Παρακινώντας το ενδιαφέρον των μαθητών Γυμνασίου με ρεαλιστικά προβλήματα Μαθηματικών

Ρίζος Γιώργος,
Μαθηματικός
7ο Γυμνάσιο Κέρκυρας
rizosgeo@gmail.com

Περίληψη

Το πρώτο στοίχημα που πρέπει να κερδίσει ο εκπαιδευτικός, για να είναι επιτυχημένη η διδασκαλία του, είναι να κερδίσει και να διατηρήσει το ενδιαφέρον των μαθητών, να αλλάξει μια κακή προδιάθεση μερίδας μαθητών απέναντι στα Μαθηματικά, αλλά και να ενισχύσει την εσωτερική παρότρυνση των χαρισματικών παιδιών, που δείχνουν ενδιαφέρον για τα Μαθηματικά, ώστε να απογειώσουν τις δυνατότητές τους.

Μια μέθοδος για να το πετύχουμε είναι η παρουσίαση, στη διάρκεια της διδασκαλίας, προβλημάτων που είτε φαίνονται οικεία και ενδιαφέροντα στους μαθητές, παρμένα από το άμεσο περιβάλλον τους, είτε έχουν παράδοξα αποτελέσματα, είτε δέχονται απρόσμενες προεκτάσεις, που προκαλούν τους μαθητές να ασχοληθούν μαζί τους.

Οι κυρίαρχες απόψεις σχετικά με τη διδασκαλία προβλημάτων είναι αντικρουόμενες. Η μία αντιμετωπίζει τα προβλημάτα ως εργαλεία για να ασκούνται οι μαθητές στην ανάπτυξη στρατηγικών και ευρετικών μεθόδων, ενώ η άλλη θεωρεί ότι τα μαθηματικά είναι εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων, η οποία είναι ο σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης.

Μια **εναλλακτική πρόταση** είναι η ένταξη στη διδασκαλία μαθηματικών προβλημάτων που δεν σχετίζονται άμεσα με τις εφαρμογές ή τη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, αλλά αναδεικνύουν τη σημασία ορισμένων μαθηματικών εννοιών, στις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα κατανόησης και παρανοήσεις, οδηγούν σε διερευνήσεις και γενικεύσεις και ταυτόχρονα με το ενδιαφέρον περιεχόμενό τους προκαλούν ένα ευχάριστο και δημιουργικό περιβάλλον στη τάξη των μαθηματικών.

Ο Vladimir Mikhailovich Tikhomirov στις "Ιστορίες για μέγιστα και ελάχιστα" γράφει: «Όλα τα στυλ (διδασκαλίας) είναι καλά εκτός από το πληκτικό». Ας δεχτούμε ότι ο ποσοδείκτης "ΚΑΘΕ" είναι υπερβολικός, χάριν έμφασης. Αυτό που θέλει να τονίσει ο V. Tikhomirov είναι ότι το πληκτικό στυλ διδασκαλίας δεν είναι καλό!

Πράγματι, η διαδικασία της μάθησης είναι εξαιρετικά τρωτή σε συναισθήματα βαρεμάρας και ανίας. Αυτό οφείλεται στη μονοτονία της διδασκαλίας, στον εξαναγκασμό, στην απουσία στόχου κι ενδιαφέροντος, στην έλλειψη πρόκλησης ή αντίθετα στις υπερβολικά υψηλές απαιτήσεις των ζητούμενων εργασιών, που προκαλούν απογοήτευση κι εγκατάλειψη.

Ποιο στυλ διδασκαλίας είναι καλό;

Μια πρόταση είναι να αντιμετωπίσουμε τη διδασκαλία σαν μια αμφίδρομη διαδικασία, με στοιχεία **αυτοσχεδιασμού**, όπου ο εκπαιδευτικός προσαρμόζει το ρόλο του, ανάλογα με τις συνθήκες της τάξης.

Αυτοσχεδιάζω σημαίνει ενεργώ αυθόρμητα σύμφωνα με την έμπνευση της στιγμής. Ο εκπαιδευτικός αξιοποιεί ένα ερέθισμα που είτε δέχεται αυθόρμητα από τη τάξη, είτε ο ίδιος το προκαλεί, οδηγώντας την τάξη εκεί που θέλει με κατάλληλες ερωτήσεις. Οι μαθητές αντιλαμβάνονται ότι το μάθημα δεν είναι προσχεδιασμένο, ανιαρό, μονότονο, αλλά ότι οι ίδιοι συνδημιουργούν το περιεχόμενο της διδασκαλίας, οπότε συμμετέχουν ενεργά σ' αυτό.

Για να μπορέσουν οι εκπαιδευτικοί να κάνουν πειστική αυτή τη διαδικασία χρειάζεται να έχουν προηγουμένως εξασκηθεί σε αυτό το είδος διδασκαλίας και να έχουν βαθιά γνώση αυτής της τεχνικής, που αξιοποιεί το αυθόρμητο υπέρ της δημιουργίας. Η "καλή" διδασκαλία προϋποθέτει την άμεση επικοινωνία μεταξύ του καθηγητή και των μαθητών, αφού εξελίσσεται με την αλληλεπίδρασή τους, οπότε, για να είναι επιτυχής, απαιτείται να κερδίσει ο εκπαιδευτικός την προσοχή των μαθητών του. Αυτό είναι μια αναγκαία, αλλά όχι ικανή, συνθήκη. Η επιτυχημένη διδασκαλία εξαρτάται και από το περιεχόμενό της, την ανατροφοδότησή της, τη σωστή αξιολόγησή της κ.α.

Εδώ θα εστιάσουμε την προσοχή μας στην αναγκαία αυτή συνθήκη: *Πώς να παρακινήσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών*;

Η εσωτερική παρότρυνση

Στο Γυμνάσιο οι μαθητές μιας αντιπροσωπευτικής τάξης έχουν συνήθως διαφορετικές κλίσεις και ενδιαφέροντα, αλλά και προδιάθεση για τα Μαθηματικά. Το στοίχημα για τον εκπαιδευτικό στο Γυμνάσιο είναι η ισορροπία μεταξύ διαφορετικών ενδιαφερόντων των μαθητών. Το τι είναι ενδιαφέρον και προκλητικό για τον μαθητή είναι υποκειμενικό. Βασίζεται σε εμπειρίες, στην αλληλεπίδραση με το οικογενειακό και κοινωνικό περιβάλλον, όπως επίσης και στο γνωστικό τους επίπεδο και στις μαθητικές τους εμπειρίες από το Δημοτικό. Υπάρχουν μαθητές με αρνητική προδιάθεση, φόβο, αδυναμίες, ελλείψεις, αλλά και μαθητές με όρεξη, θέληση για μάθηση, προικισμένοι.

Όταν λέμε ότι ένα άτομο διακατέχεται από επιθυμία για μάθηση, εννοούμε ότι δείχνει έντονο ενδιαφέρον και έχει δίψα για μάθηση. Δηλαδή, ο μαθητής όχι μόνο θέλει να μάθει, αλλά και ότι αγαπά τη διαδικασία αυτή. Απολαμβάνει και τη διαδικασία και το αποτέλεσμα. Οι μαθητές αυτοί είναι προικισμένοι. Τους αρέσει να διαβάζουν, να σκέπτονται, να κατασκευάζουν. Θέτουν τα θεμέλια να γίνουν επιτυχημένοι επαγγελματικά και κοινωνικά.

Η αληθινή παρότρυνση είναι, λοιπόν, εσωτερική διαδικασία του μαθητή. Ο προικισμένος μαθητής έχει την ικανότητα να μετατρέπει το δύσκολο σε επιθυμητό και το φαινομενικά ακατόρθωτο σε προκλητικό. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία, γιατί, με βάση τη θεωρία της βιωματικής μάθησης, πριν κατανοήσουμε κάτι καλά, συνήθως προηγείται κάποια προσπάθεια που δεν είναι πάντα επιτυχής. Η επιμονή, η προσπάθεια και η επιμέλεια είναι οι καθοριστικοί παράγοντες της επιτυχίας.

Πρέπει ο εκπαιδευτικός να προσπαθεί καθημερινά να διαψεύδει το μύθο ότι η απόδοση στα Μαθηματικά είναι θέμα φυσικών ικανοτήτων. Όσοι υποστηρίζουν κάτι τέτοιο, θέλουν να δικαιολογήσουν την αποτυχία και την απραξία τους, πείθοντας τον εαυτό τους και τον οικογενειακό τους περίγυρο ότι δεν διαθέτουν τις ικανότητες. Το ερώτημα που τίθεται είναι: *Μπορούμε να επέμβουμε και να ενισχύσουμε την εσωτερική παρότρυνση* ή είναι πλέον αργά όταν οι μαθητές έρχονται στο Γυμνάσιο;

Πιστεύω ότι υπάρχει ακόμα χρόνος για να αλλάξουμε μια κακή προδιάθεση αλλά και να ενισχύσουμε τα "χαρισματικά" παιδιά να απογειώσουν τις δυνατότητές τους. Μια τέτοια πρόταση κάνει η **Ελένη Μήτσιου**, αναφερόμενη στους προικισμένους μαθητές, στο πρόβλημα της ανομοιογένειας των τμημάτων και στις λεπτές ισορροπίες που πρέπει να κρατά ο εκπαιδευτικός στην τάξη.

«... Μέσα σε μια τάξη ένας τέτοιος μαθητής (εννοεί: προικισμένος μαθητής με ειδικά μαθηματικά ενδιαφέροντα) βαριέται. Βαριέται γιατί ο καθηγητής-δάσκαλος ασχολείται με το μέσο όρο της τάξης και τους αδύνατους μαθητές για να μπορέσει να τους δώσει να καταλάβουν. Αναγκαστικά, δεν ασχολείται μ' αυτόν. Τον καλεί απλά να δώσει τη σωστή απάντηση όταν δεν απαντά κανένας άλλος. Ξέρουμε ότι όλοι μας έχουμε θυσιάσει πολύ χρόνο, και θυσιάζουμε και τώρα, στο μαθητή της ήσσονος προσπάθειας, που, κατά ένα μεγάλο ποσοστό, συνεχίζει με την ίδια προσπάθεια.

Ακόμη, βλέπουμε ότι, αποτέλεσμα της στάσης μας αυτής, που είναι κατά ένα μεγάλο βαθμό υποχρεωτική, αφήνουμε αυτό το μυαλό να εξελίσσεται μόνο του, χωρίς καμία καθοδήγηση. Αυτό όμως είναι επισφαλές διότι αυτός ο μαθητής «τα πιάνει γρήγορα», τα καταλαβαίνει στο σχολείο. Συνηθίζει, λοιπόν, να μη διαβάζει, να μην ψάχνει στα βιβλία και κάποια στιγμή δημιουργούνται κενά και πιθανόν να ξεκόψει από τα μαθηματικά.

Κάτι πρέπει να κάνουμε γι' αυτό το μυαλό, γι' αυτό το παιδί. Δεν θέλουμε να χάσουμε κανέναν από τα μαθηματικά, πόσο μάλλον αυτόν. Θα πρέπει εμείς, ως δάσκαλοι, να δούμε αυτό το παιδί, να του ανοίξουμε τον ορίζοντα. Έστω 5-10 λεπτά σε κάθε ώρα μαθήματος να ασχολούμαστε με αυτά τα παιδιά. Είτε λέγοντας κάτι παραπάνω από την ύλη, είτε δίνοντάς τους κάποια άσκηση για ώθηση (...)».[22]

Η παρακίνηση του ενδιαφέροντος των μαθητών

Ο Μαρκ Τουέιν, στον "Τομ Σώγιερ" παρατηρεί ότι: «*Δουλειά είναι αυτό που είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε, ενώ, παιχνίδι είναι αυτό που δεν είμαστε υποχρεωμένοι να κάνουμε*», φιλοσοφώντας από την οπτική γωνιά των παιδιών.

Κάποιοι έφηβοι αντιλαμβάνονται και εφαρμόζουν την αρχή της "μετακινούμενης απολαβής", δηλαδή της αρχής: "δουλεύω, κουράζομαι τώρα, για να απολαύσω τους καρπούς της δουλειάς μου στο μέλλον". Στις μικρές ηλικίες, δεν έχει γίνει βίωμα η συνειδητή αναγκαιότητα της σχολικής εργασίας και η μελλοντική ανταποδοτικότητά της. Η παιδική ανεμελιά υπερνικά τον όποιο σκεπτικισμό για το αβέβαιο μέλλον. Το παιχνίδι είναι η πρώτη προτεραιότητα. Τα όποια "διοικητικά" μέτρα, οι απειλές, οι τιμωρίες, οι στερήσεις έχουν πρόσκαιρα και αμφίβολα αποτελέσματα με επικίνδυνες παρενέργειες.

Το "στοίχημα" του εκπαιδευτικού είναι το πώς θα παρουσιάσει τις έννοιες, με ευχάριστο τρόπο, σαν παιχνίδι. Πώς θα κερδίσει την προσοχή των μαθητών. Πώς θα τους πείσει ότι μπορούν να λύσουν την άσκηση ή το πρόβλημα. Να τους παρακινήσει να ασχοληθούν, όχι μόνο ατενίζοντας το μέλλον, αλλά ζώντας και παίζοντας στο παρόν. Θα πρέπει, λοιπόν, να αναζητήσουμε εκείνες τις μεθόδους διδασκαλίας που θα διευκολύνουν, θα ενισχύσουν και θα επιταχύνουν αυτή τη διεργασία.

Η διδακτική αξία των "παραδόξων" θεμάτων

Το πρώτο στοίχημα, λοιπόν, που έχουμε να κερδίσουμε για να θεωρηθεί η διδασκαλία μας πετυχημένη, είναι να κεντρίσουμε και να διατηρήσουμε το ενδιαφέρον των μαθητών στην τάξη.

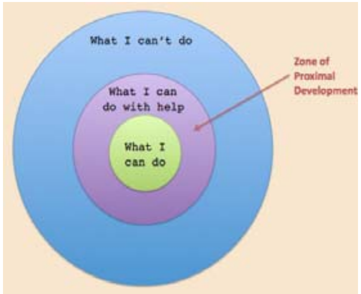
Ένας τρόπος για να το πετύχουμε είναι η παρουσίαση θεμάτων που είτε φαίνονται οικεία και ενδιαφέροντα στους μαθητές, παρμένα από το άμεσο περιβάλλον τους, είτε οδηγούν σε παράδοξα αποτελέσματα, είτε δέχονται απρόσμενες προεκτάσεις, που προκαλούν τους μαθητές να ασχοληθούν μαζί τους.

Τα **μαθηματικά παράδοξα** είναι ασκήσεις που καταλήγουν σε προφανώς λανθασμένα συμπεράσματα, τα οποία προκύπτουν από αποδείξεις, κατά την πορεία των οποίων παραλείψαμε να εφαρμόσουμε μαθηματικές αρχές ή χρησιμοποιήσαμε λανθασμένα μαθηματικές προτάσεις.

Οι εκφωνήσεις τέτοιων θεμάτων ελκύουν το ενδιαφέρον των μαθητών και τους διδάσκουν να είναι προσεκτικοί, να μην απαντούν βιαστικά, δίχως σκέψη και έρευνα σε βάθος, να μην εφησυχάζουν, να είναι "υποψιασμένοι".

Οι μαθητές εκτιμούν κάθε τι που ξεφεύγει από τη ρουτίνα και εντυπωσιάζονται από μια παρουσίαση που ξεφεύγει από τα συνηθισμένα. Αυτό ονομάζεται **κίνητρο μάθησης**. Βασική πηγή εσωτερικής παρότρυνσης για τους μαθητές είναι η αίσθηση έκπληξης, η εμφάνιση απρόσμενων αποτελεσμάτων. Όταν προκύπτουν αποτελέσματα που έρχονται σε αντίφαση με τις υπάρχουσες γνώσεις ή αντιλήψεις των μαθητών, προκαλείται μια σύγκρουση που μπορεί να οδηγήσει στην αναζήτηση νέων γνώσεων με στόχο την άρση της αντίφασης αυτής.

Συνήθως, τους ζητάμε αρχικά αν μπορούν να δώσουν μία προφανή απάντηση στο ερώτημα. Στη συνέχεια ξεδιπλώνουμε **προσεκτικά** τις κρυφές πτυχές του προβλήματος. Λέμε "*προσεκτικά*", γιατί υπάρχει ο κίνδυνος να τους αποθαρρύνουν και να τους απογοητεύσουν, αν παρουσιαστούν με τρόπο που να αναδεικνύει την "απόσταση" καθηγητή-μαθητή. Τα προβλήματα με απροσδόκητες απαντήσεις πρέπει να χρησιμοποιούνται με σύνεση για να ενεργοποιούν τη σκέψη των μαθητών.



Η επιλογή των θεμάτων που θα παρουσιάσουμε πρέπει να κινείται μέσα στα όρια της λεγόμενης **Ζώνης Επικείμενης Ανάπτυξης (Zone of proximal development)** του Lev Vigotsky. Η ζώνη αυτή, παραστατικά είναι ο δακτύλιος που παριστάνει τα προβλήματα, που θα μπορούσε ο μαθητής να αντιμετωπίσει, αν δεχτεί την κατάλληλη βοήθεια, από τον διδάσκοντα ή το περιβάλλον στο οποίο εργάζεται. Η επιτυχία του μαθητή απαιτεί προσπάθεια εκ μέρους του.

Δεν έχει θετική επίδραση στη μάθηση αν επιλέγουμε θέματα, που είτε μπορούν άμεσα να αντιμετωπιστούν, είτε είναι αδύνατο να ανταποκριθούν οι μαθητές, εφόσον ξεφεύγουν από τις δυνατότητες τους.

Οπότε είναι σαφές ότι χρειάζεται πολύ λεπτή ισορροπία στη επιλογή των θεμάτων, εφόσον υπάρχουν μεγάλες αποκλίσεις στις δυνατότητες και το επίπεδο των μαθητών κάθε τάξης. Μια δραστηριότητα κατάλληλη σε μερικούς, είναι ακατάλληλη για άλλους.

Διδάσκοντας Ρεαλιστικά Προβλήματα Μαθηματικών

Τη δεκαετία του '80 αναπτύχθηκε μια κίνηση στην εκπαιδευτική κοινότητα με στόχο την ένταξη της **επίλυσης προβλημάτων** στο επίκεντρο της διδασκαλίας των Μαθηματικών στην πρωτοβάθμια και στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ειδικότερα τα τελευταία χρόνια η κίνηση αυτή έχει αποκτήσει ένα ιδιαίτερο ενδιαφέρον για τη διδακτική πράξη και έχει πάρει πολιτικές προεκτάσεις στη χώρα μας, κάτω από την επίδραση των αποτελεσμάτων διεθνών αξιολογήσεων όπως το πρόγραμμα PISA. Δόθηκαν τρεις διαφορετικές, αντικρουόμενες ερμηνείες στην κίνηση αυτή:

(α) Κατά την πρώτη ερμηνεία διδάσκουμε μαθηματικά με τη χρήση προβλημάτων για να εξασκούνται οι μαθητές στην ανάπτυξη στρατηγικών, μεθόδων, ευρετικών (heuristics). Η χρήση προβλημάτων στη διδασκαλία είναι το μέσο.[6] Στο Πρόγραμμα Σπουδών Μαθηματικών της Αμερικάνικης Μαθηματικής Εταιρείας, αναφέρεται: «*Μέσω της επίλυσης προβλημάτων οι μαθητές **εξερευνούν** τη δύναμη και τη χρησιμότητα των μαθηματικών*». Τα προβλήματα, δηλαδή, χρησιμοποιούνται ως όχημα για την εξάσκηση στα μαθηματικά.

(β) Κατά τη δεύτερη ερμηνεία η επίλυση προβλημάτων θεωρείται σκοπός της μαθηματικής εκπαίδευσης.[13] Διδάσκουμε μαθηματικά, επειδή αποτελούν ένα χρήσιμο εργαλείο για την επίλυση προβλημάτων. Τα μαθηματικά είναι το μέσο και η επίλυση προβλημάτων ο σκοπός.

Στο πρόγραμμα της RME (Ρεαλιστικής Μαθηματικής Εκπαίδευσης) αναφέρεται ότι **σκοπός** της Μαθηματικής εκπαίδευσης είναι η απόκτηση της **ικανότητας** να λύνουμε προβλήματα. Αυτό ερμηνεύεται ως εξής: Σχεδόν κάθε πράξη που κάνουμε στη καθημερινή μας ζωή, κάθε υπολογισμός, πηγάζει από κάποια ανάγκη˙ είτε αφορά δραστηριότητα κάθε πολίτη, όπως συναλλαγή, μέτρηση, σύγκριση, εκτίμηση κ.α., είτε επιστημονική δραστηριότητα. Έτσι σχηματίζονται τα σενάρια που ονομάζουμε προβλήματα. Με αυτή την έννοια μαθαίνουμε μαθηματικά για να επιλύουμε τα προβλήματα αυτά.

(γ) Τέλος, κατά την τρίτη ερμηνεία, που έχει κοινά στοιχεία με τη προηγούμενη και εκφράζεται στα ντοκουμέντα της διεθνούς έρευνας PISA,[14] ο **μαθηματικός εγγραμματισμός (αλφαβητισμός)** είναι μια βασική δεξιότητα, που πρέπει να αποκτήσουν **όλοι** οι μαθητές, στα πλαίσια της διδασκαλίας των μαθηματικών, ώστε να μπορούν να σταθούν στη μεταβιομηχανική κοινωνία του 21^{ου} αιώνα.

> *Ο μαθηματικός αλφαβητισμός για το πρόγραμμα PISA είναι η **ικανότητα** του ατόμου να προσδιορίζει και να κατανοεί πλήρως το ρόλο των μαθηματικών στον κόσμο, να διατυπώνει τεκμηριωμένες κρίσεις, να χρησιμοποιεί και να ενασχολείται με τα μαθηματικά με τρόπο τέτοιο, ώστε να αντιμετωπίζει τις ανάγκες της ζωής του ως σκεπτόμενος, δημιουργικός, και ενεργός πολίτης.*
> *Πρέπει να μπορεί ο μαθητής να αντιμετωπίζει τέτοιου είδους προβλήματα που απαιτούν την επιστράτευση των εμπειριών του καθώς και των ικανοτήτων και των δεξιοτήτων που απέκτησε στο σχολείο. Η θεμελιώδης διαδικασία της επίλυσης τέτοιων προβλημάτων αναφέρεται ως **«μαθηματικοποίηση».***
>
> *Προβλήματα που να είναι μέρος της καθημερινής δραστηριότητας του «πραγματικού κόσμου». Να δίνουν ένα αυθεντικό περιεχό-*

*μενο στη χρήση των μαθηματικών, από τη στιγμή που η εφαρμογή των μαθηματικών είναι το κύριο εργαλείο για τη λύση του προβλήματος. Η **αυθεντικότητα** του προβλήματος έρχεται συχνά σε αντίθεση με τα συνήθη προβλήματα των σχολικών διαγωνισμάτων, όπου προτεραιότητά τους είναι η εξάσκηση με τα μαθηματικά, αντί της χρήσης των μαθηματικών για την επίλυση πραγματικών προβλημάτων.*

Είναι εφικτή μια τέτοια διδασκαλία;

Τα δημοσιευμένα άρθρα σχετικά με τη Ρεαλιστική Μαθηματική Εκπαίδευση και τα παραδείγματα εφαρμογής της, αναφέρονται κυρίως σε επίπεδο Δημοτικού και Γυμνασίου. Λείπουν αναφορές σε θέματα από το Πρ. Σπουδών του Λυκείου. Είναι, άραγε, εφικτή η διδασκαλία μέσω "ανακαλυπτικής διαδικασίας" σε κάθε ενότητα των Μαθηματικών του Λυκείου; Μπορούμε να ζητήσουμε από μαθητές να "ανακαλύψουν" μέσα σε λίγη ώρα γνώση που χτίστηκε στο πέρασμα αιώνων;

Ας σταθούμε λίγο στους όρους "κατασκευασμένα προβλήματα" και "πραγματικές καταστάσεις". Είναι προφανές ότι δεν μπορούμε να ανακαλύψουμε "πραγματικές καταστάσεις" που να ταιριάζουν σε κάθε ενότητα των Προγραμμάτων Σπουδών των μαθηματικών. Και μάλιστα χρειαζόμαστε όχι μόνο ένα παράδειγμα, αλλά ικανό αριθμό που να καλύπτει κάθε πτυχή της ενότητας. Συνήθως, η πολυπλοκότητα των "πραγματικών καταστάσεων" πρέπει να απλοποιηθεί, με κάποιες συμβάσεις, ώστε να γίνουν "προβλήματα" κατάλληλα για το συγκεκριμένο γνωσιακό επίπεδο των μαθητών στους οποίους απευθύνονται.

Συνήθως, χαρακτηρίζουμε ως "**πρόβλημα**" μια διατύπωση ερώτησης, στην οποία δεν είναι άμεσα προφανής ο τρόπος για να φτάσει κανείς στη λύση. Οπότε, το αν μια κατάσταση μπορεί να χαρακτηριστεί "μαθηματικό πρόβλημα" εξαρτάται κυρίως από το μαθηματικό υπόβαθρο του μαθητή (ηλικία, γνώσεις, εξοικείωση με παρόμοια θέματα κ.α.). Προσθέτουμε τον όρο "**ρεαλιστικό-πραγματικό**", όταν η εκφώνηση είναι επενδυμένη με ένα σενάριο που αντιστοιχεί τα δεδομένα της εκφώνησης σε μια πραγματική κατάσταση. Οι υπεύθυνοι της RME αναφέρουν:

«*... Ο όρος **ρεαλιστικό** (για το πρόβλημα) δεν σημαίνει απλά τη σύνδεσή του με τον πραγματικό κόσμο, αλλά **κάτι που φαίνεται πραγματικό στα μάτια των παιδιών**. Πηγή ρεαλιστικών προβλημάτων μπορεί να είναι και ο φανταστικός κόσμος των παιδικών παιχνιδιών...*».[19]

Έτσι, λοιπόν, ο όρος "**ρεαλιστικό πρόβλημα**" αποκτά υποκειμενικό χαρακτήρα και εξαρτάται από την ηλικία (ή μάλλον την ωριμότητα) του αποδέκτη. Κάτι "ρεαλιστικό" για τον μαθητή της Δ΄ Δημοτικού μπορεί να φαντάζει φτιαχτό και ψεύτικο σε έναν μαθητή Λυκείου.

Τα παραπάνω και όσα παρόμοια βρίσκει κανείς σε όλο το φάσμα της βιβλιογραφίας εδώ και δεκαετίες, δεν είναι προβλήματα "**πραγματικού κόσμου**", είναι όμως χρήσιμα. Διδάσκοντας μόνο "**μαθηματικά του πραγματικού κόσμου**", αυτά θα τα πετάξουμε ως αναληθή και τεχνητά; Και τι θα βάλουμε στη θέση τους;

Απάντηση στο ερώτημα δίνει ο **Λεωνίδας Θαρραλίδης**:[1]

« (...) *Κατ' αρχήν είναι δύσκολο να δώσει κανείς ένα σαφή ορισμό του "προβλήματος" και, όπως αποδεικνύει η ζωή, είναι ακόμη πιο δύσκολο να δώσει τον ορισμό κάποιος που επαίρεται ότι μπορεί να το κάνει.*

*Τα "προβλήματα" που κατασκεύασα, καθαρά για εκπαιδευτικές ανάγκες, **ΔΕΝ** υποκρίνονται ότι αντανακλούν την "πραγματικότητα": Οι πληθυσμοί στη Στατιστική είναι μικροί και το μέγεθός τους συνήθως πολλαπλάσιο του 25, οι μέσες τιμές είναι βατοί αριθμοί και η τυπική απόκλιση είναι εύκολα υπολογίσιμη, οι δευτεροβάθμιες εξισώσεις έχουν ακέραιες ρίζες και γενικά οι πράξεις δεν απαιτούν χρήση αριθμομηχανής.*

Όλο αυτό το "έγκλημα" συντελέστηκε χωρίς ίχνος τύψης. Είναι προτιμότερα "τα μαθηματικά της μη πραγματικότητας", ώστε να εμπεδώσουν ευχάριστα οι μαθητές τις βασικές έννοιες. Όσοι προχωρήσουν παραπέρα, θα αντιμετωπίσουν, θεωρητικά εξοπλισμένοι, τις δυσκολίες της (πραγματικής) μαθηματικής ζωής (...) ».

Ας είμαστε ρεαλιστές!

Γράφει ο Moris Kline:[3]

«*Δεν έχουμε αυταπάτες ότι τα προβλήματα που θα διδάξουμε τα επιλέγουμε για την έμφυτη ομορφιά τους, επειδή είναι ικανά από μόνα τους να αποπλανήσουν τους μαθητές! Τα δήθεν προβλήματα του πραγματικού κόσμου, όπως οι εργάτες που σκάβουν χαντάκια, με διαφορετικούς ρυθμούς, οι βρύσες που γεμίζουν δεξαμενές, οι γονείς που έχουν τετραπλάσια ηλικία από τα παιδιά τους, οι φαρμακοποιοί που ανακατεύουν οινοπνεύματα, οι βαρκάρηδες που κωπηλατούν κόντρα στο ρεύμα,* *οι ξυλουργοί που κόβουν σανίδες με μήκος* $\sqrt{45}$ *μέτρα αφήνουν παγερά αδιάφορα τα παιδιά. Τους περιγράφουμε σκηνές με ανοιξιάτικους περιπάτους σε κυκλικό κήπο, κι εκεί που ανοίγει το χαμόγελό τους, καθώς ονειρεύονται, τους ζητάμε τη περίμετρο και το εμβαδό του κυκλικού τομέα*».

Τα προβλήματα έχουν επιλεγεί γιατί είναι χρήσιμα για την δουλειά μας. Όσο και να τα εξυμνήσουμε και να τα παινέψουμε δεν πρόκειται να γίνουν πιο ελκυστικά. Είναι, όμως, απαραίτητα. Δεν μπορείς να απολαύσεις την ομορφιά της γαλλικής ποίησης, αν πρώτα δεν μάθεις τη γαλλική γραμματική. Μπορούμε να πείσουμε κάποιους μαθητές για αυτό; Αν ναι, τότε έχουμε πετύχει!

Έχουμε, λοιπόν, επίγνωση ότι αυτό που φαίνεται ενδιαφέρον σε μας, δεν είναι αναγκαστικά ενδιαφέρον και για τα παιδιά. Η εμπειρία και το πραγματικό διδασκαλικό ενδιαφέρον θα μας οδηγήσει να προσαρμόσουμε το μάθημα, συντονιζόμενοι, όσο γίνεται, με τη συχνότητα στην οποία λαμβάνουν μηνύματα οι μαθητές μας.

Έχει ιδιαίτερη σημασία να φροντίσουμε να μην εκφυλιστεί η διδασκαλία επίλυσης προβλημάτων σε μια μηχανιστική διαδικασία απομνημόνευσης τεχνικών κατά περίπτωση και κατηγοριοποίησης μεθόδων, όπως π.χ. συμβαίνει στα υπαρξιακά θεωρήματα της εξεταστέας ύλης της Γ΄ Λυκείου. Φανταστείτε τη σκηνή στην τάξη όπου ο καθηγητής διατυπώνει την εκφώνηση: «*Μια αρκούδα, που δεν ξέρουμε τι χρώμα έχει, βρίσκεται σε ένα σημείο Α. Κινείται ένα μίλι νότια, μετά ένα μίλι ανατολικά και …*» πριν προλάβει να ολοκληρώσει την εκφώνηση ακούει τις απαντήσεις: «*Λευκή είναι η αρκούδα κύριε, το ξέρουμε. Το σημείο Α είναι στο Βόρειο Πόλο!*».

Μια εναλλακτική πρόταση.

Για το λόγο αυτό παρουσιάζει κατά την άποψή μας ενδιαφέρον η μελέτη μιας **εναλλακτικής πρότασης**, η οποία έχει ως στόχο την ένταξη στη διδασκαλία της επίλυσης μαθηματικών προβλημάτων που δεν σχετίζονται άμεσα με τις εφαρμογές ή τη μοντελοποίηση πραγματικών καταστάσεων, αλλά αναδεικνύουν τη σημασία ορισμένων μαθηματικών εννοιών στις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα κατανόησης και παρανοήσεις, οδηγούν σε διερευνήσεις και γενικεύσεις και ταυτόχρονα με το προκλητικά ενδιαφέρον περιεχόμενό τους προκαλούν ένα ευχάριστο και δημιουργικό περιβάλλον στη τάξη των μαθηματικών.

Παράρτημα

Παραδείγματα – Προβλήματα – Δραστηριότητες

Η εισήγηση συμπληρώνεται με μερικά χαρακτηριστικά προβλήματα και δραστηριότητες στην ύλη των μαθηματικών του Γυμνασίου, που έχουν στόχο την παρακίνηση του ενδιαφέροντος των μαθητών, οδηγούν σε διερευνήσεις και γενικεύσεις και αναδεικνύουν τη σημασία ορισμένων μαθηματικών εννοιών στις οποίες οι μαθητές αντιμετωπίζουν προβλήματα κατανόησης. Δίνουμε παρακάτω περιληπτικά τις εκφωνήσεις τους.

1. Ζητάμε από κάθε μαθητή να γράψει στο τετράδιό του έναν τριψήφιο αριθμό και δίπλα του να τον ξαναγράψει. Τους ζητάμε να διαιρέσουν τον εξαψήφιο που σχηματίστηκε με το 7. Διαπιστώνουμε ότι η διαίρεση είναι τέλεια. Κατόπιν τους ζητάμε να διαιρέσουν το πηλίκο τους με το 11. Και πάλι η διαίρεση είναι τέλεια. Ζητάμε να διαιρέσουν το νέο υπόλοιπο με το 13. Επίσης η διαίρεση είναι τέλεια και το πηλίκο είναι ο αρχικός αριθμός! Ζητάμε να ελεγθεί αν αυτό συμβαίνει για κάθε τριψήφιο και αν ναι, να δοθεί απόδειξη.

2. Ένας παίκτης μπάσκετ έβαλε στο πρώτο δεκάλεπτο ενός αγώνα μία στις δύο βολές και στο δεύτερο δεκάλεπτο μία στις τρεις. Συνολικά δηλαδή στο ημίχρονο έβαλε δύο στις πέντε.
Ποιο από τα παρακάτω είναι το σωστό;

- Έβαλε τα $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$ των βολών.
- Έβαλε τα $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$ των βολών.

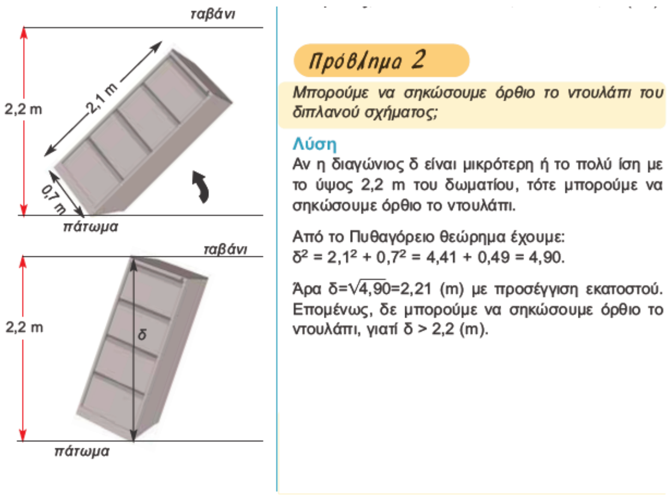
Ένας μικρός θεατής του αγώνα τρώει στο πρώτο δεκάλεπτο τη μισή σοκολάτα του και στο δεύτερο δεκάλεπτο το ένα τρίτο. Τι κλάσμα της σοκολάτας έφαγε;

- Έφαγε τα $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{2}{6}+\frac{3}{6}=\frac{5}{6}$ της σοκολάτας του.
- Έφαγε τα $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}=\frac{1+1}{2+3}=\frac{2}{5}$ της σοκολάτας του.

Στόχος μας είναι να ξεκαθαρίσουν οι μαθητές πότε έχει νόημα η πρόσθεση κλασμάτων.

3. Κάποτε στον πόλεμο, σε ένα χαράκωμα ένας στρατιώτης Α που έχει 3 ψωμιά και ένας Β που έχει 2 ψωμιά, μοιράζονται σε ίσες μερίδες το φαγητό τους με τον στρατιώτη Γ, που δεν έχει κανένα ψωμί. Ο Γ για να τους ευχαριστήσει τους δίνει 5 λίρες για να τις μοιραστούν **δίκαια**. Πόσες πρέπει να πάρει ο καθένας από τους Α, Β;

4. Στο σχολικό βιβλίο της Β΄ Γυμνασίου, *έκδοση Διόφαντος, 2014*, στη σελίδα 49 έχει το εξής λυμένο παράδειγμα.



Πρόβλημα 2

Μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι του διπλανού σχήματος;

Λύση

Αν η διαγώνιος δ είναι μικρότερη ή το πολύ ίση με το ύψος 2,2 m του δωματίου, τότε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι.

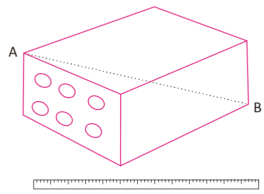
Από το Πυθαγόρειο θεώρημα έχουμε:
$\delta^2 = 2{,}1^2 + 0{,}7^2 = 4{,}41 + 0{,}49 = 4{,}90$.

Άρα $\delta=\sqrt{4{,}90}=2{,}21$ (m) με προσέγγιση εκατοστού. Επομένως, δε μπορούμε να σηκώσουμε όρθιο το ντουλάπι, γιατί $\delta > 2{,}2$ (m).

Και όμως υπάρχει δυνατότητα να στρίψουμε το ντουλάπι υπό κατάλληλες προϋποθέσεις. Ποιες είναι αυτές;

5. Πώς μπορείτε να μετρήσετε τη διαγώνιο ΑΒ σε ένα συμπαγές ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με τη βοήθεια μόνο ενός χάρακα;

Αν έχετε δικαίωμα να χρησιμοποιήσετε μόνο μια φορά το χάρακα, μπορείτε να μετρήσετε την ΑΒ;



6. Ένας πελάτης ζήτησε χυμό πορτοκάλι. Ο σερβιτόρος έβαλε το χυμό από ένα πορτοκάλι σε ένα κωνικό ποτήρι και έφτασε στο μέσο του ύψους του ποτηριού, το συμπλήρωσε με πάγο και το σέρβιρε. Ο επόμενος πελάτης ζήτησε χυμό αλλά χωρίς πάγο. Με το χυμό πόσων πορτοκαλιών θα γεμίσει το ποτήρι;

7. Μια παλέτα με τούβλα ζυγίζει 800 κιλά. Μια όμοιά της, με διαστάσεις τέσσερις φορές μικρότερες, θα μπορούσαμε να τη μεταφέρουμε στα χέρια;

8. Ο νέος γραμματέας του Υπουργείου Συγκοινωνιών τυχαίνει να είναι μαθηματικός. Προτείνει στην Υπηρεσία σηματοδοτήσεως των δρόμων δύο παραλλαγές ενός γνωστού σήματος.

Σε ποιο παλαιό σήμα αντιστοιχούν;

Είναι σωστές οι ενδείξεις τους; Πιστεύετε ότι τα νέα σήματα θα είναι ευκολότερα κατανοητά από τους οδηγούς;

9. Ζητάμε από τους μαθητές να κατασκευάσουν κύκλο περιγράφοντας με το μολύβι ένα ποτήρι ή ένα κυλινδρικό δοχείο αναψυκτικού (πιθανόν να υπάρχει στο καλάθι της τάξης, ... για να φανεί αυθόρμητο) και να βρουν στη συνέχεια το κέντρο του.

Ζητάμε να προσδιορίσουν κατασκευαστικά το κέντρο. Εξηγούμε τη διαφορά από τη συνηθισμένη απάντηση: "*φαίνεται να είναι περίπου εδώ*".

10. Από δύο "ισοδύναμες" ομάδες μαθητών ζητάμε να αντιμετωπίσουν τα θέματα:

α. Δίνεται ευθύγραμμο τμήμα ΑΒ = 5cm. Γραμμοσκιάστε το χωρίο που περιέχει τα σημεία, που απέχουν από το Α το πολύ 3 cm και από το Β το πολύ 4 cm.

β. ***Προσοχή, ο σκύλος δαγκώνει!***

Από δύο σημεία Α και Β, που απέχουν 30 m δένουμε δύο άγριους σκύλους. Το πρώτο με σκοινί 15 m και το δεύτερο με σκοινί 20 m. Κάντε ένα σχήμα και σημειώστε τις «επικίνδυνες» περιοχές για κάθε σκύλο. Γραμμοσκιάστε την περιοχή που κινδυνεύουμε και από τους δύο.

Αν και οι δύο εκφωνήσεις έχουν το ίδιο μαθηματικό περιεχόμενο, σε ποια ομάδα πιστεύετε ότι τα αποτελέσματα θα είναι καλύτερα;

Επαναλάβετε την εργασία σε μεγάλο δείγμα μαθητών. Καταγράψτε και συγκρίνετε τα αποτελέσματα. Επαληθεύστε ή διαψεύστε την εκτίμησή σας.

Βιβλιογραφία

[1] Θαρραλίδης Λ., *Μαθηματικά 2ου κύκλου ΤΕΕ*, Εκδ. Μαθηματική Βιβλιοθήκη, Χ. Βαφειάδης, Θεσσαλονίκη, 2004[3].

[2] Gardner Martin, H Μαγεία των παραδόξων, Εκδόσεις Τροχαλία, 1989

[3] Kline, Morris, "*Γιατί δεν μπορεί να κάνει πρόσθεση ο Γιάννης*", εκδ. ΒΑΝΙΑΣ, Θεσ/νίκη 1993. (Το απόσπασμα στην εισήγηση είναι σε ελεύθερη απόδοση).

[4] Lange, J. de, *Framework for classroom assessment in mathematics*, Madison: WCER, 1999.

[5] "*Measuring student knowledge and skills*, *The PISA 2000 Assessment of Reading, Mathematical and Scientific Literacy*", OECD, 2001.

[6] NCTM, (2000), *Principles and Standards*.

[7] Polya G., Η μαθηματική Ανακάλυψη, τ.1, εκδόσεις Κάτοπτρο, 2001

[8] Polya G., Πώς να το λύσω, Έκδόσεις Σπηλιώτη,

[9] Posamentier S. Alfred , Math Wonders to inspire teachers and students, ASCD, 2003

[10] Ρίζος Γ., Οι περιπέτειες του προβλήματος στα σχολικά μαθηματικά, Εκδόσεις Μαθηματική βιβλιοθήκη,2005.

[11] Ρίζος Γ., Στο δρόμο για τον PISA, Εκδόσεις Μαυρίδη, 2009

[12] "*Sample Tasks from the PISA 2000 Assessment*, READING, MATHEMATICAL AND SCIENTIFIC LITERACY", OECD, 2001.

[13] *The Great Assessment Problems book*, (*GAP*), Freudental Institute.

[14] "*The Pisa 2003 Assessment Framework*", OECD, 2004.

[15] Τουμάσης Μπάμπης, Σύγχρονη Διδακτική των Μαθηματικών, Gutenberg, 2000

[16] Τουμάσης Μπάμπης, Πώς να ενεργοποιήσουμε τα παιδιά στο μάθημα των μαθηματικών, Εκδόσεις Κωστόγιαννος, 1999

Άρθρα – Δημοσιεύσεις

[17] Θωμαΐδης, Ι. *Τι δείχνουν οι διεθνείς αξιολογήσεις TIMSS και PISA,* εισήγηση στην 3η ημερίδα "Μαθηματικά και Εκπαίδευση", Νοεμ. 2008, Δ/νση Δ/βαθμιας Εκ/σης Δυτ. Θεσσαλονίκης, Ε.Μ.Ε., Εκπαιδευτήρια Φρυγανιώτη.

[18] Θωμαΐδης Ι., Καλφοπούλου Αικ., Απρόβλεπτες καταστάσεις και μαθηματικές συνδέσεις. Ανάλυση μιας δραστηριότητας επίλυσης προβλήματος στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου, 28^o Συν. ΕΜΕ, 2011, Αθήνα.

[19] Marja van de Heuvel-Panuhuizen στο άρθρο της: "*Realistic Mathematics Education as Work in Progress*", Freudental Institute, 2002.

[20] Kooij, H. van der (1999). *Modeling and algebra: how 'pure' shall we be?* Paper presented at the 9th International Conference on the Teaching of Mathematical Modeling and Applications, Lisbon, Portugal.

[21] Kooij, H. van der (2002). *Algebra: A Tool for Solving Problems?* Paper presented at 'The Netherlands and Taiwan conference on common sense in mathematics education', Taipei, Taiwan.

[22] Μήτσιου Ελένη, "Μαθηματικοί Διαγωνισμοί", ΑΠΟΛΛΩΝΙΟΣ, τ. 3. (Από εισήγηση σε εκδήλωση του Παραρτήματος Καστοριάς της Ε.Μ.Ε. στις 24/11/2003)

[23] National Center for Education Statistics, *A comparition of the NAEP, TIMMS-R and PISA,* working paper No. 2001-07, U.S. Department Education, June 2001.

[24] Wijers, M.M. (2001). *How to deal with algebraic skills in realistic mathematics education?*. In: H. Chick, K. Stacey, J. Vincent & J. Vincent (Eds.), Proceedings of the 12th International Commission on Mathematical Instruction (ICMI) Study Conference "The Future of the Teaching and Learning of Algebra", 2, Melbourne: University of Melbourne.