=1$$

Μπορείτε να βρείτε τις τιμές του x που την επαληθεύουν;

Και στην περίπτωση αυτή υπήρξε μεγάλη αδυναμία πραγματοποίησης των αναγκαίων συνδέσεων, η οποία οφείλονταν κυρίως στην τάση των μαθητών να εφαρμόζουν μηχανικά αλγοριθμικές διαδικασίες, χωρίς να ενδιαφέρονται για το εννοιολογικό υπόβαθρο του προβλήματος. Η πρώτη αντίδραση των περισσότερων μαθητών της Α΄ Λυκείου στο συγκεκριμένο πρόβλημα ήταν να επιλύσουν τις αντίστοιχες δευτεροβάθμιες εξισώσεις με τον τύπο της διακρίνουσας, χωρίς να μπορούν να αναλάβουν καμία άλλη πρωτοβουλία (βλ. [6]). Η ίδια εξίσωση (χωρίς το εισαγωγικό κείμενο) δόθηκε επίσης σε μαθητές Θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου, οι οποίοι όμως την αντιμετώπισαν ως εκθετική συνάρτηση και την έλυσαν με τους αντίστοιχους περιορισμούς που οδηγούν βέβαια σε απώλεια λύσεων.

Σε μια άλλη έρευνα, τα αποτελέσματα της οποίας πρόκειται να ανακοινωθούν στην 8η Μαθηματική Εβδομάδα, εξετάσαμε την επίδοση των μαθητών δύο τμημάτων της Α΄ Λυκείου στο δεύτερο και τέταρτο θέμα της Άλγεβρας που κληρώθηκαν από την Τράπεζα Θεμάτων στις προαγωγικές εξετάσεις του Ιουνίου 2014. Το γεγονός ότι κληρώθηκαν θέματα από το ίδιο κεφάλαιο της διδακτέας ύλης, και η ύπαρξη του ισχυρού κινήτρου των μαθητών για επιτυχία στις προαγωγικές εξετάσεις, καθιστούν την περίπτωση αυτή πολύ ενδιαφέρουσα για το ζήτημα που εξετάζουμε.

Το δεύτερο θέμα ήταν μια κλασική, υπολογιστική άσκηση από την ύλη των αριθμητικών προόδων και το τέταρτο ένα πρόβλημα, η επίλυση του οποίου απαιτούσε εφαρμογή των τύπων των αριθμητικών προόδων:

Θέμα 2

Δίνεται αριθμητική πρόοδος (α_ν) για την οποία ισχύει: $\alpha_4 – \alpha_2 = 10$.

Α) Να δείξετε ότι η διαφορά τις προόδου είναι $\omega = 5$. [Μονάδες 12]

β) Αν το άθροισμα των τριών πρώτων όρων τις προόδου είναι 33, να βρείτε τον πρώτο όρο τις προόδου. [Μονάδες 13]

Θέμα 4

Σε μια αίθουσα θεάτρου με 20 σειρές καθισμάτων, το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς αυξάνει καθώς ανεβαίνουμε από σειρά σε σειρά, κατά τον ίδιο πάντα αριθμό καθισμάτων. Η 1η σειρά έχει 16 καθίσματα και η 7η σειρά έχει 28 καθίσματα.

Α) Να δείξετε ότι οι αριθμοί που εκφράζουν το πλήθος των καθισμάτων κάθε σειράς είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου. Να βρείτε τον πρώτο όρο τις και τη διαφορά τις τις προόδου. [Μονάδες 5]

β) Να βρείτε το γενικό όρο τις προόδου [Μονάδες 4]

γ) Πόσα καθίσματα έχει όλο το θέατρο; [Μονάδες 5] δ) Αν στην $1^{η}$ σειρά τις αίθουσας τις υπάρχουν 6 κενά καθίσματα, στη $2^{η}$ υπάρχουν 9 κενά καθίσματα, στην $3^{η}$ υπάρχουν 12 κενά καθίσματα και γενικά, τα κενά καθίσματα κάθε σειράς, από τη $2^{η}$ και μετά, είναι κατά 3 περισσότερα από αυτά τις προηγούμενης, τότε:

i) Να βρείτε από ποια σειρά και πέρα θα υπάρχουν μόνο κενά καθίσματα. [Μονάδες 5]

ii) Να βρείτε πόσοι είναι οι θεατές. [Μονάδες 6]

Και στην περίπτωση αυτή καταγράφηκε μεγάλη αδυναμία των μαθητών να συνδέσουν τις μαθηματικές γνώσεις που είχαν διδαχθεί με τα ζητούμενα του πραγματικού προβλήματος (ιδιαίτερα τα ερωτήματα δ(i) και δ(ii)), παρά το γεγονός ότι οι περισσότεροι χρησιμοποίησαν επιτυχώς τις ίδιες ακριβώς γνώσεις για να λύσουν την άσκηση του δεύτερου θέματος. Είναι χαρακτηριστικό ότι πλήρης επίλυση του προβλήματος με χρήση της θεωρίας των αριθμητικών προόδων δόθηκε από ένα μόνο μαθητή, ενώ αρκετοί έδωσαν ορθές απαντήσεις στα ερωτήματα δ(i) και δ(ii) χρησιμοποιώντας απλοϊκές (αλλά αποτελεσματικές!) διαδικασίες καταμέτρησης των καθισμάτων του θεάτρου (βλ. [8]).

Θα μπορούσαμε να αναφέρουμε πολλά παραδείγματα που τεκμηριώνουν επίσης τη μεγάλη αδυναμία των μαθητών της Γ΄ Λυκείου να πραγματοποιούν συνδέσεις στα Μαθηματικά, αντλώντας μάλιστα αποκαλυπτικά στοιχεία από τη διόρθωση των γραπτών στις πανελλαδικές εξετάσεις. Δεν θα επεκταθούμε όμως σε αυτό το ζήτημα, επειδή αφενός αρκετά από αυτά τα στοιχεία έχουν ήδη δημοσιευτεί (βλ. π.χ. [2], [3], [4] και [7]) και αφετέρου η διδασκαλία των Μαθηματικών στη συγκεκριμένη τάξη δεν είναι δεκτική ποιοτικών παρεμβάσεων καθώς επηρεάζεται αρνητικά από τον τρόπο με τον οποίο διεξάγονται οι πανελλαδικές εξετάσεις. Ο στόχος μας σε αυτή την εργασία είναι να συμβάλουμε στην ανάδειξη ενός σημαντικού προβλήματος της διδασκαλίας των Μαθηματικών που αφορά όλες τις βαθμίδες της εκπαίδευσης και να διατυπώσουμε ορισμένες εφαρμόσιμες διδακτικές προτάσεις για την αντιμετώπισή του.

Μερικά συμπεράσματα και προτάσεις

Το διδακτικό πρόβλημα που αναδεικνύουν οι έρευνες που αναφέρθηκαν στην προηγούμενη ενότητα, αλλά και πολλές άλλες που πραγματοποιήθηκαν στην Ελλάδα και διεθνώς, έχει βαθιές ρίζες στον παραδοσιακό τρόπο διδασκαλίας των Μαθηματικών. Συνδυάζοντας τη μεγάλη έκταση και κατάτμηση της διδακτέας ύλης, την έλλειψη κριτικής συμμετοχής των μαθητών στην οικοδόμηση της γνώσης και τις απαιτήσεις των εξεταστικών μηχανισμών, κατανοούμε εύκολα γιατί ο συγκεκριμένος τρόπος διδασκαλίας έχει διαμορφώσει ένα περιβάλλον διδασκαλίας και μάθησης στο οποίο κυριαρχούν η απομνημόνευση και οι τεχνικές επίλυσης ασκήσεων. Η μεγάλη πλειοψηφία των μαθητών «μαθαίνει» να εφαρμόζει διάσπαρτα τμήματα της διδακτέας ύλης, κυρίως στη μορφή αλγοριθμικών διαδικασιών, σε τυποποιημένες κατηγορίες ασκήσεων και να σημειώνει φυσικά παταγώδη αποτυχία σε πιο σύνθετες ασκήσεις ή προβλήματα, που ξεφεύγουν από την «πεπατημένη» και απαιτούν τη δημιουργία συνδέσεων. Αυτή η αποτυχία εμφανίζεται με ιδιαίτερη ένταση στις πανελλαδικές εξετάσεις, όταν κάποιο ερώτημα αποκλίνει από τα πλαίσια της καθιερωμένης «μεθοδολογίας» και απαιτεί βαθύτερη κατανόηση ή συνδυασμό διαφορετικών εννοιών. Μέσα σε αυτό το περιβάλλον παραμένουν φυσικά στο περιθώριο θεμελιώδη χαρακτηριστικά της μαθηματικής σκέψης, όπως είναι η ανάπτυξη γενικών μεθόδων, η χρήση διαφορετικών μέσων αναπαράστασης και ο εντοπισμός δομικών σχέσεων, με δυο λόγια η ανάπτυξη μια ολιστικής αντίληψης για τα Μαθηματικά.

Ένας αποτελεσματικός τρόπος για να προωθηθούν αυτοί οι διδακτικοί στόχοι, ακόμη και στο πιο στοιχειώδες σχολικό επίπεδο, είναι η επίλυση προβλημάτων η οποία στηρίζεται στην ικανότητα δημιουργίας των αναγκαίων συνδέσεων που οδηγούν από τα δεδομένα στα ζητούμενα. Το νέο Πρόγραμμα Σπουδών για τα Μαθηματικά της Υποχρεωτικής Εκπαίδευσης, το οποίο επισημαίνει ορθά ως μία βασική μαθηματική διεργασία τη δημιουργία συνδέσεων, επιχειρεί να συμβάλει στην επίτευξη αυτού του στόχου ενσωματώνοντας συστηματικά στα περιεχόμενά του δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος αλλά και ευρύτερες συνθετικές εργασίες. Για να γίνει όμως μια, έστω και περιορισμένης κλίμακας, ποιοτική στροφή στην καθιερωμένη διδασκαλία των Μαθηματικών χρειάζεται να μετουσιωθούν οι κατευθυντήριες γραμμές του Προγράμματος Σπουδών σε υλοποιήσιμες διδακτικές προτάσεις. Θα πρέπει αρχικά να δημιουργήσουμε μια τράπεζα ελκυστικών μαθηματικών προβλημάτων, τα οποία επιδέχονται πολλαπλές λύσεις που αντιστοιχούν σε διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής γνώσης. Αυτά τα προβλήματα πρέπει να γίνουν αντικείμενο μιας διαφορετικής διδακτικής προσέγγισης, που δίνει προτεραιότητα στη συνεργατική μάθηση και την ανάπτυξη της κριτικής σκέψης των μαθητών. Για το εγχείρημα αυτό απαιτείται προσεκτικός διδακτικός σχεδιασμός, που περιλαμβάνει επιμόρφωση των εκπαιδευτικών με πιλοτική εφαρμογή και πρακτική άσκηση, πριν ενταχθούν οι σχετικές δραστηριότητες επίλυσης προβλήματος στην καθημερινή διδακτική πρακτική.

Στην εισήγηση θα παρουσιαστούν σχετικές δραστηριότητες που έχουν υλοποιηθεί σε σχολικές τάξεις και θα συζητηθούν θέματα που αφορούν τους διδακτικούς στόχους, την οργάνωση και διεξαγωγή της διδασκαλίας, τις στάσεις και επιδόσεις των μαθητών καθώς και τις δυσκολίες που αντιμετωπίστηκαν.

ΒΙΒΛΙΟΓΡΑΦΙΑ

[1] Θωμαΐδης, Γ. & Σταφυλίδου, Μ. Σχεδιασμός και αποτελέσματα μιας διδακτικής παρέμβασης για την έννοια της συνάρτησης στη Β΄ Γυμνασίου. Πρακτικά *3ης Διημερίδας Διδακτικής των Μαθηματικών*, 92–103. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Πανεπιστημίου Κρήτης, Ρέθυμνο, 2003.

[2] Θωμαΐδης, Γ. & Μπαρούτης, Δ. Η ευρετική μεθοδολογία επίλυσης προβλημάτων του Θ. Καζαντζή (1937 – 1999). *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, 374–384. Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη, 2009.

[3] Θωμαΐδης, Γ. & Τσιρώνης, Δ. η Άλγεβρα ως υπόβαθρο της Ανάλυσης: Τι αποκαλύπτουν τα γραπτά των μαθητών στις Πανελλαδικές Εξετάσεις. *Πρακτικά 26ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, 651–660. Ε.Μ.Ε., Θεσσαλονίκη, 2009.

[4] Θωμαΐδης, Γ. *Μαθηματικά & Εξετάσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2009.

[5] Θωμαΐδης, Γ. & Νικολαΐδης, Δ. Η εφαρμογή των αλγεβρικών ταυτοτήτων από μαθητές της Γ΄ Γυμνασίου. *Πρακτικά 3ης Μαθηματικής Εβδομάδας*, 573–583.. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Κεντρικής Μακεδονίας, Θεσσαλονίκη, 2011.

[6] Θωμαΐδης, Γ. & Καλφοπούλου, Κ. Απρόβλεπτες καταστάσεις και μαθηματικές συνδέσεις… Ανάλυση μιας δραστηριότητας επίλυσης προβλήματος στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. *Πρακτικά 28ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, 161–174. Ε.Μ.Ε., Αθήνα, 2011.

[7] Θωμαΐδης, Γ., Μπαρούτης, Δ. & Σαράφης, Γ. Πανελλαδικές Εξετάσεις Μαθηματικών: Επιλογή των θεμάτων, επιδόσεις των μαθητών και επιπτώσεις στη διδασκαλία. *Πρακτικά 32ου Πανελλήνιου Συνεδρίου της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας*, 368–379. Ε.Μ.Ε., Καστοριά, 2015.

[8] Θωμαΐδης, Γ. & Διαμαντίδου, Σ. Η εφαρμογή των μαθηματικών γνώσεων στην επίλυση προβλημάτων: Μια πρόκληση για τη διδασκαλία των Μαθηματικών. Εργασία που έχει υποβληθεί για ανακοίνωση στην *8η Μαθηματική Εβδομάδα του Παραρτήματος Ε.Μ.Ε. Κ. Μακεδονίας* (30 Μαρτίου – 4 Απριλίου 2016).

[9] Παιδαγωγικό Ινστιτούτο. *Πρόγραμμα Σπουδών: Μαθηματικά στη Υποχρεωτική Εκπαίδευση*. Αθήνα, 2011.