Μερικά ενδιαφέροντα αποτελέσματα του Γιώργου Τσίντσιφα

Μάγκος Αθανάσιος,
Πρότυπο Πειραματικό Γυμνάσιο Πανεπιστημίου Μακεδονίας

Παρακάτω παρατίθενται ορισμένα θεωρήματα, κυρίως ανισοτικού χαρακτήρα, τα οποία οφείλονται στον Γ. Τσίντσιφα. Τα περισσότερα από αυτά είναι δημοσιευμένα σε περιοδικά, όπως το Crux Mathematicorum και το American Mathematical Monthly. Άλλα μπορεί να τα βρει κανείς στο κλασικό βιβλίο Recent Advances in Geometric Inequalities.

ΕΝΟΤΗΤΑ 1^{η}

1. Έστω τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ και εμβαδόν E. Αν x, y, z τυχόντες θετικοί αριθμοί, ισχύει

$$\frac{x}{y+z}\alpha^2+\frac{y}{z+x}\beta^2+\frac{z}{x+y}\gamma^2 \geq 2\sqrt{3}E.$$

Η παραπάνω ανισότητα περιέχει ως ειδικές περιπτώσεις της τις ανισότητες Nesbitt, καθώς και την ανισότητα Weitzenböck.

2. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$. Ας είναι $\mu_\alpha, \delta_\alpha, \upsilon_\alpha$ η διάμεσος, η διχοτόμος, το ύψος που αντιστοιχούν στην πλευρά α, αντίστοιχα. Τότε, ισχύει

$$\frac{\mu_\alpha}{\delta_\alpha} \geq \frac{(\beta+\gamma)^2}{4\beta\gamma}, \qquad \frac{\mu_\alpha}{\upsilon_\alpha} \geq \frac{\beta^2+\gamma^2}{2\beta\gamma}.$$

3. Έστωσαν τα τρίγωνα $ΑΒΓ, Α'Β'Γ'$ με πλευρές $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ και εμβαδά E, E', αντίστοιχα. Τότε, ισχύει

$$\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma' \geq 4\sqrt{3EE'}, \qquad \alpha^2\alpha'^2+\beta^2\beta'^2+\gamma^2\gamma'^2 \geq 16EE',$$

$$9RR' \geq \alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma', \qquad \frac{1}{\alpha\alpha'}+\frac{1}{\beta\beta'}+\frac{1}{\gamma\gamma'} \geq \frac{1}{RR'}$$

όπου με R, R' συμβολίζουμε τις ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων.

4. Έστω τρίγωνο με μήκη πλευρών α, β, γ και εμβαδόν E. Αν x, y, z τυχόντες θετικοί αριθμοί, ισχύει

$$\frac{x}{y+z}\alpha^4 + \frac{y}{z+x}\beta^4 + \frac{z}{x+y}\gamma^4 \geq 8E^2.$$

5. Ας είναι A_1, B_1, Γ_1 σημεία στις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$ τριγώνου $AB\Gamma$. Αν $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ είναι τα μήκη των πλευρών του τριγώνου $A_1B_1\Gamma_1$, ισχύει

$$\alpha^2\beta_1\gamma_1 + \beta^2\gamma_1\alpha_1 + \gamma^2\alpha_1\beta_1 \geq 4E^2,$$

όπου E είναι το εμβαδόν του τριγώνου $AB\Gamma$.

6. Έστω τρίγωνο $A_1\,A_2A_3$ και P, Q εσωτερικά σημεία του. Ας είναι $PA_i = x_i, QA_i = y_i,\ i = 1,2,3,$ και p_i, q_i οι αποστάσεις των P, Q από την πλευρά που βρίσκεται απέναντι από την κορυφή A_i, αντίστοιχα. Τότε, ισχύει

$$\sqrt{x_iy_i} + \sqrt{x_2y_2} + \sqrt{x_3y_3} \geq 2\left(\sqrt{p_1q_1} + \sqrt{p_2q_2} + \sqrt{p_3q_3}\right).$$

7. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και σημείο P στο εσωτερικό του. Αν x, y, z είναι οι αποστάσεις του P από τις κορυφές A, B, Γ, αντίστοιχα, και u, v, w οι αποστάσεις του P από τις πλευρές $B\Gamma, \Gamma A, AB$, αντίστοιχα, ισχύει

$$\frac{x^2}{vw} + \frac{y^2}{wu} + \frac{z^2}{uv} \geq 12, \qquad \frac{x}{v+w} + \frac{y}{w+u} + \frac{z}{u+v} \geq 3,$$

$$\frac{x}{\sqrt{vw}} + \frac{y}{\sqrt{wu}} + \frac{z}{\sqrt{uv}} \geq 6, \qquad (\beta+\gamma)x + (\gamma+\alpha)y + (\alpha+\beta)z \geq 8E,$$

όπου E το εμβαδόν του τριγώνου.

8. Έστω τρίγωνο $AB\Gamma$ και M σημείο στο εσωτερικού του με βαρυκεντρικές συντεταγμένες $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Οι αποστάσεις του M από τις κορυφές A, B, Γ είναι οι x_1, x_2, x_3 και οι ακτίνες των περιγεγραμμένων κύκλων των τριγώνων $MB\Gamma, M\Gamma A, MAB, AB\Gamma$ οι R_1, R_2, R_3, R, αντίστοιχα. Τότε, ισχύει

$$\lambda_1R_1 + \lambda_2R_2 + \lambda_3R_3 \geq R \geq \lambda_1x_1 + \lambda_2x_2 + \lambda_3x_3.$$

9. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Μ$ σημείο στο εσωτερικό του με βαρυκεντρικές συντεταγμένες $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$. Ας είναι τ η ημιπερίμετρος και R η ακτίνα του περιγεγραμμένου κύκλου του. Αν $ΔΕΖ$ είναι το ποδικό τρίγωνο και $Α'Β'Γ'$ το σεβιανό τρίγωνο του σημείου $Μ$, ισχύει
$$\frac{(ΔΕΖ)}{(Α'Β'Γ')} \geq 4\lambda_1\lambda_2\lambda_3\left(\frac{\tau}{R}\right)^2.$$

10. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ και $Μ$ σημείο στο εσωτερικό του. Αν $ΔΕΖ$ είναι το ποδικό τρίγωνο και $Α'Β'Γ'$ το σεβιανό τρίγωνο του σημείου $Μ$, ισχύει

$$\pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\ C(M) \geq \pi\varepsilon\rho\acute{\iota}\mu\varepsilon\tau\rho o\varsigma\ P(M).$$

11. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με εμβαδόν $Ε$ και ακτίνες παρεγγεγραμμένων κύκλων $\rho_\alpha, \rho_\beta, \rho_\gamma$. Αν $Α'Β'Γ'$ τρίγωνο εμβαδού $Ε'$ και με ύψη $\upsilon'_\alpha, \upsilon'_\beta, \upsilon'_\gamma$, ισχύει

$$\frac{\rho_\alpha}{\upsilon'_\alpha} + \frac{\rho_\beta}{\upsilon'_\beta} + \frac{\rho_\gamma}{\upsilon'_\gamma} \geq 3\sqrt{\frac{E}{E'}}$$

12. Έστωσαν τα τρίγωνα $ΑΒΓ, Α'Β'Γ'$ με πλευρές $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ και ακτίνες εγγεγραμμένων κύκλων ρ, ρ'. Αν P είναι εσωτερικό σημείο του $ΑΒΓ$ και $AP = x, BP = y, ΓP = z$, ισχύει
$$\frac{\alpha' x^2 + \beta' y^2 + \gamma' z^2}{\alpha + \beta + \gamma} \geq 4\rho\rho'$$
13. Αν $\alpha, \beta, \gamma, \alpha', \beta', \gamma'$ είναι οι πλευρές δύο τριγώνων εμβαδών $Ε, Ε'$, ισχύει
$$\sum_{\kappa\upsilon\kappa\lambda\iota\kappa\acute{\alpha}} \alpha\left[\alpha' - \left(\sqrt{\beta'} - \sqrt{\gamma'}\right)^2\right] \geq 4\sqrt{3EE'}.$$

14. Έστω τρίγωνο $ΑΒΓ$ με πλευρές α, β, γ, εμβαδόν $Ε$, και ας είναι P σημείο στο εσωτερικό του τριγώνου. Αν $R_1 = AP, R_2 = BP, R_3 = ΓP$, η ακτίνα R_o του περιγεγραμμένου κύκλου του τριγώνου με πλευρές $\alpha R_1, \beta R_2, \gamma R_3$ ικανοποιεί τη σχέση
$$R_o \geq \frac{4E}{3\sqrt{3}}.$$

ΕΝΟΤΗΤΑ $2^{η}$

1. Θεωρούμε δύο Simplex του χώρου E^n

$s^{(n)} = (A_1A_2 \dots A_{n+1}), \quad s'^{(n)} = (A'_1A'_2 \dots A'_{n+1}),$

και ας είναι $s^{(n-1)}{}_i, s'^{(n-1)}{}_i$ οι πλευρές αυτών. Ας είναι ακόμα M εσωτερικό σημείο του $s^{(n)}$ και $A_iM = x_i$. Αν

$$D = \sum_{i=1}^{n+1} x_i V s'_i{}^{(n-1)},$$

ισχύει

$$D^2 \geq n^4 V^{\frac{n}{2}}\left(s^{(n)}\right) V^{\frac{2n-2}{2}}\left(s'^{(n)}\right).$$

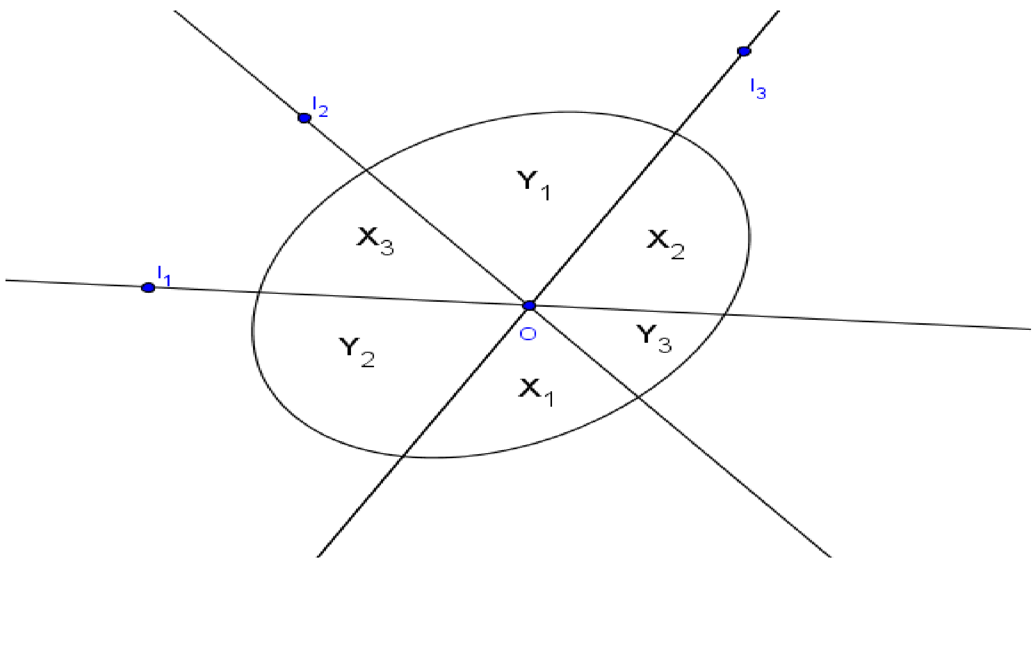
2. Έστω X ένα επίπεδο συμπαγές και κυρτό σύνολο και οι ευθείες l_1, l_2, l_3, οι οποίες διέρχονται από ένα εσωτερικό σημείο O, του συνόλου X. Αν

$$Q(X) = \frac{|X_1|}{|Y_1|} + \frac{|X_2|}{|Y_2|} + \frac{|X_3|}{|Y_3|},$$

$$P(X) = \frac{|X_1| + |X_2|}{|Y_3|} + \frac{|X_2| + |X_3|}{|Y_2|} + \frac{|X_3| + |X_1|}{|Y_1|},$$

ισχύει

$$Q(X) \geq \frac{3}{2}, P(X) \geq 3$$



3. Έστω ομαλή κλειστή κυρτή καμπύλη (c) του επιπέδου και σημείο O στο εσωτερικό της, το οποίο έχει την ιδιότητα: Στα άκρα κάθε χορδής της (c) οι ευθείες στήριξης είναι παράλληλες. Τότε, η καμπύλη είναι κεντρικά συμμετρική και το σημείο O είναι το κέντρο συμμετρίας.

4. Έστω X ένα επίπεδο κυρτό σχήμα με εμβαδόν $A(X)$, διάμετρο $D(X)$ και ας είναι $r(X)$ είναι η μέγιστη δυνατή ακτίνα κύκλου που μπορεί να περιέχεται στο X. Τότε,

$$A(X) \leq 2D(X)r(X)$$

και η ισότητα ισχύει αν και μόνο αν $int\ (X) = \emptyset$.

5. Έστω υπερβολικό τρίγωνο με πλευρές α, β, γ, εμβαδόν E, ακτίνα περιγεγραμμένου κύκλου R, ακτίνα εγγεγραμμένου κύκλου ρ και ημιπερίμετρο τ. Ισχύουν οι παρακάτω ανισότητες:

$$\tanh R \geq 2 \tanh \rho, \qquad \tanh^2\ \rho \leq \frac{\sinh^3 \frac{\tau}{3}}{\sinh \tau},$$

$$\tanh R \tanh \rho \leq \frac{2 \sinh^3 \tau/3}{\sinh \tau}\ , \tanh^2 \frac{E}{4} \leq \left(\tanh \frac{\tau}{2}\right)\left(\tanh^3 \frac{\tau}{6}\right)$$

$$\prod \tanh^2 \frac{A}{2} \leq \frac{\sinh^3 \tau/3}{\sinh^3 \tau}.$$