Αναζητώντας ποιοτικά χαρακτηριστικά στην επιλογή δραστηριοτήτων που αναπτύσσουν τη μαθηματική σκέψη στην τάξη:

Αρκετά εύκολες ώστε να μπορούν να λυθούν και αρκετά δύσκολες ώστε να είναι διασκεδαστικές

Ιωάννης Παπαδόπουλος

- Επίκ. Καθηγητής
- ΠΤΔΕ, ΑΠΘ

Αναζητώντας ποιοτικά χαρακτηριστικά στην επιλογή δραστηριοτήτων που αναπτύσσουν τη μαθηματική σκέψη στην τάξη:

Αρκετά εύκολες ώστε να μπορούν να λυθούν και αρκετά δύσκολες ώστε να είναι διασκεδαστικές

Εισαγωγή: Τι θα χαρακτηρίζαμε ως πλούσιο μαθηματικό έργο (task);

Τα ποιοτικά χαρακτηριστικά στη διδασκαλία των Μαθηματικών εμπλέκουν μια σειρά από παραμέτρους που συνδέουν μεταξύ τους το δάσκαλο (με τη Γνώση Περιεχομένου και την Παιδαγωγική Γνώση Περιεχομένου), τα Αναλυτικά Προγράμματα, το σχεδιασμό, την επιλογή και την εφαρμογή μαθηματικών δραστηριοτήτων, προβλημάτων, έργων (tasks). Στην εισήγηση αυτή έμφαση θα δοθεί στα τελευταία. Στην έκδοσή του με τίτλο “Engagingmathematicsforalllearners”, το QualificationsandCurriculumAuthority (QCA)[1] στη σελίδα 8 αναφέρει πως ένα πλούσιο μαθηματικό έργο (richmathematicaltask) έχει μια σειρά από χαρακτηριστικά:

- Θα πρέπει από την πρώτη στιγμή να κεντρίζει το ενδιαφέρον.
- Να επιτρέπει περαιτέρω προκλήσεις και επεκτάσεις.
- Να καλεί το μαθητή στη λήψη αποφάσεων σχετικά με τα μαθηματικά που θα χρησιμοποιήσει.
- Να εμπλέκει το μαθητή στη διατύπωση και τον έλεγχο υποθέσεων.
- Να προάγει τη συζήτηση και επικοινωνία.
- Να ενθαρρύνει την επινοητικότητα και την πρωτοτυπία.
- Να ενέχει ένα στοιχείο έκπληξης.
- Να είναι ευχάριστο.
- Να επιτρέπει στο μαθητή την ανάπτυξη μαθηματικής κατανόησης.

Φαίνεται λοιπόν ότι ένα πλούσιο μαθηματικό έργο σχετίζει άμεσα την αλγοριθμική και την εννοιολογική κατανόηση. Η βιβλιογραφία μας δίνει ποικίλους ορισμούς του. Ο McDougall (2004) το ορίζει ως ένα έργο που:

i. Περιλαμβάνει ένα σύνολο χαρακτηριστικών που έχουν τη

[1] http://archive.teachfind.com/qcda/www.qcda.gov.uk/resources/publicationc5a6.html?id=ffe4189b-305d-495b-927f-0fc2a02f4870

βάση τους σε ένα πρόβλημα της πραγματικής ζωής.

ii. Επιτρέπει πολλαπλές λύσεις.
iii. Παρέχει ευκαιρίες για εμπλοκή πολλών στρατηγικών επίλυσης.
iv. Εμπλέκειποικιλίααναπαραστάσεων
v. Οδηγεί τους μαθητές στο να δημιουργούν συνδέσεις μεταξύ διάφορων μαθηματικών ιδεών.
vi. Δημιουργεί την προσδοκία της έκθεσης της επιχειρηματολογίας του μαθητή στους άλλους, και
vii. Καθιστά τον αναστοχασμό ως μια συνεχή διαδικασία

ΟιStein, GroverκαιHenningsen (1996) προσθέτουν και το ότι τέτοια έργα δεν έχουν πρόθεση να εφοδιάσουν τους μαθητές με κάποιον αλγόριθμο, αλλά αντίθετα δίνουν τον απαιτούμενο χρόνο στους μαθητές να κατασκευάσουν τους δικούς τους αλγόριθμους που βοηθούν στην επίλυση (βλ. επίσης Horoks&Robert, 2007; Stigler&Hiebert, 1997).

Πώς όμως επιλέγω ένα τέτοιο έργο (ή πρόβλημα ή δραστηριότητα);

Η επιλογή ενός έργου (taskchoice) σχετίζεται στενά στη βιβλιογραφία με το σχεδιασμό ενός έργου (taskdesign). Ο εκπαιδευτικός μπορεί να επιλέξει ένα έτοιμο έργο και να το προσαρμόσει ώστε να ταιριάζει καλύτερα στις ανάγκες και τα ενδιαφέροντα των μαθητών του, ή μπορεί να δημιουργήσει ένα εξ ολοκλήρου νέο έργο. Αναμένεται επίσης ο εκπαιδευτικός να αξιολογεί την αποτελεσματικότητα των έργων στη δική του τάξη, όπως και να προσδιορίζει τη σειρά εμπλοκής των έργων προκειμένου να υποστηρίξει με τον καλύτερο δυνατό τρόπο τη μάθηση των μαθητών του.

Ο Remilliard (1999) ισχυρίζεται ότι οι εκπαιδευτικοί εν πολλοίς συνήθως εμπιστεύονται ότι τα σχολικά εγχειρίδια καλύπτουν ικανοποιητικά τα μαθηματικά θέματα του αναλυτικού προγράμματος. Παρά τις προσπάθειες να μετακινηθούν από τη θέση αυτή, δηλαδή τη χρήση των σχολικών εγχειριδίων ως του αποκλειστικού παρόχου δραστηριοτήτων στη σχολική τάξη, το εγχειρίδιο εξακολουθεί να αποτελεί το βασικό στήριγμα στην παραδοσιακή τάξη. Ο Finn (1990) ενθαρρύνει τους εκπαιδευτικούς να επιλέγουν και να εκλεπτύνουν τα έργα που προτείνονται από το εγχειρίδιο, όμως να αποφεύγουν να τα χρησιμοποιούν ως την προσωποποίηση του όλου μαθήματος.

Έμπνευση για τη συγκεκριμένη εισήγηση αποτελεί το βιβλίο των Goldenberg, Mark, Kang, Fries, CarterκαιCordner (2015) με τίτλο «Makingsenseofalgebra. Developingstudents' mathematicalhabitsofmind» απ' όπουκαιδανείστηκατηφράσηγιαταπροβλήματαπουεπιλέγουμε: «easyenoughtosolve, hardenoughto be fun» (σελ. 68).

Το καλό πρόβλημα λοιπόν όπως αναφέρουν οι συγγραφείς απαιτεί όχι μόνο το σθένος να εφαρμόζει κανείς τη γνώση και τις μεθόδους που ήδη κατέχει αλλά και τη διάθεση για διερεύνηση, συλλογή νέας γνώσης και ανάπτυξη νέων μεθόδων.

Για να φτάσουν οι μαθητές να σκέφτονται έτσι χρειάζεται να έχουν την ανάλογη εμπειρία σε επίπεδο διερευνητικής προσπάθειας στα πλαίσια της οποίας να πειραματίζονται, να οργανώνουν την πληροφορία, να ανακάμπτουν από λάθος επιλογές, να συνθέτουν τα ευρήματά τους υπό την μορφή συμπερασμάτων.

Για το λόγο αυτό, προβλήματα που τα βήματα της επίλυσής τους είναι τόσο σφιχτά δομημένα το ένα μετά το άλλο, δεν αυξάνουν τις διερευνητικές δεξιότητες των μαθητών.

Ποια θα ορίζαμε λοιπόν τα χαρακτηριστικά-κλειδιά (μεταξύ άλλων) μιας καλής διερευνητικής δραστηριότητας;

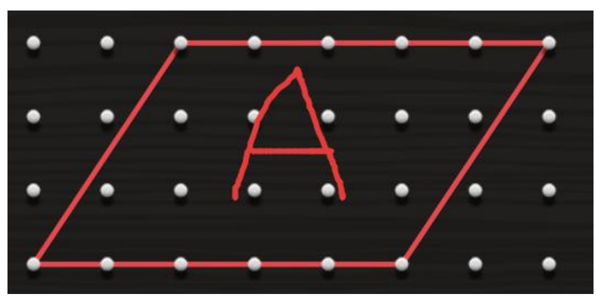
- Η βασική μαθηματική ιδέα κατέχει κεντρική θέση.
- Ο μαθητής αποκτά εμπειρία των συγκεκριμένων μαθηματικών πριν τη φορμαλιστική τους γνώση.
- Ο μαθητής δημιουργεί συνδέσεις μεταξύ διαφορετικών μαθηματικών ιδεών.
- Ο μαθητής πειραματίζεται.

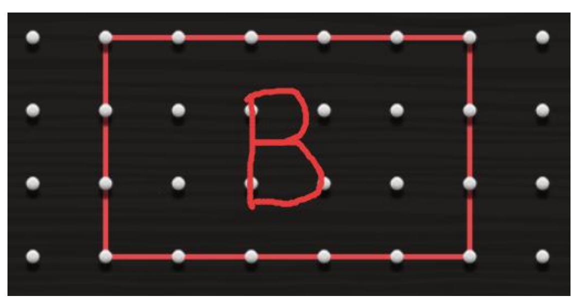
Α. Ποιότητα στην επιλογή: Το μοντέλο του εμβαδού ως ένα πλούσιο περιβάλλον στη διδασκαλία των Μαθηματικών[2]

Ας ξεκινήσουμε με κάποια χαρακτηριστικά του εμβαδού που εμείς αλλά και οι μαθητές τα παίρνουμε εν πολλοίς ως δεδομένα και ας δούμε πως αυτά τα χαρακτηριστικά εξηγούν κάποια γνωστά θέματα σχετικά με το εμβαδόν αλλά και πώς επεκτείνονται σε ιδέες σχετικές με την άλγεβρα.

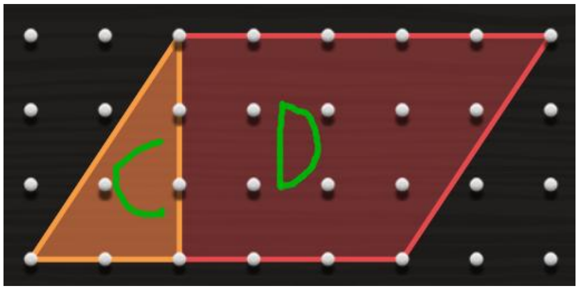
Η αναδιάταξη των μερών δεν αλλάζει το εμβαδόν

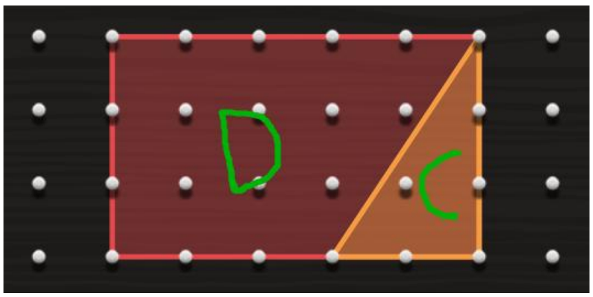
Αν χωρίσουμε σε μέρη ένα επίπεδο σχήμα και αναδιατάξουμε τα μέρη αυτά ώστε να δημιουργήσουμε ένα νέο σχήμα το εμβαδόν παραμένει το ίδιο.





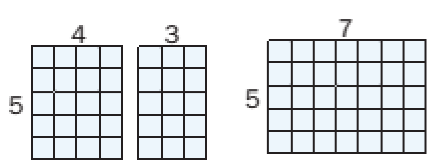
[2]Το υλικό που ακολουθεί βασίζεται στο βιβλίο των Goldenbergetal (2015)που αναφέρεται πιο πάνω





Για παράδειγμα, μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι τα δύο σχήματα Α και Β έχουν το ίδιο εμβαδόν ακόμη και αν δεν έχουμε κάνει κάποια μέτρηση και δεν γνωρίζουμε ποιο είναι αυτό το εμβαδόν. Γιατί; Επειδή όπως ξέρουμε συντίθενται από τα ίδια ακριβώς μέρη που όμως έχουν τοποθετηθεί διαφορετικά. Αυτό σημαίνει ότι αν υπολογίσω τα εμβαδά των σχημάτων Cκαι Dξεχωριστά και τα προσθέσω θα έχω το ίδιο αποτέλεσμα με αυτό που θα έβρισκα αν μπορούσα να υπολογίσω το εμβαδόν του Α ή του Β.

Συνδυασμός εμβαδών



Αν-σε συνέχεια με το προηγούμενο- στο πιο πάνω σχήμα υπολογίσω τα εμβαδά των ορθογωνίων 5x4 και 5x3 και μετά τα προσθέσω το άθροισμα των επιμέρους σχημάτων θα είναι το ίδιο με το εμβαδόν του σχήματος που προκύπτει από τη σύνθεσή τους, δηλ. 5x7.

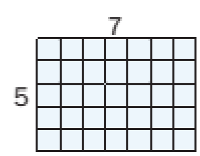
Η παραπάνω διαδικασία αριθμητικά περιγράφεται ως εξής:

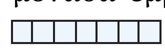
$5 \times 4 + 5 \times 3 = 5\,(4 + 3) = 5 \times 7$

Αυτό που επισήμως αποκαλούμε επιμεριστική ιδιότητα του πολλαπλασιασμού ως προς την πρόσθεση. Σκεφτείτε ότι αυτό εφαρμόζεται σε οποιοδήποτε ορθογώνιο άσχετα με το πώς το επιμερίζουμε, άσχετα από το μέγεθός του και άσχετα από το αν γνωρίζουμε ή όχι το μέγεθος αυτό.

Υπολογισμός του εμβαδού

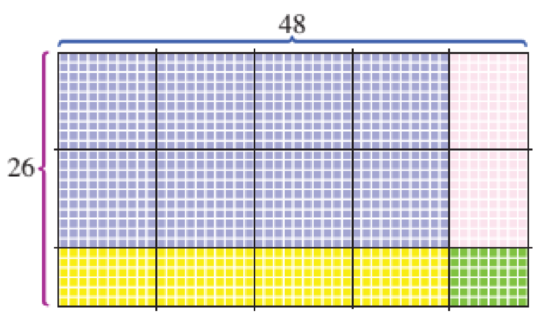
Αν και ο τύπος *βάση x ύψος*θεωρείται και αυτός δεδομένος ας κάνουμε σαφές γιατί δουλεύει ο τύπος αυτός. Γενικά εικόνες όπως αυτή



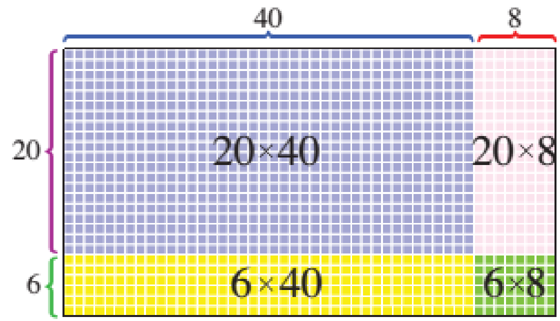
βγάζουν νόημα αν θεωρήσουμε το ένα τετραγωνάκι ως μονάδα εμβαδού, οπότε στη συνέχεια το  αποτελεί μια σειρά από 7 τέτοιες μονάδες, και το μεγάλο ορθογώνιο της εικόνας αποτελείται από 5 τέτοιες σειρές των 7 μονάδων, οπότε από 5x7 μονάδες. Επομένως το εμβαδόν του είναι το μήκος της σειράς επί τον αριθμό των σειρών.

> Ας συνδέσουμε τώρα το μοντέλο του εμβαδού με τον αλγόριθμο του πολλαπλασιασμού

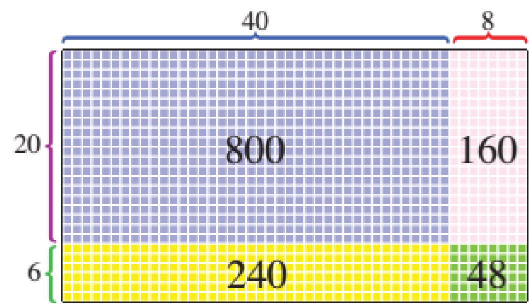
Προφανώς γνωρίζουμε πώς να κάνουμε τον πολλαπλασιασμό 26x48. Αυτό που κάνουμε τώρα είναι να καταλάβουμε πως λειτουργεί αυτός ο αριθμητικός αλγόριθμος για να τον χρησιμοποιήσουμε λίγο αργότερα αλλού. Σε συνάφεια με τα προηγούμενα μπορούμε να έχουμε:



Αυτό που χρειάζεται για τον τελικό υπολογισμό είναι ο αριθμός των πλακιδίων σε κάθε σκιασμένη περιοχή. Αυτό επιτυγχάνεται με επιμέρους πολλαπλασιασμούς όπως φαίνεται στην πιο κάτω εικόνα



Αυτοί οι επιμέρους πολλαπλασιασμοί θα μας δώσουν τα εξής αποτελέσματα:



Βέβαια προφανώς και δεν καθόμαστε να μετρήσουμε ένα προς ένα όλα αυτά τα μικρά πλακίδια, οπότε και δεν υπάρχει λόγος να τα σχεδιάζουμε εφεξής. Άρα μπορούμε να έχουμε μια πιο αφηρημένη εκδοχή του πιο πάνω πλέγματος

	40	8
20	800	160
6	240	48

Η μέθοδος γενικεύεται για κάθε πολλαπλασιασμό. Δείτε ένα ημιτελές παράδειγμα (378x24):

	300	70	8
20	6000		
4	1200	280	

Όμως θα πρέπει οι μαθητές μας να έχουν άνεση με αυτό το επίπεδο γενίκευσης και έτσι αξίζει να εξεταστεί η γενίκευση αυτή για ακραίες περιπτώσεις.

Μιλάμε τόση ώρα για εμβαδά και έτσι σιωπηρά κάνουμε την παραδοχή ότι το μοντέλο μας χρησιμοποιεί θετικούς αριθμούς. Μια ακραία περίπτωση θα ήταν αν η γενίκευση ισχύει στην περίπτωση που χρησιμοποιούμε αρνητικούς αριθμούς.

Ένα ορθογώνιο με διαστάσει 2x20 θα καλύπτεται με 40 τετραγωνικές μονάδες. Τι θα συμβεί όμως να δούμε αυτές τις διαστάσεις ως [3+ (-1)] x [25+(-5)]

	25	$^-5$
3	75	$^-15$
$^-1$	$^-25$	5

Το εμβαδόν όπως βλέπετε εξακολουθεί να παραμένει 40.

Το μοντέλο του εμβαδού στην Άλγεβρα: Πολλαπλασιασμός πολυωνύμων

Η επέκταση της εφαρμογής του μοντέλου του εμβαδού από τον πολλαπλασιασμό των αριθμών στον πολλαπλασιασμό αλγεβρικών εκφράσεων βοηθά τους μαθητές στο να κάνουν χρήση της ίδιας δομής και επιχειρηματολογίας προκειμένου να κατανοήσουν τον πολλαπλασιασμό πολυωνύμων.

Ας ξεκινήσουμε με την περίπτωση πολλαπλασιασμού διωνύμων, πχ (x+6)(40+y)

	40	y
x	$40x$	xy
6	240	$6y$

Από γεωμετρικής άποψης τόσο το x+6 όσο και το 40+y μπορεί να θεωρηθούν ως μήκη που έχουν σπάσει σε δύο μέρη, οπότε το γινόμενό τους αναπαριστά το εμβαδόν του ορθογωνίου με τις αντίστοιχες διαστάσεις. Άρα,

$(x+6)\,(40+y)= 40x + xy +240 + 6y$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να δώσουμε στους μαθητές την ευκαιρία να κάνουν χρήση του μοντέλου του εμβαδού όχι μόνο για τον πολλαπλασιασμό διωνύμων αλλά οποιουδήποτε ζεύγους πολυωνύμων. Επειδή μπορούμε να σπάσουμε ένα ορθογώνιο με οποιονδήποτε τρόπο μας βολεύει, μπορούμε να οργανώσουμε τον πολλαπλασιασμό οποιωνδήποτε πολυωνύμων.

$(3x^2 + 7x – 2)\,(y + 4)$

	$3x^2$	$7x$	$^{-}2$
y	$3x^2y$	$7xy$	$^{-}2y$
4	$12x^2$	$28x$	$^{-}8$

Άρα

$3x^2y + 7xy - 2y + 12x^2 + 28x - 8$

Η εμπειρία που αποκτούν οι μαθητές με τη χρήση του μοντέλου του εμβαδού για την οργάνωση του πολλαπλασιασμού πολυωνύμων εδραιώνει μια στέρεη κατανόηση του πολλαπλασιασμού που δεν αποτελεί πια ένα «τρικ» ‘η έναν κανόνα από βήματα.

Η κατανόηση αυτή επιτυγχάνεται και με μια εκδοχή του μοντέλου του πολλαπλασιασμού όπου λείπει κάποια πληροφορία, γεγονός που μπορεί να αρχίσει νωρίς από την αριθμητική.

		8
40	800	
		24

Ποιο είναι το εμβαδόν του ορθογωνίου; Ποιες είναι οι διαστάσεις του;

Και να που εδώ μπορείτε να σκεφτείτε το γνωστό και κοινό λάθος της γραμμικής σκέψης των μαθητών, ότι δηλαδή $(a+b)^2=a^2+b^2$. Τομοντέλο του εμβαδού δίνει την επιμεριστική ιδιότητα μέσα από μια ξεκάθαρη εικόνα

	a	b
a	a^2	ab
b	ab	b^2

Το μοντέλο του εμβαδού στην Άλγεβρα: Διαίρεση και παραγοντοποίηση πολυωνύμων

Οι απαντήσεις σε αυτήν την κατηγορία προβλημάτων βασίζονται στην κατανόηση των μαθητών σχετικά με τον πολλαπλασιασμό και τη δομή του μοντέλου.

Ας δούμε μια απλή διαίρεση δύο διωνύμων

$$\frac{54x + 45}{6x + 5}$$

	$6x$	5
	$54x$	45

όπου η απάντηση είναι ένας απλό αριθμός.

Ακόμη πιο μεγάλο ενδιαφέρον παρουσιάζει η περίπτωση διαίρεσης δύο πολυωνύμων. Και αυτό γιατί δεν χρειάζεται να ακολουθήσει μια διατεταγμένη σειρά κανόνων ο μαθητής που δεν του λένε τίποτε, αλλά βασίζεται στη λογική της δομής του μοντέλου και στη γνώση του για τον πολλαπλασιασμό

$$\frac{2xy - 8y + 5x - 20}{2y + 5}$$

	$2y$	5
	$2xy$	$5x$
	$^{-}8y$	$^{-}20$

Για τη μοντελοποίηση της παραγοντοποίησης δίνεται μόνο το «εμβαδόν» και πρέπει ο μαθητής να ανακαλύψει τους δύο παράγοντες.

	x^2	$3x$
		12

Β. Ποιότητα στον τρόπο που διδάσκω: Το παράδειγμα της εξίσωσης

Όταν στους μαθητές δίνεται το $7 + 5 \bigcirc 7 + 4$; και τους ζητείται να βάλουν μέσα στον κύκλο <, =, > για να συγκρίνουν τις δυο εκφράσεις, τα παιδιά συνήθως οδηγούνται- και ίσως κάποιες φορές να τους ζητείται ρητά – στο να κάνουν τους υπολογισμούς πρώτα. Όμως, οι ενήλικες με ικανότητες, όταν βρίσκονται αντιμέτωποι με ένα παρόμοιο πρόβλημα, πχ «Ποιο είναι μεγαλύτερο, το 739+43 ή 739+44;» ποτέ δεν θα έκαναν τις πράξεις πρώτα. Χρησιμοποιούν τη δομή του υπολογισμού, όχι τα αποτελέσματά του, για να απαντήσουν στην ερώτηση. Διδάσκουμε λοιπόν την εξίσωση και εξασκούμε τους μαθητές στο να ακολουθούν μια σειρά από βήματα (χωρίζω γνωστούς από αγνώστους, αναγωγή ομοίων όρων, διαιρώ με το συντελεστή του αγνώστου). Ενώ αυτή η προσέγγιση διευκολύνει την εύρεση λύσης για μια εξίσωση όπως η

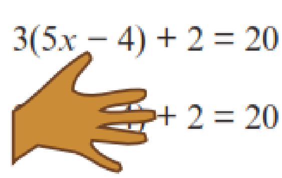
$$3(5x\text{-}4)+2=20,$$

εν τούτοις τα βήματα δεν είναι καθόλου προφανή για μια εξίσωση σαν την

$$\frac{80}{(x-7)} - 3 = 7$$

όπου αν δεν υπάρχει εννοιολογική κατανόηση ο μαθητής δεν ξέρει από πού να αρχίσει. Θέλουμε λοιπόν οι μαθητές να δούνε τη δομήπαρά να εστιάσουν στους αριθμούς.

Οι μαθητές χρειάζεται να αναπτύξουν αυτήν την κλίση να ψάχνουν τη δομή πριν την εμπλοκή τους στον υπολογισμό έτσι ώστε να είναι ικανοί να χρησιμοποιήσουν την ιδέα αυτή για να αντιμετωπίσουν την εξίσωση 3(5x-4)+2=20 ως «κάτι+2=20».

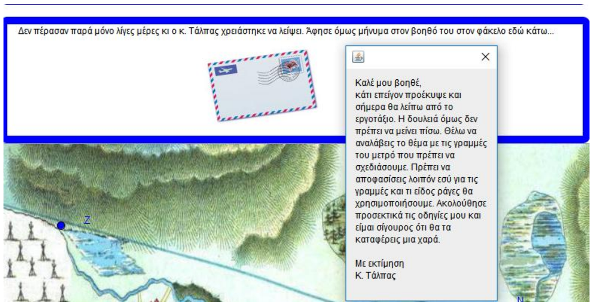


Έπειτα, χρησιμοποιώντας την κοινή λογική και όχι τους κανόνες που έμαθαν με αποστήθιση (ή τους αποστήθισαν λάθος), συνειδητοποιούν ότι το «κάτι» 3(5x-4) πρέπει να ισούται με 18. Ακολουθώντας αυτόν τον συλλογισμό, μπορούν να μάθουν να εξάγουν οι ίδιοι κανόνες που να έχουν νόημα. Με το να διδάσκονται οι μαθητές στο ξεκίνημα της άλγεβρας να λύνουν εξισώσεις ακολουθώντας κάποια συγκεκριμένα βήματα ίσως τους βοηθάει να «δουν τα βήματα». Αλλά δεν τους ενθαρρύνει «να δουν το δάσος και όχι το δέντρο», δηλαδή να καταλάβουν τη συνολική δομή. Και έτσι εξηγείται γιατί τα βήματα αυτά είναι δυσεφάρμοστα στην επίλυση μιας εξίσωσης όπως η $\frac{80}{(x-7)} - 3 = 7$. Αντί να ακολουθήσουμε τα πολλά βήματατης τυπικής προσέγγισης θα μπορούσαμε να το χειριστούμε αυτό ως $\frac{80}{(x-7)}$ μείον 3 μας κάνει 7, συνεπώς το $\frac{80}{(x-7)}$ θα πρέπει να είναι ίσο με 10, επομένως το (χ-7) ισούται με 8 άρα το χ=15. Το θέμα δεν είναι ότι η μία μέθοδος είναι καλύτερη από την άλλη. *Και οι δύο* είναι απαραίτητες επειδή η καθεμία δίνει μια διαφορετική εικόνα του νοήματος των αλγεβρικών εκφράσεων και εξισώσεων. Το να βλέπουν τη δομή βοηθά τους μαθητές να ακολουθήσουν τη λογική της άλγεβρας και συχνά κάνει πολύ πιο εύκολο τον υπολογισμό

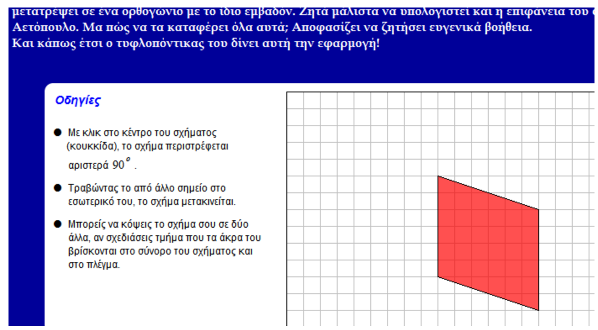
Γ. Ποιότητα σε ένα ψηφιακό περιβάλλον: Το παράδειγμα των c-books

Σε μια κουβέντα σχετικά με τα ποιοτικά χαρακτηριστικά της διδασκαλίας των Μαθηματικών δεν θα μπορούσε να απουσιάζει η τεχνολογία. Ως ένα χαρακτηριστικό παράδειγμα ενός πλούσιου τεχνολογικού περιβάλλοντος θα αναφέρωτην τεχνολογία c-bookπου αναπτύσσεται στα πλαίσια του ευρωπαϊκού έργου MathematicalCreativitySquared (mc2) που δημιουργεί μια νέα γενιά ψηφιακών βιβλίων, των c-book (cαπό το creativity) που σκοπεύουν να ενισχύσουν τη δημιουργική μαθηματική σκέψη τόσο σε όσους εμπλέκονται στο σχεδιασμό των βιβλίων αυτών όσο και στους μαθητές-αναγνώστες. Πρόκειται για το σχεδιασμό και την ανάπτυξη ενός προσαρμόσιμου υπολογιστικού περιβάλλοντος, το οποίο υποστηρίζει άτομα από διαφορετικούς επαγγελματικούς χώρους που εμπλέκονται με την παραγωγή ψηφιακού εκπαιδευτικού υλικού να συνεργαστούν και να σχεδιάσουν από κοινού ψηφιακό υλικό. Η ερευνητική εστίαση τοποθετείται στην κοινωνική δημιουργικότητα που αναπτύσσεται κατά το σχεδιασμό ψηφιακών μέσων που στοχεύουν στην προώθηση της δημιουργικής μαθηματικής σκέψης (CreativeMathematicalThinking, CMT) στους μαθητές.Τέσσερις κοινότητες ενδιαφέροντος (σε διάκριση με τις κοινότητες πρακτικής) εμπλέκονται στην παραγωγή του υλικού αυτού από τέσσερις διαφορετικές χώρες (Ελλάδα, Ισπανία, Γαλλία, Ηνωμένο Βασίλειο). Ένα από τα τελευταία c-books που δημιουργεί η ελληνική ομάδα έχει τον τίτλο «Μετροπόντικας». Απευθύνεται σε μαθητές των τελευταίων τάξεων του Δημοτικού και των πρώτων του

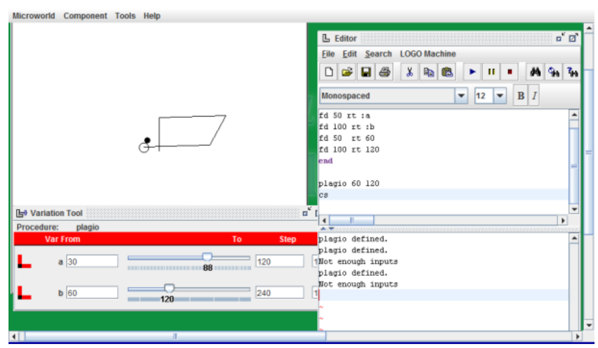
Γυμνασίου. Η ιστορία αναφέρεται σεμια περιοχήόπου ζουν σχήματα και ζώα. Τα πρώτα καλούν τομετροπόντικα να τους λύσει το κυκλοφοριακό πρόβλημα χαράσσοντας γραμμές του μετρό. Η προσπάθεια αυτή περιλαμβάνειμια σειρά από επιλογέςπου πρέπει να γίνουν και αφορούν το μήκος των διαδρομών, τις κατόψεις των σταθμών και τον όγκο τους, τη διακόσμηση των σταθμών μέσα από μια ποικιλία τεχνολογικών περιβαλλόντων που πολλές φορές συνυπάρχουν στην ίδια σελίδα του βιβλίου. Έτσι, κάνουν υποθέσεις και τις ελέγχουν (πχ στην περιοχή όπου ζουν οι καμπύλες και οι γραμμές του μετρό θα είναι ημικύκλια, πότε η διαδρομή γίνεται μικρότερη? Αν χρησιμοποιούν πολλές μικρές ημικυκλικές ράγες, λιγότερες ράγες αλλά με μεγαλύτερα ημικύκλια ή μόνο μια ημικυκλική?)



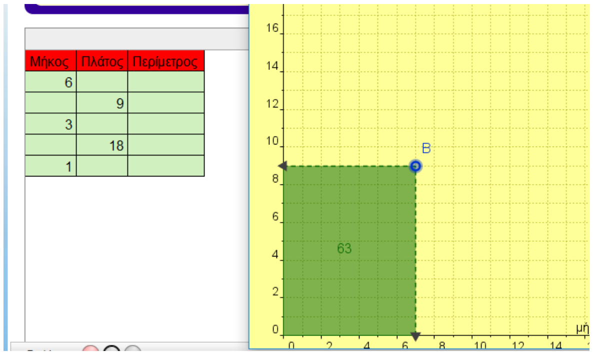
Μετατρέπουν τα αρχικά σχέδια του κτηρίου του σταθμού για να πάρουν ορθογώνιο παραλληλόγραμμο από ένα αρχικά πλάγιο



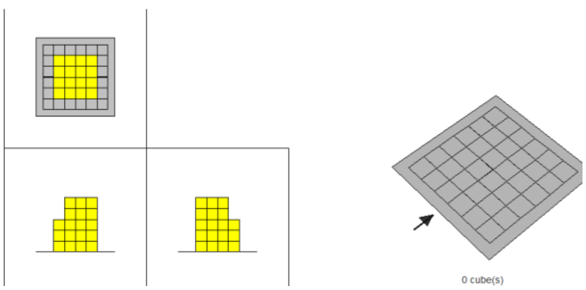
Το σχεδιάζουν σε κώδικα στο περιβάλλον του χελωνόκοσμου



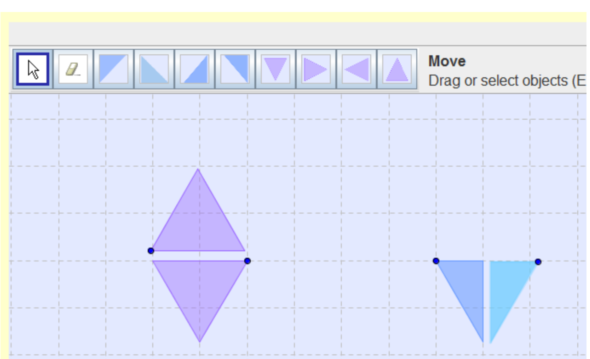
Και στη συνέχεια ψάχνουν να βρουν πότε η περίμετρός του ελαχιστοποιείται με δεδομένο ότι το εμβαδόν παραμένει σταθερό.

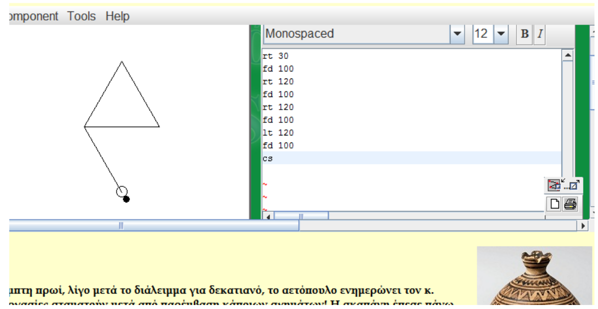


Υλοποιούν τρισδιάστατες κατασκευές που ικανοποιούν συγκεκριμένους περιορισμούς όσον αφορά τις επίπεδες όψεις (πλάγιες και κάτοψη) κάνοντας όμως χρήση του ελάχιστου αριθμού κύβων.



Παίρνουν αποφάσεις για το πώς κυκλοφορούν τα ζεύγη σχημάτων σε μια περιοχή και ανάλογα με την απόφασή τους σχεδιάζουν στο χελωνόκοσμο τα καθίσματα του μετρό κλπ





Για το τέλος...

Κάθε εκπαιδευτικός, παίρνει μια σειρά από αποφάσεις στη διάρκεια της ημέρας σχετικά με επιμέρους όψεις των μαθηματικών έργων που διαχειρίζεται στην τάξη και οι οποίες αποφάσεις τυπικά δεν βασίζονται σε θεωρίες της Διδακτικής των Μαθηματικών. Χωρίς κάποια εξάσκηση, πώς αναμένεται να είναι σε θέση οι εκπαιδευτικοί να επιλέγουν «αξιόλογα» μαθηματικά έργα για τους μαθητές τους; Αν θέλουμε κάτι τέτοιο πρέπει να τους δοθούν οι ανάλογες ευκαιρίες να αποκτήσουν επίγνωση της πολυπλοκότητας της εμπλοκής με το σχεδιασμό και την επιλογή κατάλληλων έργων για τη διδασκαλία των μαθηματικών. Η επιλογή τους είναι σημαντικός ρόλος που έχει δοθεί στον εκπαιδευτικό. Αν δεχόμαστε ότι τα μαθηματικά έργα αποτελούν τη γέφυρα μεταξύ του μαθητή και της μαθηματικής κατανόησης, τότε η επαγγελματική ανάπτυξη των εκπαιδευτικών πρέπει να περιλαμβάνει σχετικές ευκαιρίες.

Βιβλιογραφία

McDougall, D. E. (2004). *School Mathematics Improvement Leadership Handbook*.Toronto: Thomson Nelson.

Horoks, J., & Robert, A. (2007). Tasks designed to highlight task-activity relationships.*Journal of Mathematics Education, 10*(4-6), 279-287.

Stigler, J. W., &Hiebert, J. (1997). Understanding and improving classroom mathematicsinstruction: An overview of the TIMSS video study. *The Phi Delta Kappan, 79*(1),14-21.

Remillard, J. (1999). Curriculum materials in mathematics education reform; A framework for examining teacher's curriculum development. *Curriculum Inquiry, 2*(3), 315-342.

Finn Jr., C. E. (1990). The biggest reform of all. *Phi Delta Kappan, 71*(8), 584-592.

Goldenberg, E.P., Mark, J., Kang, J., Fries, M., Carter, C., &Cordner, T. (2015). *Makingsenseofalgebra*. Portsmouth, NH: Heinemann