# *ΕΥΚΛΕΙΔΕΙΑ ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ*.
# Ένας Βασικός Πρωταγωνιστής των Μαθηματικών Διαγωνισμών.

1. *Πως θα Κινήσουμε το Ενδιαφέρον του Μαθητή για Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων*
2. *Μέθοδοι Απόδειξης*
3. *Γεωμετρία και Μέθοδοι Απόδειξης*
4. *Η Επίλυση προβλημάτων από την Ευκλείδεια Γεωμετρία έως και επιπέδου διαγωνισμών ΑΡΧΙΜΗΔΗ, ΒΜΟ, ΙΜΟ, ως σημαντικός παράγων «ανοίγματος της ευρύτερης Μαθηματικής σκέψης».*

## 1. *Πως θα Κινήσουμε το Ενδιαφέρον του Μαθητή για Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων*

- Σημασία έχει να γίνει αντιληπτό ότι η Εκπαίδευση για να επιτύχει τον Μορφωτικό Σκοπό της πρέπει να χρησιμοποιήσει δύο Βασικότατα μέσα.
- Το ***πρώτο*** είναι το *Μορφωτικό Υλικό* μέσα από τις πνευματικές και τεχνικές κατακτήσεις του Ανθρώπου (πολιτισμός)
- Το ***δεύτερο*** είναι η *Μέθοδος*, η οποία θα φέρει σε γόνιμη επαφή το πνεύμα του παιδιού με τις κατακτήσεις που ήδη αναφέραμε.
- Ο *John Dewey* στο περίφημο βιβλίο του «Σχολείο και Παιδί» αναφέρει:

  Στην *Αγωγή* το πραγματικό ενδιαφέρον υπάρχει μόνο στην περίπτωση που το *εγώ* ταυτίζεται με μία *ιδέα* ή με ένα *αντικείμενο*.
- Συνεπώς όταν θελήσουμε να τραβήξουμε το ενδιαφέρον του παιδιού ώστε να θελήσει να ***καταπιαστεί συνειδητά*** με ένα ***Μαθηματικό Πρόβλημα*** θα πρέπει το περιεχόμενο του να ταυτιστεί με το ***εγώ*** του παιδιού, άρα και το περιεχόμενο του ***Μαθηματικού Προβλήματος*** να είναι από την προσωπική του πείρα την οποία οφείλουμε συνεχώς να διευρύνουμε, φέρνοντάς το σε άμεση επαφή με τα γύρω πράγματα δηλαδή με την ζωή.

## *Πως θα Κινήσουμε το Ενδιαφέρον του Μαθητή για Επίλυση Μαθηματικών Προβλημάτων*

- Ο μεγάλος Γάλλος Ακαδημαϊκός ***Greard*** έλεγε: … Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να πει ότι το σχολείο έχει σαν κύριο ***Αναγκαίο*** στόχο του την ***καλλιέργεια*** και την δημιουργία του οργάνου της ***πνευματικής εργασίας***, της ***σκέψης*** και της ***δυνατής κρίσης***. Συνεπώς θα πρέπει να του διδάξει ***εκείνο που δεν πρέπει το παιδί να αγνοεί*** και όχι όλα εκείνα που μπορεί να μάθει κανείς**.**

- Σύμφωνα με τον ***Compayre′*** : Με πολλή μνήμη δυνατόν κάποιος να μην μπορεί να σταδιοδρομήσει, με πολλή φαντασία δυνατόν να πέσει σε πλάνες, αλλά με ***πολλή κρίση*** βαδίζει κατ′ ευθείαν μπροστά με δυνατότητες υπερνίκησης και των πλέον δύσκολων εμποδίων.

- Είναι πιο φυσικό το πνεύμα μας να αρχίσει από το μερικό και να ανελιχτεί προς το γενικότερο. Το σύνολο των ενεργειών των παιδιών είναι μερικές. Επομένως είναι χρέος του Μαθηματικού (και όχι μόνο) Διδάσκοντα να αρχίσει την ***Αγωγή*** των παιδιών με την ***Επαγωγή*** κάτι που αν μπει «στο πετσί του» θα το συντροφεύει παραγωγικά σε όλη του τη ζωή και θα τον μυεί ώστε ***ως λύτης Μαθηματικών προβλημάτων να αισθάνεται «οικείος».***
- Γενικά η ***Μέθοδος*** στα Μαθηματικά έχει τεράστια μορφωτική αξία.
- Ο ***Henri Poincare*** υπογράμμιζε με έμφαση: **«Τα Μαθηματικά ανάλογα με την Μέθοδο διδασκαλίας τους ή εξυψώνουν ή αποκτηνώνουν τον Άνθρωπο».**

## 2. Μέθοδοι Απόδειξης

- Τα Μαθηματικά έγιναν επιστήμη όταν η Αρχαία Ελληνική γλώσσα λειτουργούσε πλέον λογικά με τους ***λογικούς συνδέσμους*** και τις εκφράσεις ***«για κάθε...»*** ή ***«υπάρχει τουλάχιστον ένα...»*** να παίζουν σημαντικούς ρόλους «**πειθούς**» και όταν τότε ο Θαλής έθεσε σαν βάση αποδοχής των Επιστημονικών συλλογισμών την ***Αποδεικτική Διαδικασία μέσω του Επαγωγικού συλλογισμού***. Τότε βέβαια τα Μαθηματικά ήταν κατά κύριο λόγο η ***ΓΕΩΜΕΤΡΙΑ***.

- Σιγά – σιγά διαμορφώθηκε το περιβάλλον ***των Βασικών μεθόδων λειτουργίας του Νου*** προκειμένου να Αποδεικνύει Επαγωγικά και με βάση τους «***Κανόνες της Μαθηματικής Λογικής».***

- Θα αναφερθούμε στις Μεθόδους: ***Σύνθεση***, ***Ανάλυση***.

## *Μέθοδοι Απόδειξης*

- ***«Συνθετική»*** είναι η μέθοδος που ακολουθούμε προκειμένου να συντεθούν τουλάχιστον δύο δεδομένα (ξεκινούμε δηλαδή άμεσα από τα δεδομένα είτε αυτά είναι τα ειδικά του προβλήματος είτε από την θεωρία), ώστε να παραχθεί ένα άλλο δεδομένο κ.τ.λ. μέχρι που να καταλήξουμε στην απάντηση.

# *Μέθοδοι Απόδειξης*

- Όταν έχουμε ένα Μαθηματικό Πρόβλημα άρα μία ***υπόθεση*** (δηλαδή τα δεδομένα) και ζητά να καταλήξουμε σε ένα τουλάχιστον ***ζητούμενο,*** τότε ένας τρόπος είναι να ***υποθέσουμε*** ότι το πρόβλημα είναι λυμένο με σκοπό να ***«ανακαλύψουμε»*** τη διαδικασία επίλυσης του προβλήματος κάνοντας **μαθηματικές σκέψεις** αλλά και **εικασίες** που θα μας καταλήξουν κατ' αρχάς σε ***«δεδομένο εκκίνησης»*** για την εφαρμογή της ***«Συνθετικής»*** διαδικασίας που θα μας οδηγήσει στην κατασκευή (κτίσιμο) της λύσης. Είναι αναγκαίο να επαναλάβουμε εδώ ότι στην προσπάθεια αυτή κύριο και σημαντικό ρόλο παίζει και η δυνατότητα εκ μέρους του λύτη να ***εικάζει***.

  Τότε έχουμε επιτελέσει την Μαθηματική διαδικασία της ***«Ανάλυσης»*.**
- Όταν σε ένα Μαθηματικό Πρόβλημα έχουμε ήδη περάσει από της Μεθόδους-Βήματα της ***Ανάλυσης*** και της ***Σύνθεσης*** είναι αναγκαίο να ***«Αποδείξουμε»*** ότι επετεύχθητε το Ζητούμενο.
- Τέλος θα πρέπει να ***«διερευνήσουμε»***, δηλαδή να ερευνήσουμε το ενδεχόμενο να μην είχαμε λύση, αλλά και το ενδεχόμενο να είχαμε και άλλες λύσεις.

# 3. Γεωμετρία και Μέθοδοι Απόδειξης

- ***Αν σκεφτεί κανείς, αναβιώνοντας λογικές διαδικασίες που έχει επιτελέσει, θα διαπιστώσει, ότι προκειμένου να πείσει επ΄ ακριβώς για κάποια «πράγματα» περνά ενσυνείδητα ή υποσυνείδητα από τις Μαθηματικές Διαδικασίες-Μεθόδους που εκτέθηκαν. Σε παλαιότερες εποχές και στο Δημοτικό ο Μαθητής εδιδάσκετο να καταγράφει και να εκτελεί μετά την εκφώνηση τις εξής Μαθηματικές διαδικασίες:***
- ***Σκέψη (Ανάλυση), Λύση (Σύνθεση), Δοκιμή (Απόδειξη) και το Συμπέρασμα (με Διερεύνηση) .***
- ***Τα μαθηματικά όπως αναφέραμε έγιναν επιστήμη από την στιγμή που εισήλθε από τον Θαλή μέσω της Γεωμετρίας η έννοια της απόδειξης και του επαγωγικού συλλογισμού που οδήγησε στις ακριβείς Κατασκευές με Κανόνα και διαβήτη. Έτσι η Γεωμετρία κατέστει ο ισχυρότατος «οπτικολογικός μηχανισμός σκέψης» ο οποίος ωθεί τον νου να εργάζεται ακόμη πιο πολύ με βάση τους κανόνες της Μαθηματικής Λογικής και τον «υποχρεώνει» σε επιπλέον επιστημονική Αποδοτικότητα.***

## *4. Η Επίλυση προβλημάτων από την Ευκλείδεια Γεωμετρία έως και επιπέδου διαγωνισμών ΑΡΧΙΜΗΔΗ, ΒΜΟ, ΙΜΟ, ως σημαντικός παράγων «ανοίγματος της Ευρύτερης Μαθηματικής Σκέψης»*

- *Είναι καθαρό ότι στους ευρύτερους Μαθηματικούς Διαγωνισμούς στην Ελλάδα έως και τον Διαγωνισμό «Αρχιμήδης» και διεθνώς στους Β.Μ.Ο. και Ι.Μ.Ο., όπου η κύρια επιδίωξη είναι ανίχνευση και «κατοχύρωση» των Μαθηματικών Ταλέντων, η Ευκλείδεια Γεωμετρία είναι «**πρωταγωνίστρια**». Δεν υπάρχει περίπτωση σε τέτοιο Διαγωνισμό να απουσιάζει θέμα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία (στις Ι.Μ.Ο.) τα θέματα είναι ΔΥΟ. Και τούτο διότι οι τεράστιες Μαθηματικές προσωπικότητες που κατευθύνουν τους Διαγωνισμούς αυτούς γνωρίζουν ότι*

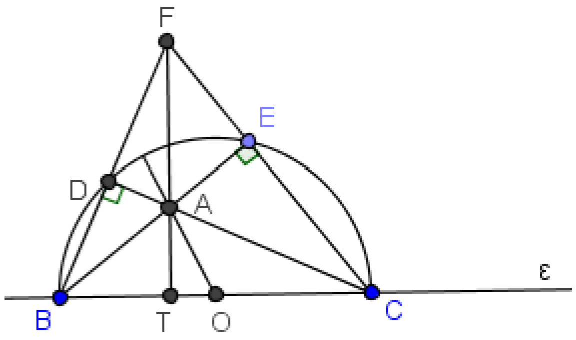
  ***η Ευκλείδεια Γεωμετρία παράγει και επεκτείνει την Μαθηματική Μεθοδική Σκέψη «για παντού».***

# *Παράδειγμα:*

- *(Μ.Ι.Τ.) Δίνεται μία ευθεία (ε) και ένα σημείο Α εκτός αυτής. Κατασκευάστε την κάθετη ευθεία στην ευθεία (ε) που διέρχεται από το σημείο Α, χρησιμοποιώντας **μόνο** μία φορά τον διαβήτη και όσες φορές χρειαστεί τον κανόνα.*
- Ανάλυση:

*Έστω ότι η κατασκευή έχει επιτευχθεί.*

*Η αναφορά στον διαβήτη οδηγεί σε κύκλο και η καθετότητα της ευθείας σε συνδυασμό με τον κύκλο οδηγεί ΚΑΙ σε ορθόκεντρο.*



# *Παράδειγμα:*

Αν θεωρήσουμε τυχόντα κύκλο κέντρου O (τυχόν σημείο της (ε)) με ακτίνα μεγαλύτερο του ευθύγραμμου τμήματος AO που τέμνει την (ε) στα σημεία B, C και «πετάξουμε» τον διαβήτη έχουμε: Τις τομές E, D αντίστοιχα των AB, AC με τον κύκλο. Έτσι παίρνουμε την τομή  επίσης F των BD, CE. Το σημείο A είναι προφανώς το ορθόκεντρο του τριγώνου FBC. Αρκεί λοιπόν να ενώσουμε το σημείο A με το σημείο F.

# *Παράδειγμα:*

- Σύνθεση (ή Κατασκευή):

Προσδιορίζουμε (σημειώνουμε) σημείο O της ευθείας (ε) και «***σύρουμε***» το ευθύγραμμο τμήμα AO. Με κέντρο το σημείο O και ακτίνα μεγαλύτερη του OA κατασκευάζουμε κύκλο προσδιορίζοντας τα σημεία B, C. Στην συνέχεια προσδιορίζουμε την τομή F των BD, CE και σχηματίζουμε την ευθεία AF. Η AF είναι η ζητούμενη κάθετη.

# *Παράδειγμα:*

Απόδειξη:

Τα ευθύγραμμα τμήματα BE, CD είναι ύψη του τριγώνου FBC, επομένως η ευθεία FA είναι ο φορέας του τρίτου ύψους.

Διερεύνηση:

Το πρόβλημα έχει πάντα λύση

$f:\mathbb{R}\to\mathbb{R},$

# Οι γεωμετρικές μέθοδοι, τελικά Μαθηματικές Μέθοδοι.

Βρείτε συνάρτηση $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, με την ιδιότητα $f\circ f\circ f=I$, όπου $I$ είναι η ταυτοτική συνάρτηση και αν είναι επίσης γνωστό, ότι η πραγματική συνάρτηση με τύπο $g(x)=x+f(x)+(f\circ f)(x)$, είναι **1-1**.

Ανάλυση:

Έστω ότι υπάρχει μία τέτοια συνάρτηση. Το γεγονός ότι η συνάρτηση **g** είναι **1-1** σημαίνει ότι για κάθε ζεύγος σημείων $x_1, x_2$ του πεδίου ορισμού της με $f(x_1)=f(x_2)$ ισχύει $x_1=x_2$ (Αποκλειστικά). Επειδή εδώ «εμπλέκεται» και η σύνθεση θα πρέπει όταν θέσουμε $y=f(x)$, από μία σχέση του τύπου $g(k(x))=g(y)$ να προκύψει $y=k(x)$ οπότε έτσι θα προσδιοριστεί η *f(x)*.

# *Οι γεωμετρικές μέθοδοι, τελικά Μαθηματικές Μέθοδοι.*

Συνεχίζοντας ...

Σύνθεση:

Θεωρούμε *y=f(x)*. Τότε παίρνουμε

$$f(f(x)) = f(y) \Rightarrow f\Big(f\big(f(x)\big)\Big) = f\big(f(y)\big) \Rightarrow f\big(f(y)\big) = I(x),$$

δηλαδή έχουμε και την σχέση *x=f(f(x))*. Έτσι καταλήγουμε:

$g(x) = x + f(x) + (f \circ f)(x) = (f \circ f)(y) + y + f(y)$, δηλαδή στην

σχέση *g(x)=g(y)* με τη συνάρτηση ***g*** να είναι **1-1**

άρα να παίρνουμε ***y=x*** δηλαδή f***(x) =x***.

# Οι γεωμετρικές μέθοδοι, τελικά Μαθηματικές Μέθοδοι.

Απόδειξη:
Η ταυτοτική τελικά συνάρτηση είναι η ζητούμενη συνάρτηση καθότι επαληθεύει όλα τα δεδομένα του προβλήματος.
Διερεύνηση:
Η συνάρτηση μας είναι η μοναδική συνάρτηση με τις συγκεκριμένες ιδιότητες.

(*) Υπόθεση εργασίας:
Αν βρίσκαμε μία συνάρτηση που δεν θα επαλήθευε τελικά τις ιδιότητες τότε στη διερεύνηση θα αναφέραμε ότι το πρόβλημα δεν έχει λύση.
Αν βρίσκαμε πάνω από μία συναρτήσεις τότε στην διερεύνηση θα αναφέραμε αν τις δεχόμασταν όλες (αν επαλήθευαν) ή εκείνες που θα επαλήθευαν.

# Συμπέρασμα

*Η ενασχόληση με την Ευκλείδεια Γεωμετρία δίνει τις καταλληλότερες βάσεις ώστε η Μαθηματική σκέψη να γίνεται «Δυνατότερη».*
*Για τούτο και στους ευρύτερους Διαγωνισμούς αιχμής για την ανίχνευση των Μαθηματικών Ταλέντων πρωταγωνιστεί.*

# Βιβλιογραφία:


1) K.A.Rybnikov: Εισαγωγή στη μεθοδολογία των Μαθηματικών-Εκδόσεις ΕΠΙΣΤΗΜΗ και ΚΟΙΝΩΝΙΑ (Θεσσαλονίκη 1986),
2) Θ.Εξαρχάκου: Διδακτική των Μαθηματικών-Εκδόσεις Ελληνικά Γράμματα (Αθήνα 1993),
3) Heath: The thirteen books of Euclid’s Elements (Dover N.Y. 1956)
4) Hana: Some pedagogical aspects of proof,
5) A. Adler: Ανθρωπογνωσία-μετάφραση από τις εκδόσεις Μανιατέα (Αθήνα 1985),
6) J.Deey: Πώς σκεπτόμαστε, μετάφραση Γ.Κατσαμά,
7) Arthur Engel: Problem Solving Strategies-Εκδόσεις Springer,
8) Dan Branzei - Cristinel Mortici: Metoda inversiunii in Geometrie-Editura Plus Bucuresti 2001,
9) Περιοδικά ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Α΄ ,ΕΥΚΛΕΙΔΗΣ Β΄-Εκδόσεις Ε.Μ.Ε.,
10) Αναλυτικά Προγράμματα Προετοιμασίας Ολυμπιακής Ομάδος (paper) της Ε.Μ.Ε. 2001,
11) Σωτήρης Ε. Λουρίδας «Γεωμετρία (Θεωρία-Ασκήσεις) για την Ολυμπιακή Ομάδα»- από Ε.Μ.Ε.,
12) Sotirios E. Louridas-Michael Th Rassias: Problem-Solving and Selected Topics in Euclidean Geometry (Foreword by M. H. Freedman) από τις Εκδόσεις Springer.