Η Γεωμετρία οργανώνει τη σκέψη

του Ευγένιου Αγγελόπουλου

Η Προελληνική Γεωμετρία είναι, απ'όσο γνωρίζουμε, συλλογή εμπειρικών παρατηρήσεων και κανόνων, και κτήμα μιας κάστας ειδικών. Στην αρχαία Ελλάδα η Γεωμετρία αποκτά τα χαρακτηριστικά ***επιστήμης***:

Πρώτον οριοθετεί το αντικείμενό της: μελέτη των σχημάτων, των ιδιοτήτων τους και των σχέσεών τους. Και όταν λέμε ιδιότητες και σχέσεις μιλάμε για καθορισμένα πράγματα. Σε αντίθεση με τη φιλοσοφία ή/και τη θεολογία, δεν αναρωτιέται για το κατά πόσον τα τρίγωνα και οι κύκλοι έχουν ψυχή ή ελεύθερη βούληση. Τα ερωτήματά της είναι πολύ πιο πεζά, και κατά κανόνα αποκρίσιμα (παρότι ακόμη και σήμερα υπάρχουν άλυτα προβλήματα στα Μαθηματικά που δε γνωρίζουμε αν μπορούν να απαντηθούν).

Δεύτερον, ορίζει μια μέθοδο προσέγγισης των προβλημάτων που μπορεί να διατυπώσει. Αυτή είναι η απόδειξη. Οι γεωμετρικές αποδείξεις δεν είναι θέμα πίστης ούτε υποτακτικής αποδοχής πατροπαράδοτων κανόνων. Είναι θέμα πειθούς, και είναι προσβάσιμη σε όλους όσους μπορούν να παρακολουθήσουν την επιχειρηματολογία. Όπως και η ρητορική, είναι άμεσα συνδεδεμένη με το ***δημόσιο λόγο*** δηλαδή τη Δημοκρατία. Με μόνη τη διαφορά ότι ενώ στη ρητορική υπάρχει αντίπαλος, του οποίου τα επιχειρήματα οφείλεις να συντρίψεις καταφεύγοντας σε όλων των ειδών τα τεχνάσματα, στη Γεωμετρία αντίπαλος δεν υπάρχει. Τον εαυτό σου οφείλεις να πείσεις πρώτα, ότι αυτό που νομίζεις πως είναι έτσι, είναι όντως έτσι.

Τρίτον αποτελεί ένα συνεκτικό σώμα προτάσεων, ένα οικοδόμημα που ξεκινάει από κάποιες παραδοχές (οι οποίες στην πάροδο του χρόνου μπορούν να αναθεωρηθούν (αλλά αυτό είναι άλλη ιστορία) και πάνω τους χτίζει ένα ολόκληρο οικοδόμημα. Πρότυπο βέβαια γι' αυτό αποτελούν τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη, από τα πιο πολυδιαβασμένα έργα στην ιστορία της ανθρωπότητας. Και εδώ πρέπει να σημειώσουμε ότι πρόκειται για ένα έργο όχι κλεισμένο στον εαυτό του σαν απαύγασμα σοφίας, αλλά ανοιχτό σε όλων των ειδών τις προεκτάσεις, τις συμπληρώσεις, αλλά και τις αναιρέσεις.

Γεωμετρία, η πρώτη επιστήμη

Το ερώτημα που μπαίνει είναι για ποιο λόγο η Γεωμετρία είναι η πρώτη επιστήμη που απογαλακτίζεται από τη φιλοσοφία. Ερώτημα που δεν μπορεί βέβαια να απαντηθεί πλήρως, που μπορεί όμως να διερευνηθεί.

Είναι προφανές ότι δημοκρατική δομή πολλών ελληνικών πόλεων, και άρα η κυριαρχία του δημόσιου λόγου είναι σημαντικός παράγοντας, δεν αρκεί όμως από μόνος του να εξηγήσει το γιατί η Γεωμετρία και όχι κάτι άλλο (η Φυσική ή η Χημεία, πχ.). Από την άλλη, πρέπει να σημειώσουμε ότι η κατανόηση και ερμηνεία ενός κόσμου πολύπλοκου και μεταβαλλόμενου γίνεται προσφεύγοντας σε έννοιες και σχέσεις όσο το δυνατόν πιο απλές. Για παράδειγμα, κάθε υλικό σώμα είναι μείγμα τεσσάρων βασικών συστατικών (γη, αήρ, ύδωρ, πυρ). Κάθε σώμα διαθέτει μια προνομιακή θέση στην οποία τείνει και για αυτό τα βαρέα πέφτουν ενώ τα ελαφρά ανεβαίνουν. Η ύλη είναι απείρως διαιρετή – ή αντίθετα, αποτελείται από άτομα. Και πολλές άλλες εικασίες, εξαιρετικά ενδιαφέρουσες, αλλά οι οποίες δεν συναρθρώνονται σε αυτόνομη θεωρία.

Αντίθετα, οι βασικές έννοιες και σχέσεις της Γεωμετρίας, αφενός είναι απλές: Είναι άμεσα συνδεδεμένες με την εποπτεία, με την αίσθηση του χώρου και την οργάνωσή του, που είναι βασικές ζωτικές λειτουργίες: *βλέπεις* αν μπορείς να πιάσεις ένα φρούτο σε ένα δέντρο, πριν απλώσεις το χέρι για να το πιάσεις. Αφετέρου οι βασικοί τους συνδυασμοί παράγουν έναν αστείρευτο πλούτο προτάσεων που μπορούν να οργανωθούν και να ταξινομηθούν. Σημειωτέον ότι στο φυσικό κόσμο δεν υπάρχουν ούτε ευθείες ούτε κύκλοι, ότι οι γεωμετρικές έννοιες είναι εξιδανικευμένες και απαλλαγμένες από κάθε υλικότητα (για παράδειγμα, ένα σημείο δεν έχει μέρη, άρα είναι *άτομο*, όμως ένα ευθύγραμμο τμήμα είναι απείρως διχοτομήσιμο, με διαδοχικά τμήματα που έχουν όλο και μικρότερο μήκος, αλλά *έχουν* μήκος, ενώ το όριό τους είναι ένα σημείο το οποίο δεν έχει μήκος). Είναι όμως έννοιες αρκετά ισχυρές ώστε να αποδίδουν κάποιες ιδιότητες των σχημάτων που απαντούν στο φυσικό κόσμο. Όχι όλες τις ιδιότητες, αλλά αυτές που αποφασίζει η Γεωμετρία να ασχοληθεί μαζί τους: Σύγκριση (άρα και μέτρηση), σχετική θέση, ισότητα και ομοιότητα κτλ. Και δημιουργεί ένα υπόβαθρο αρκετά στέρεο ώστε επάνω του να στηριχτεί και η μηχανική του Αρχιμήδη, και η αστρονομία του Πτολεμαίου, αλλά και η μετέπειτα ανάπτυξη των επιστημών από τους Άραβες, τους Ινδούς, ή τους Αναγεννησιακούς ευρωπαίους.

Θεμελιώδη επινοήματα της κλασικής Γεωμετρίας

Από τις βασικότερες ίσως έννοιες της κλασικής Γεωμετρίας είναι αυτή των *άρρητων λόγων*. Σε αντίθεση με την προεπιστημονική αντιμετώπιση των Πυθαγόρειων, οι οποίοι δεν μπόρεσαν να ενσωματώσουν την τετραγωνική ρίζα του αριθμού 2 στο σύστημά τους, καθώς κατ'αυτούς τα πάντα ανάγονται στους ακέραιους αριθμούς, η κατασκευή του Ευδόξου ενσωματώνει όλους τους (θετικούς) άρρητους με τρόπο ισοδύναμο με τη θεωρία των τομών του Ντέντεκιντ: Η σύγκριση δύο λόγων α και β επιτυγχάνεται αν βρεθεί ένας ρητός λόγος (δηλαδή ένα κοινό κλάσμα) μικρότερος του α και μεγαλύτερος του β, οπότε $\alpha>\beta$. Δηλαδή κάθε άρρητος λόγος α χωρίζει τους ρητούς λόγους σε δύο σύνολα, όλους όσοι είναι μικρότεροι από αυτόν και όσοι είναι μεγαλύτεροι από αυτόν. Και η σύγκριση λόγων είναι εφικτή χάρη στον χιαστί πολλαπλασιασμό που οδηγεί σε σύγκριση ευθυγράμμων τμημάτων, δηλαδή μηκών, τα οποία προκύπτουν από πολλαπλασιασμό μηκών με ακεραίους, δηλαδή από πρόσθεση μηκών. Όλα αυτά είναι τεκμηριωμένα λογικά, αλλά και ξεκινούν από βασικές εμπειρίες, οπτικές και προμαθηματικές: όλοι γνωρίζουν τι είναι το μισό ή το διπλάσιο ενός μήκους.

Συγγενική έννοια είναι αυτή του ορίου, που προκύπτει ως αποτέλεσμα μιας ατέρμονης διαδικασίας, και την απαντάμε στη μελέτη μηκών, εμβαδών, και όγκων, ιδίως όταν πρόκειται για καμπυλόγραμμα σχήματα, αλλά όχι μόνο: ο όγκος του τετραέδρου υπολογίζεται διώχνοντας δύο πρίσματα (των οποίων ο όγκος είναι υπολογίσιμος αναγόμενος σε παραλληλεπίπεδο) και κρατώντας δύο τετράεδρα με πλευρά μισή από την αρχική. Επαναλαμβάνοντας προκύπτουν 2^N τετράεδρα, των οποίων ο συνολικός όγκος είναι $1/4^N$ του αρχικού και τείνει στο μηδέν (με σημερινή ορολογία) χωρίς ποτέ να μηδενίζεται[1]. Παρομοίως, τα διαδοχικά εγγεγραμμένα και περιγεγραμμένα πολύγωνα δεν ταυτίζονται ποτέ με τον κύκλο, κι όμως το όριο των εμβαδών τους *είναι* το εμβαδόν του κύκλου.

Σ' αυτά υπάρχει ένα παράδοξο. Στον πραγματικό κόσμο όλες οι διαδικασίες είναι πεπερασμένες. Για να βρεις έναν όγκο γεμίζεις με άμμο, νερό ή κρασί αυτό που θέλεις να μετρήσεις και μετά το χύνεις σε δοχεία γνωστής χωρητικότητας. Κι αν δε βγαίνει ακριβώς, συγκρίνεις ύψη όταν η διατομή είναι σταθερή. Ομοίως, όταν θέλεις να ράψεις ένα παντελόνι, ο ράφτης σου παίρνει τα μέτρα με μια μεζούρα την οποία

[1] Σημειωτέον ότι το αποτέλεσμα αυτό δεν μπορεί να αποδειχτεί με σπάσιμο της πυραμίδας σε πεπερασμένο αριθμό πρισμάτων: Πρόκειται για ένα από τα περίφημα προβλήματα του Χίλμπερτ , που απαντήθηκε το 1900 από τον Dehn.

ξετυλίγει και τεντώνει, όχι με μια αρθρωτή τεθλασμένη. Γιατί λοιπόν η Γεωμετρία καταφεύγει σε ατέρμονες διαδικασίες όταν στην πράξη υπάρχουν απλούστατες διαδικασίες που δίνουν το ίδιο αποτέλεσμα;

Η απάντηση εδώ είναι διπλή. Αφενός η πρακτική μέτρηση έχει ανάγκη από την υλική υπόσταση των σωμάτων: Ο καθένας μπορεί να τεντώσει μια κλωστή, με ποια διαδικασία σκέψης όμως μπορείς να τεντώσεις μια άυλη καμπύλη; Δύσκολο, πολύ δύσκολο. Από την άλλη, από τη στιγμή που η ατέρμονη διαδικασία γίνεται αποδεκτή, εφαρμόζοντάς την λύνεις το πρόβλημα μια για πάντα. ***Έχεις αποδείξει*** *ότι ο όγκος* ***κάθε*** *πυραμίδας είναι το ένα τρίτο του αντίστοιχου πρίσματος, ότι ο λόγος της περιφέρειας προς τη διάμετρο* ***κάθε*** *κύκλου είναι π*, και δεν χρειάζεται κάθε φορά να αδειάζεις μια πυραμίδα κρασί σε μισόκιλα και κατοσταράκια – αρκεί να μετρήσεις μήκη.

Ενσωματώνοντας το δυνάμει άπειρο και προσεγγίζοντας το συνεχές μέσω του διακριτού, η κλασική Γεωμετρία μπαίνει με το πρώτο της βήμα στα βαθιά νερά που χαρακτήρισαν την εξέλιξη της μαθηματικής σκέψης. Ο απειροστικός λογισμός, το μέγα θέμα της διατήρησης ιδιοτήτων με το πέρασμα στο όριο, η αντιστοίχιση αλγεβρικών σχέσεων με καμπύλες και επιφάνειες, και τόσα άλλα στην κλασική Γεωμετρία εδράζονται.

Φιλοσοφικοί σχολιασμοί της κλασικής Γεωμετρίας

Τα *Στοιχεία* είναι έργο μνημειώδες, είναι υπόδειγμα έκθεσης ενός αξιωματικού συστήματος και των συνεπειών του. Ξεκινάει από το τι εστί σημείο και καταλήγει στην ύπαρξη και τις ιδιότητες των πέντε κανονικών πολυέδρων. Αλλά ήδη από τη συγγραφή του δεν καλύπτει όλη τη γεωμετρική γνώση της εποχής του: κάτι τέτοιο θα ήταν ανέφικτο. Αντίθετα, είναι το βιβλίο αναφοράς, πάνω στο οποίο γίνονται σχόλια, προσθήκες, προεκτάσεις, αναιρέσεις από κατοπινούς και σύγχρονους.

Πολλά από τα αρχικά σχόλια είναι φιλοσοφικού τύπου και δεν προσθέτουν τίποτε στο μαθηματικό περιεχόμενο. Και αρκετά πηγάζουν από τις ιδιαιτερότητες του απείρου και του μηδέν: Η ευθεία δεν αποτελείται από σημεία, διότι τότε αυτά που δεν έχουν μέγεθος παράγουν κάτι που έχει μέγεθος (μήκος απλατές). Όμως τα σημεία εμφανίζονται όταν οι ευθείες τέμνονται, και τρεις ευθείες σε γενική θέση ορίζουν τρίγωνο με τρεις κορυφές, και οι σημαντικές ευθείες του τριγώνου είναι συντρέχουσες σε άλλα σημεία, ορθόκεντρα, κέντρα βάρους κτλ. Όλα αυτά τα σημεία προϋπάρχουν ή εμφανίζονται μετά την εκτέλεση της νοητικής πράξης «τομή ευθειών»; Όποια απάντηση και να δώσει ο φιλόσοφος σε ερωτήματα τέτοιου τύπου οι αποδείξεις και οι ιδιότητες των σχημάτων δεν αλλάζουν.

Κοιτώντας προσεχτικότερα, αν αποδεχτεί κανείς ότι οι γραμμές αποτελούνται από άπειρο πλήθος σημείων, προκύπτει το εξής: Κάθε ευθύγραμμο τμήμα εφαρμόζει ακριβώς στο διπλάσιό του μέσω της συνάρτησης $x \rightarrow 2x$, και αυτό μπορεί να εκφραστεί γεωμετρικά, π.χ. με κατασκευή τριγώνου με πλευρές 1 και 2 και θεώρηση όλων των παραλλήλων προς την τρίτη πλευρά (και με πολλούς άλλους τρόπους). Έτσι το μικρότερο έχει ίσο πλήθος σημείων με το μεγαλύτερο, ενώ έχει μισό μήκος. Αυτό απλά σημαίνει ότι οι γνωστοί νόμοι της αριθμητικής (καθώς και η παραδοχή του Ευκλείδη, *το μέρος μικρότερο του όλου*) παύουν να ισχύουν για το όντως άπειρο. Χρειάστηκαν πάνω από 2000 χρόνια για να δαμαστεί η έννοια του απείρου από τον Καντόρ, τον Ράσελ, και λοιπούς. Όσο όμως μιλάμε για πεπερασμένα μήκη, η παραδοχή του Ευκλείδη ισχύει. Καθώς και όλη η γεωμετρία των μηκών που στηρίζεται πάνω της.

Σχόλια, ερμηνείες και παρατηρήσεις φιλοσοφικού τύπου έγιναν άφθονα πάνω στον Ευκλείδη, ιδίως στους ορισμούς του. Επιτρέπεται να ορίσεις πράγματα με αρνητικό τρόπο (ου μέρος ουθέν, μήκος απλατές); Είναι η γωνία *ποσόν, ποιόν*, ή *σχέση*;

Σπάνια οι αιτιάσεις αυτού του τύπου οδηγούν σε συμπεράσματα με μαθηματικό ενδιαφέρον. Είναι σαν η μαμά φιλοσοφία να έχει σκυλιάσει που το παιδάκι της μεγάλωσε και πορεύεται μόνο του και το φορτώνει με άχρηστες συμβουλές[2]. Και ενώ οι φιλόσοφοι ασχολούνται με την οντολογική πλευρά των μαθηματικών εννοιών, οι μαθηματικοί ασχολούνται με το να αποδεικνύουν θεωρήματα.

Μαθηματικοί σχολιασμοί της κλασικής Γεωμετρίας

Βεβαίως, δεν είναι όλες οι παρατηρήσεις χωρίς επίπτωση. Είναι σαφές ότι δεν μπορεί κανείς να ορίσει όλους τους μαθηματικούς όρους χωρίς φαύλο κύκλο. Κάποιοι όροι οφείλουν να θεωρηθούν εξαρχής γνωστοί και κοινά αποδεκτοί, *πρωταρχικοί*. Κατάλογος πρωταρχικών όρων δεν υπάρχει στον Ευκλείδη, είναι απλά οι λέξεις που εμφανίζονται χωρίς να έχουν οριστεί (*μέρος*, *πέρας*, ...). Από εκεί και πέρα εξετάζει κανείς αν οι ορισμοί είναι λειτουργικοί ή όχι. Είναι αρκετά εύκολο να δει κανείς ότι ο ορισμός του κύκλου είναι λειτουργικότατος: οπουδήποτε υπεισέρχεται κύκλος στη συνέχεια, η ισότητα των αποστάσεων των σημείων του από το κέντρο είναι βασικό δεδομένο. Αντίθετα, ο ορισμός της ευθείας (*κείται εξίσου πάνω σ' όλα τα μέρη της*, ό,τι κι αν αυτό σημαίνει) δεν χρησιμοποιείται πουθενά. Αυτό που χρησιμοποιείται είναι η ελάχιστη απόσταση ή, ισοδύναμα, η τριγωνική ανισότητα. Και μάλιστα, ο Αρχιμήδης υιοθετώντας τον ορισμό της ελάχιστης απόστασης, μπορεί και ξεφεύγει από το επίπεδο και πραγματεύεται γαιωδαισικές σε διάφορες επιφάνειες.

Γενικώς, έχει παρατηρηθεί ότι στα *Στοιχεία* υπάρχουν πράγματα που θεωρούνται δεδομένα χωρίς να έχουν ρητά ειπωθεί, *υπόρρητα αξιώματα*, και αρκετοί σχολιαστές πρότειναν αναδιατυπώσεις του αξιωματικού συστήματος. Για παράδειγμα, από το πρώτο κιόλας πρόβλημα, ο Ευκλείδης κατασκευάζει ισόπλευρο τρίγωνο, παίρνοντας την τομή δύο ίσων κύκλων των οποίων η ακτίνα ισούται με την απόσταση των κέντρων τους. Από που προκύπτει ότι οι κύκλοι έχουν κοινό σημείο; Επειδή «το βλέπουμε»; Μήπως λείπει ένα αξίωμα του τύπου «***Κάθε κλειστή γραμμή γ χωρίζει το επίπεδο σε δύο μέρη τέτοια ώστε αν δύο σημεία βρίσκονται σε διαφορετικά μέρη, κάθε γραμμή που τα ενώνει κόβει τη γ***»;

Μπορούμε να δούμε ότι με την εισαγωγή των αρνητικών αριθμών και της άλγεβρας, το θέμα μεταγλωττίζεται: Αν μια παράσταση $f(x,y)$ μπορεί να πάρει θετικές και αρνητικές τιμές, και αν στην εξίσωση $f(x,y)=0$ αντιστοιχεί η γραμμή **γ**, τότε τα δύο μέρη αποτελούνται από τα σημεία που δίνουν διαφορετικό (σταθερό) πρόσημο στην παράσταση – για παράδειγμα, για τον κύκλο η γνωστή εξίσωση μας δίνει $x^2+y^2-r^2<0$ για το εσωτερικό του και $x^2+y^2-r^2>0$ για το εξωτερικό του.

Αντίστοιχο αξίωμα λείπει και για τις άπειρες ανοιχτές γραμμές: Δύο ημιεπίπεδα χωρίζονται από μια ευθεία: Μπορεί κανείς να πάει από το ένα στο άλλο χωρίς να περάσει από κάποιο σημείο της; Μπορείς να πας από την Ελλάδα στη Βουλγαρία χωρίς να διασχίσεις τα σύνορα; Μπορείς, πηγαίνοντας συνεχώς νότια (παρότι δεν είναι και ο πιο σύντομος δρόμος) γιατί η γη δεν είναι επίπεδη. Και γι'αυτό τα πλοία του Μαγγελάνου κατάφεραν κι έκαναν το γύρο του κόσμου. Μπορείς επίσης να το κάνεις όχι στο Ευκλείδειο επίπεδο, αλλά στο προβολικό επίπεδο, που προκύπτει από το Ευκλείδειο προσθέτοντας μία ευθεία «στο άπειρο», η οποία κόβει όλες τις υπόλοιπες ευθείες και στο οποίο δεν υπάρχουν παράλληλες ευθείες. Είναι αξιοσημείωτο ότι ένα τέτοιο αξίωμα χρησιμοποιείται για την απόδειξη της ύπαρξης παραλλήλων ευθειών. Πράγ-

---

[2] Για μια πιο διεξοδική αναφορά των φιλοσοφικών ενστάσεων στους ορισμούς του Ευκλείδη, βλέπε, π.χ. Γιάννης Πλατάρος, http://www.scribd.com/doc/17542728/%CE%9F%CE%B9-%CE%BF%CF%81%CE%B9%CF%83%CE%BC%CE%BF%CE%AF-%CF%84%CE%BF%CF%85-%CE%95%CF%85%CE%BA%CE%BB%CE%B5%CE%AF%CE%B4%CE%BF%CF%85%CF%82

ματι, αν υποθέσουμε ότι δύο ευθείες κάθετες στην ευθεία (ε) έχουν ένα κοινό σημείο, το Α, τότε και το σημείο Β, συμμετρικό του Α ως προς την (ε), είναι κοινό και στις δύο ευθείες. Αλλά η ευθεία που περιέχει το Α και το Β είναι μοναδική μόνον ***όταν*** $\boldsymbol{A \neq B}$. Μας εγγυάται κανείς ότι τα δύο ημιεπίπεδα που ορίζονται από την (ε) δεν έχουν κοινά σημεία; Όχι. Χρειάζεται κάποιο επιπλέον αξίωμα για να αποκλειστεί η περίπτωση Α=Β.

Και μια που το θίξαμε, ας συνεχίσουμε. Το πέμπτο ευκλείδειο αίτημα, της μοναδικής παραλλήλου από σημείο προς ευθεία είναι ίσως αυτό για το οποίο έχει χυθεί η πιο πολλή μελάνη, και που έφερε τις μεγαλύτερες ανατροπές στη Μαθηματική επιστήμη. Ο Ευκλείδης ισχυρίζεται, χωρίς απόδειξη, ότι από *σημείο εκτός ευθείας περνάει μια μοναδική παράλληλη ευθεία προς αυτή* – ή, πιο συγκεκριμένα, *αν δύο ευθείες τέμνουν μια τρίτη και το άθροισμα των εντός και επί τα αυτά μέρη γωνιών είναι μικρότερο των δύο ορθών, τότε τέμνονται προς αυτό το μέρος* (άρα, είναι παράλληλες μόνο όταν αυτό το άθροισμα είναι δύο ορθές, γιατί αν είναι μεγαλύτερο τέμνονται από την άλλη μεριά).

Επί αιώνες μάταια προσπάθησαν οι μαθηματικοί όλων των εθνοτήτων να αποδείξουν το Πέμπτο Αίτημα βάσει των υπολοίπων αξιωμάτων των *Στοιχείων*. Η περιγραφή όλων αυτών των προσπαθειών άνετα θα κάλυπτε όχι μία αλλά πολλές διαλέξεις, και δεν θα επεκταθούμε εδώ. Αυτό που θα επισημάνουμε είναι ότι οι προσπάθειες απόδειξης με την εις άτοπο απαγωγή δεν καταφέρνουν να αναδείξουν καμιά λογική αντίφαση αλλά αντίθετα, σχηματίζουν άλλες θεωρίες Γεωμετρίας, τις λεγόμενες μη Ευκλείδειες, με αποτελέσματα που μπορεί να φαντάζουν απίθανα, αλλά δεν μπορούν να απορριφθούν. Για παράδειγμα, αν δύο τρίγωνα είναι όμοια, τότε είναι αναγκαστικά ίσα.

Το ερώτημα που μπήκε όταν εμφανίστηκαν οι μη Ευκλείδειες Γεωμετρίες, τον $19^{ο}$ αιώνα, ήταν άλλη μια φορά φιλοσοφικού τύπου: ***Αφού υπάρχουν πολλές δυνατότητες, ποια από όλες τις Γεωμετρίες είναι η πιο σωστή;***

Το ερώτημα αυτό δεν έχει ***μαθηματική*** απάντηση. Ακόμη χειρότερα, δεν υπάρχει μαθηματική απόδειξη ότι τα Μαθηματικά στο σύνολό τους δεν περιέχουν αντιφάσεις, ούτε ότι όλα τα ερωτήματα που μπορούν να διατυπωθούν είναι αποκρίσιμα. Απλώς τα μαθηματικά λειτουργούν κι εμείς τα δουλεύουμε. Δεν είναι ο κόσμος, είναι οικοδομήματα σκέψης που μπορεί και να αποδίδουν πτυχές του κόσμου.

Το ερώτημα επομένως για το ποια Γεωμετρία είναι η πιο «*σωστή*» μπορεί να μεταφραστεί στο ποια αποδίδει καλύτερα τη δομή του Σύμπαντος, κάτι που δεν αφορά τα μαθηματικά, γιατί το Σύμπαν δεν είναι μαθηματικό αντικείμενο. Είναι ενδεχομένως πρόβλημα Φυσικής, που κι αυτό μπορεί ποτέ να μην απαντηθεί γιατί δε γνωρίζουμε αν το Σύμπαν είναι πεπερασμένο ή άπειρο, και ούτε καν είναι σίγουρο ότι οι έννοιες του πεπερασμένου και του απείρου μπορούν να χαρακτηρίσουν το Σύμπαν.

Αντίθετα, τα Μαθηματικά μπορούν να δώσουν μια απάντηση άλλου τύπου, και την έχουν δώσει: ***Αν ισχύει οποιαδήποτε από τις γεωμετρίες που προκύπτουν από τις διαφορετικές απαντήσεις στο Πέμπτο Αίτημα (μία παράλληλος, δύο ή καμία), τότε ισχύουν και οι υπόλοιπες***. Δηλαδή ή όλες είναι σωστές ή όλες λάθος, Το ποια είναι η *καλύτερη* είναι απλώς θέμα γούστου.

Η απάντηση αυτή, που οφείλεται βασικά στον Πουανκαρέ, ισχύει, γιατί μέσα σε καθεμιά από αυτές τις Γεωμετρίες μπορείς να κατασκευάσεις μοντέλα που να αποδίδουν πιστά τις άλλες δύο, αλλάζοντας την ερμηνεία των όρων και κρατώντας μόνο τις σχέσεις μεταξύ τους. Για παράδειγμα, αν στην Ευκλείδεια Γεωμετρία ονομάσουμε επίπεδο το εσωτερικό ενός κυκλικού δίσκου, ευθείες τις χορδές του και παράλληλες τις χορδές που δεν τέμνονται *μέσα* στο δίσκο, έχουμε ένα μοντέλο υπερβολικής γεωμετρίας, αν πάρουμε την επιφάνεια της σφαίρας κι ορίσουμε ως σημείο κάθε ζεύγος διαμετρικά αντίθετων σημείων έχουμε την ελλειπτική γεωμετρία.

Η ανάπτυξη της Γεωμετρίας: η θεωρία και οι αναδιατάξεις της

Η ανάπτυξη της Γεωμετρίας (και ίσως κάθε επιστημονικού κλάδου) στηρίζεται σε δύο φαινομενικά αντίθετους πόλους: την παράδοση και την ανατροπή. Ανάπτυξη σημαίνει παραγωγή νέας γνώσης, και αυτό απαιτεί τη χρήση της ήδη τεκμηριωμένης, απαιτεί τη διατύπωση ερωτημάτων μέσα στα πλαίσια της υπαρκτής θεωρίας. Όσο καλύτερα κατέχεις την παράδοση, τόσο πιο εύκολα μπορείς να την εμπλουτίσεις – γιατί ο εμπλουτισμός είναι το ζητούμενο, η επιστήμη είναι ζωντανό είδος κι όχι μουσειακό.

Από την άλλη, η παραπέρα διερεύνηση μπορεί να καταδείξει ελλείψεις και αδυναμίες της αρχικής θεωρίας, μέχρι και σφάλματα ή παραδοχές που αποδεικνύονται άσχετες με το όλο οικοδόμημα. Οι προσπάθειες ικανοποιητικής αναδιατύπωσης του αξιωματικού συστήματος των *Στοιχείων*, από την αρχαιότητα μέχρι (ας πούμε) τη διατύπωση του Χίλμπερτ, δείχνουν πώς η κριτική, η ανατροπή και η ανοικοδόμηση αποτελούν συστατικό στοιχείο της ανάπτυξης.

Δεν είναι όμως μόνο η κριτική που φέρνει ανατροπές. Είναι και η συσσώρευση νέας γνώσης που φωτίζει την παλιά με διαφορετικό τρόπο. Νέες έννοιες εισάγονται ως συντομογραφίες, ως τεχνάσματα υπολογισμού που απλοποιούν τη διερεύνηση γιατί αποφεύγεις την περιπτωσιολογία. Για παράδειγμα, οι αρνητικοί αριθμοί επιτρέπουν να κάνεις διαδοχικές πράξεις με γωνίες χωρίς να εξετάζεις κάθε φορά ποια γωνία είναι μικρότερη για να την αφαιρέσεις από τη μεγαλύτερη, ή εάν αντίθετα χρειάζεται να τις προσθέσεις γιατί η τελευταία πλευρά πέφτει έξω από το σχήμα. Εισάγοντας την προσανατολισμένη γωνία, με αρχική και τελική πλευρά, έχεις πλέον να κάνεις αλγεβρικά αθροίσματα, και το τελικό πρόσημο σου δίνει και τη θέση της τελικής ημιευθείας σε σχέση μα την αρχική.

Κάθε νέα σχέση που αποδεικνύεται λύνει ένα πρόβλημα αλλά μπορεί να γεννήσει χιλιάδες άλλα, κάθε νέα έννοια που εισάγεται αρχικά ως απλό βοήθημα, μπορεί να αποχτήσει τέτοια λειτουργικότητα, ώστε να αναδιατάξει το θεωρητικό οικοδόμημα, να αναδείξει κρυμμένες λεπτομέρειες ως σημαντικές ή αντίθετα να μετατρέψει ζητήματα που μέχρι τότε λογίζονταν θεμελιώδη, σε απλές υποπεριπτώσεις: Ακόμη και το Πέμπτο Αίτημα χάνει τη θεμελιακή του αξία (όχι την ιστορική του) μετά από την παρέμβαση του Κλάιν: ***Μια γεωμετρία ορίζεται όταν γνωρίζουμε την ομάδα μετασχηματισμών που στέλνουν τα σχήματα σε σχήματα ίσα προς τα αρχικά*** (δηλαδή τις ισομετρίες). Ιστορικά, πρώτα μπήκε το ερώτημα της ισότητας σχημάτων και πολύ μεταγενέστερα το ερώτημα ποιες πράξεις διατηρούν την ισότητα. Περίπου όπως ο άνθρωπος πρώτα μαθαίνει να περπατάει και πολύ μετά πώς λειτουργεί το μυϊκό σύστημα.

Η ιστορία των Μαθηματικών και της Γεωμετρίας ειδικότερα, είναι γεμάτη από τέτοιες ωθήσεις: Για παράδειγμα, ο απειροστικός λογισμός (και ειδικότερα το ανάπτυγμα Taylor) επιτρέπει τη διαβάθμιση της επαφής μεταξύ καμπυλών και κάποια ταξινόμηση ιδιαζόντων σημείων, τον ορισμό του εγγύτατου κύκλου και του κέντρου καμπυλότητας, των γαιωδαισικών καμπυλών μιας επιφάνειας, και πολλά άλλα. Μπορούμε έτσι να περάσουμε από μια καμπύλη Κ στην ανεπτυγμένη καμπύλη Κ΄ (τον τόπο των κέντρων καμπυλότητας της Κ), και να αναρωτηθούμε αν, με διαδοχικές εφαρμογές αυτής της πράξης, επιστρέφουμε ποτέ στην Κ. Χωρίς τις νέες έννοιες, ένα τέτοιο (απλό κατά τα άλλα) ερώτημα δεν θα μπορούσε να διατυπωθεί – και δεν διατυπώθηκε.

Τα παραδείγματα αφθονούν. Αυτό που θα μπορούσαμε να συμπεράνουμε από τις συνεχόμενες αναδιατάξεις της θεωρίας, είναι ότι κάθε Μαθηματική έννοια είναι κάτι πολύ παραπάνω από έναν ορισμό, είναι ολόκληρο το πλέγμα σχέσεων που την συνδέει με τις υπόλοιπες. Χαρακτηρίζεται δηλαδή από μια ***διπλή ιστορικότητα***: Αφενός η προφανής **χρονική** ιστορικότητα, που σημαίνει πότε μια έννοια εισάγεται και με ποια χρονική διαδοχή αποδεικνύονται οι διάφορες προτάσεις που την αφορούν. Αφετέρου **δομική**, που σημαίνει ποιες άλλες έννοιες και προτάσεις πρέπει να θεωρούνται γνωστές για να εισαχθεί (αν είναι πρωταρχική καμία), και, αντίθετα, ποιες προτάσεις (αντίστοιχα, έννοιες) στηρίζονται σ' αυτήν (και τις μέχρι «τώρα» ιδιότητές της) για να αποδειχτούν (αντίστοιχα, να εισαχθούν).

Είναι σαφές ότι η δομική ιστορικότητα μεταβάλλεται ανάλογα με τις αναδιατάξεις της θεωρίας: Το μήκος (ή η απόσταση) είναι πρωταρχική έννοια στον Ευκλείδη. Αν όμως ξεκινήσεις από την αναλυτική γεωμετρία, το μήκος δίνεται από μια τετραγωνική ρίζα αθροίσματος τετραγώνων. Ακόμη καλύτερα, αν ξεκινήσεις από το προβολικό επίπεδο μπορείς εύκολα να περάσεις στο Ευκλείδειο, απομονώνοντας μια τυχαία ευθεία που την ονομάζεις «ευθεία του απείρου», ώστε το Ευκλείδειο επίπεδο να είναι το συμπληρωματικό της υποσύνολο. Επιλέγεις δύο σημεία στην ευθεία του απείρου, τα λεγόμενα «κυκλικά σημεία», και ονομάζεις κύκλους τις κωνικές τομές που διέρχονται από αυτά. Φέρεις τις ευθείες που ενώνουν το ένα σημείο (A) με τα δύο κυκλικά, και θεωρείς την κωνική τομή που περνάει από το B και εφάπτεται στις δύο ευθείες με σημεία επαφής τα κυκλικά σημεία. Αυτή η κωνική τομή είναι εξ ορισμού ο κύκλος κέντρου A και ακτίνας AB. Αυτό μας δίνει την απόσταση των σημείων A και B και πρέπει μετά να αποδείξεις τις ιδιότητές της και την αμεταβλητότητά της. Έτσι, η απόσταση παύει να είναι πρωταρχική έννοια, η δομική της ιστορικότητα μεταβάλλεται[3].

Τέλος, η δομική ιστορικότητα δεν αφορά μόνο το corpus της επιστήμης, αλλά και την πρόσληψή του από κάθε υποκείμενο: Κάποιος που δεν έχει διδαχτεί ποτέ Αναλυτική ή Προβολική Γεωμετρία θα θεωρεί την απόσταση πρωταρχική έννοια – και καλά θα κάνει. Αυτό έχει ιδιαίτερη σημασία για τη διδασκαλία: Μπορεί ο δάσκαλος να εισάγει τις νέες έννοιες με τρόπο που να ταιριάζουν αρμονικά με τη δομική ιστορικότητα που υπάρχει στα κεφάλια των μαθητών του, παρότι στη δική του θεωρητική δομή μπορεί αυτές οι έννοιες να είναι όχι μόνο παλιές, αλλά και τετριμμένες, ακόμη και άχρηστες; Η λαθεμένη αντιμετώπιση αυτού του ζητήματος οδηγεί πολλά παιδιά στη σχολική αποτυχία και στο μίσος για τα Μαθηματικά. Η άκριτη εισαγωγή της Συνολοθεωρίας στα σχολικά Μαθηματικά είναι ίσως το γλαφυρότερο παράδειγμα μιας γενικευμένης αποτυχίας.

Η Γεωμετρία στην κοινωνία και στο σχολείο

Στη σημερινή εποχή της κυριαρχίας της εικόνας θα μπορούσε κανείς να πει ότι η Γεωμετρία βρίσκεται πίσω από κάθε τεχνολογική εφαρμογή. Πέρα από τις κλασικές εφαρμογές (στατική και αρχιτεκτονική, τροχιές βλημάτων και πυραύλων, κατασκευή φακών και κάτοπτρων, κτλ.) και τη χρήση των μαθηματικών στις άλλες επιστήμες

[3] Για πιο λεπτομερή ανάπτυξη βλέπε τη διάλεξή μου *Πλούτος και ιστορικότητα των μαθηματικών εννοιών – το παράδειγμα της γωνίας,*
http://venios.wordpress.com/2010/10/14/%CF%80%CE%BB%CE%BF%CF%8D%CF%84%CE%BF%CF%82-%CE%BA%CE%B1%CE%B9-%CE%B9%CF%83%CF%84%CE%BF%CF%81%CE%B9%CE%BA%CF%8C%CF%84%CE%B7%CF%84%CE%B1-%CF%84%CF%89%CE%BD-%CE%BC%CE%B1%CE%B8%CE%B7%CE%BC%CE%B1%CF%84/

(δομή της ύλης, έλικα του DNA, κτλ.) υπάρχουν και νεότερες τεχνολογικές εφαρμογές όπως η επεξεργασία εικόνας ή τα επίπεδα μικροκυκλώματα. Δεν χρειάζεται να τις απαριθμήσει κανείς εξαντλητικά, ούτε κανείς υποστηρίζει ότι οι μαθητές των σχολείων προορίζονται να μάθουν όλες τις τεχνολογίες. Αλλού είναι το θέμα: ***Μπορούν τα παιδιά των σχολείων, οι μελλοντικοί πολίτες να αντιμετωπίσουν τα σύγχρονα τεχνολογικά θαύματα*** (πατάς ένα κουμπί και μιλάς με την άλλη άκρη του κόσμου) ***όχι σαν προϊόντα υπερφυσικής μαγείας αλλά σαν κατανοητά ανθρώπινα επιτεύγματα;***

Αν αυτό είναι ένας από τους βασικούς στόχους της εκπαίδευσης (και για μένα είναι), έχει μεγάλη σημασία να εξετάσει κανείς το *τι*, το *πώς* και το *πότε* της κάθε μεταδιδόμενης γνώσης, τόσο στη Γεωμετρία όσο και σε όλα τα μαθήματα. Και αυτό έχοντας πάντα υπόψη ότι είναι αδύνατο να διδαχθεί οποιοδήποτε παιδί χιλιετίες συσσωρευμένης ανθρώπινης γνώσης μέσα σε δώδεκα χρόνια. Η επιλογή είναι απαραίτητη.

Το *τι* θα διδαχτεί ένας μαθητής είναι συνυφασμένο με το *γιατί* θα το διδαχτεί. Εδώ και δεκαετίες στη χώρα μας, ο στόχος της διδασκαλίας είναι η ταξινόμηση κάθε κλάσης ηλικίας μέσω πανελλήνιων εξετάσεων. Τα Μαθηματικά κατέχουν σημαντική θέση σ'αυτές, αφενός γιατί έχουν αρκετά μεγάλο βαθμό πολυπλοκότητας, αφετέρου γιατί ο έλεγχος του αποτελέσματος (σε αλγεβρική ή αριθμητική μορφή) δεν επιδέχεται αμφισβήτηση αν η εκφώνηση είναι κατάλληλη. Και για να είναι ακόμη πιο μονοσήμαντα τα πράγματα, η Γεωμετρία έχει καταργηθεί ή αντικατασταθεί από γεωμετρική επικάλυψη αλγεβρικών υπολογισμών, ενώ η οργάνωση του προβλήματος σε «*Σκέψη, Λύση, Απάντηση*» που εισαγόταν κάποτε από το Δημοτικό, έχει καταργηθεί εδώ και δεκαετίες: Τα Μαθηματικά έχουν χάσει τις γλωσσικές τους ιδιότητες, ενώ είναι ένα κατεξοχήν γλωσσικό μάθημα, καθώς απαιτεί ορθή διατύπωση προτάσεων και ακριβολογία εννοιών.

Τα Μαθηματικά, και η Γεωμετρία ιδιαίτερα, ***ισχύουν όχι επειδή τα επιβάλλει ο δάσκαλος, αλλά επειδή ο δάσκαλος τα εξηγεί***. Επειδή διατυπώνουν απορίες και δίνουν απαντήσεις, επειδή δείχνουν το ***γιατί*** των πραγμάτων, επειδή δαμάζουν το άγνωστο χρησιμοποιώντας το γνωστό, επειδή κάθε μικρός μαθητής μπορεί να μπει στη θέση του κάθε Θαλή και να αποδείξει ότι οι μεσοκάθετοι τριγώνου τέμνονται σε ένα σημείο. Κάθε παιδί που μαθαίνει Γεωμετρία είναι ένας μικρός ερευνητής που πασχίζει να συνδυάσει την εποπτεία με τη νόηση και ο ρόλος του δασκάλου είναι υποβοηθητικός. Η εκμάθηση της Γεωμετρίας είναι –θα όφειλε να είναι– καθοδηγούμενη έρευνα. Γι' αυτό η θέση της στην εκπαίδευση είναι πολύτιμη.

Επομένως, και σύμφωνα με όσα εξετάσαμε πρωτύτερα, ***αυτό που προέχει είναι η δομή και όχι η ποσότητα της ύλης.*** Πληθώρα γνώσεων χωρίς συνοχή είναι απλά σκουπίδια στον εγκέφαλο, και το μόνο που μπορούν να παράγουν είναι εξαρτημένα αντανακλαστικά: *Ποια είναι παιδί μου η παράγωγος του ημιτόνου α.χ; -άλφα συνημίτονο α.χ, κύριε. Μπράβο παιδί μου!* Αλλά το παιδί αυτό μπορεί κάλλιστα να θολώσει μπροστά στην παράσταση d(sin3u)/du γιατί δεν έχει ποτέ κατανοήσει την έννοια *μεταβλητή*.

Η αντίληψη του χώρου και η λογική ωρίμανση δομούνται σταδιακά στον άνθρωπο. Από το βρέφος που παίζει με πλαστικά σχήματα, εφαρμόζοντας τρίγωνα, τετράγωνα και κύκλους σε αντίστοιχες θήκες, μέχρι το παιδί που διπλώνοντας ένα χάρτινο τρίγωνο στις μέσες των πλευρών σε τέσσερα όμοια τρίγωνα εξετάζει εάν και πότε σχηματίζουν πυραμίδα, και έως τον έφηβο που ασχολείται με τις ιδιότητες του κύκλου των εννέα σημείων ή το παραβολικό κάτοπτρο, υπάρχει σταδιακή διαμόρφωση της γεωμετρικής αντίληψης[4]. Περνώντας διάφορα στάδια, όπως παρατήρηση – επανάληψη – κατασκευή – πειραματισμός – εξήγηση – απόδειξη, οι έννοιες πλάθονται και αναπλάθονται μέσα στον εγκέφαλο. Και οφείλουν να μην είναι ξεκρέμαστες, αλλά να συνδέονται μεταξύ τους, αναδιαμορφώνοντας τη δομική ιστορικότητα μέσα στο κάθε υποκείμενο. Να συνδέονται με τα ήδη γνωστά φωτίζοντάς τα με καινούριο φως[5]. Αντλώντας από τον πλούτο της υπάρχουσας θεωρίας, προσαρμοσμένο στις ικανότητες πρόσληψης κάθε ηλικίας (και κάθε ατόμου), αλλά χωρίς υπερφόρτωση, χωρίς κορεσμό, αφήνοντας χώρο στην περιέργεια να δουλέψει.

Ναι, συνδυάζοντας εποπτεία και νόηση, η Γεωμετρία δομείται και δομεί τη σκέψη. Τουλάχιστον όταν της αφήνουν το πεδίο ελεύθερο, όταν δεν την πνίγουν.

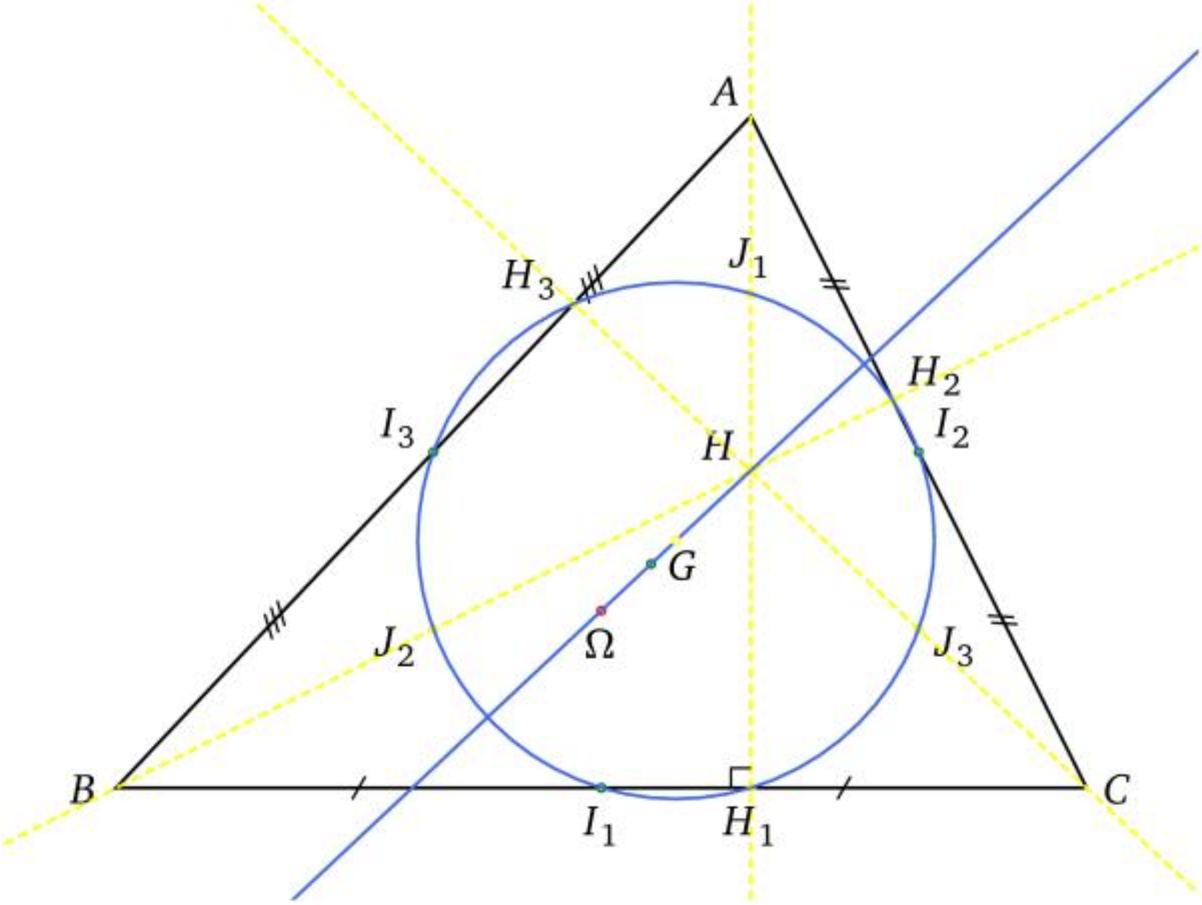
Αντί επιλόγου: Ο κύκλος των εννέα σημείων και η ορθοκεντρική τετράδα

Το παρακάτω παράδειγμα δείχνει πώς μπορούν να συσχετίζονται διάφορες έννοιες σε ένα σχήμα.

Ο λεγόμενος κύκλος του Euler έχει μάλλον εισαχθεί από άλλους μαθηματικούς (Brianchon και Poncelet το 1821, Feuerbach το 1822, Terquem επίσης). Κάπου 40 χρόνια μετά ο Hamilton (1862) απέδειξε ότι οι τρεις κορυφές ενός τριγώνου ABC μαζί με το ορθόκεντρο H αποτελούν ορθοκεντρική τετράδα, δηλαδή κάθε σημείο μεταξύ των {A,B,C,H} είναι το ορθόκεντρο του τριγώνου που σχηματίζουν τα άλλα τρία. Οι αποδείξεις των εννέα σημείων και της τετράδας είναι στοιχειώδεις.

[4] Ποτέ δεν πρέπει να υποτιμάται ο παιδευτικός ρόλος του πα;ινιδίου: Έχει πάντα πειραματικό χαρακτήρα εξάσκησης ικανοτήτων, έχει κανόνες. Και πολλά παιχνίδια συμβάλλουν στην έμπρακτη προσχολική αφομοίωση γεωμετρικών εννοιών όπως οι κατασκευές με ξυλάκια ή με Λέγκο, το κουτσό, το κρυφτό, το δίπλωμα του χαρτιού σε καραβάκι ή ζωάκι, ή ακόμη η επιλογή μιας εντολής ανάμεσα σε οχτώ, γραμμένες σε διπλωμένο χαρτί που ανοιγοκλείνει ανάμεσα σε τέσσερα δάχτυλα.

[5] Από τη στιγμή που πιστοποιείται πως γωνίες εγγεγραμμένες στο ίδιο τόξο είναι ίσες, ο κύκλος γίνεται πραγματικά το *κάτι άλλο* απ'ότι πριν: ένα επιπλέον εργαλείο σύγκρισης γωνιών.



Με τελείως στοιχειώδη τρόπο αποδεικνύεται επίσης ότι:
- Τα 4 τρίγωνα έχουν το ίδιο ορθικό τρίγωνο ($H_1H_2H_3$) , τον ίδιο κύκλο των 9 σημείων, και οι περιγεγραμμένοι κύκλοι τους είναι ίσοι.
- Δύο τρίγωνα της τετράδας έχουν μια κοινή πλευρά, ένα κοινό ύψος ενώ οι υπόλοιπες πλευρές του ενός είναι ύψη του άλλου και αντίστροφα.
- Οι ευθείες I_kJ_k που συνδέουν τα μέσα ομόλογων πλευρών και υψών είναι διάμετροι του κύκλου των 9 σημείων και μεσοκάθετοι του ορθικού τριγώνου.
- Οι τρεις πλευρές και τα τρία ύψη ενός τριγώνου της ορθοκεντρικής τετράδας είναι οι έξι εσωτερικές και εξωτερικές διχοτόμοι του ορθικού τριγώνου, και τα σημεία {A,B,C,H} είναι τα κέντρα του εγγεγραμμένου και των παρεγγεγραμμένων κύκλων στο ορθικό τρίγωνο.
- Για κάθε τρίγωνο της ορθοκεντρικής τεράδας, το ορθόκεντρό του, το κέντρο βάρους του και το κέντρο του περιγεγραμμένου κύκλου σ’αυτό είναι ευθυγραμμισμένα με το κέντρου του (κοινού και στα τέσσερα) κύκλου των 9 σημείων σε σταθερές αναλογίες.

Αν προσθέσει κανείς ότι ο κύκλος των 9 σημείων εφάπτεται με τον εγγεγραμμένο και τους τρεις παρεγγεγραμμένους καθενός από τα 4 τρίγωνα της ορθοκεντρικής τετράδας (Feuerbach), δηλαδή 4X4=16 νέα σημεία, δύσκολα αποφεύγει έναν πρώτο ίλιγγο. Μετά, αν έχει κέφι, διατυπώνει ερωτήματα και εικασίες.

....