ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ - ΕΙΣΗΓΗΣΕΙΣ

7ης ΗΜΕΡΙΔΑΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

Καλαμαρί
ΕΛΛΗΝΟΓΑΛΛΙΚΗ ΣΧΟΛΗ

Θέμα:
“Η μαθηματική απόδειξη ως πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης”

Σάββατο 11 Μαρτίου 2017

Επιμέλεια:
Σαράφης Ιωάννης - Πέρδος Αθανάσιος

Πρόλογος

Στην έκδοση αυτή περιλαμβάνονται οι εργασίες των εισηγητών που αναλύουν με θεωρητικό και πρακτικό τρόπο τη διδασκαλία της Μαθηματικής Απόδειξης.

Η επιμέλεια έγινε με γνώμονα την πρακτική αξιοποίηση των εργασιών από μάχιμους εκπαιδευτικούς που είτε κάνουν τα πρώτα βήματα τους στη διδασκαλία του μαθήματος είτε έχουν σημαντική εμπειρία αλλά θέλουν να εντοπίσουν μικρές λεπτομέρειες που θα βελτιώσουν περαιτέρω τη διδασκαλία τους.

Η 7η Ημερίδα Μαθηματικών διεξήχθη στις 11/3/2017 στην Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί σε συνεργασία με τους Σχολικούς Συμβούλους Μαθηματικών Ανατολικής Θεσσαλονίκης,κ.Ανδρέα Πούλο, Κιλκίς-Λαγκαδά-Ωραιοκάστρου,κ. Ιωάννη Θωμαΐδη και το Παράρτημα Κεντρικής Μακεδονίας της Ελληνικής Μαθηματικής Εταιρείας

Οφείλουμε να ευχαριστήσουμε για την ευγενική χορηγία τον κ. Παναγιώτη Κανδύλα.

Με εκτίμηση
Η οργανωτική Επιτροπή
Ιωάννης Σαράφης – Μαθηματικός
Αθανάσιος Πέρδος – Φυσικός – Πληροφορικός
Χριστίνα Τίκβα – Πληροφορικός

ΠΡΟΓΡΑΜΜΑ ΗΜΕΡΙΔΑΣ

17:30 – 17:45. ΠΡΟΣΕΛΕΥΣΗ – ΕΓΓΡΑΦΕΣ
17:45 – 18:00. ΕΝΑΡΞΗ – ΧΑΙΡΕΤΙΣΜΟΙ

Μ Ε Ρ Ο Σ Π Ρ Ω Τ Ο

18:00 – 18:30. κ. Σωτήρης Μαρκάδας , Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης 13ης Περιφέρειας Θεσσαλονίκης
«Η μαθηματική απόδειξη στον αστερισμό του Δημοτικού σχολείου. Εκπαιδευτικά ασύμβατη ή διδακτικά εφικτή;»

18:30 – 19:00. κ. Αθανάσιος Μάγκος, Μαθηματικός Πρότυπου Πειραματικού Γυμνάσιου Πανεπιστημίου Μακεδονίας
«Η απόδειξη στα Μαθηματικά του Γυμνασίου»

19:00 – 19:30. κ. Αλέξανδρος Συγκελάκης , Μαθηματικός Πειραματικού ΓΕ.Λ. Ηρακλείου
«Αξιοποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας με στόχο την αναβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών του Λυκείου»

19.30 – 19.45. ΔΙΑΛΕΙΜΜΑ

Μ Ε Ρ Ο Σ Δ Ε Υ Τ Ε Ρ Ο

20:00 – 20:15. Απονομή τιμητικής πλακέτας στον κ. Πολυχρόνη Μωϋσιάδη για την προσφορά του στη Μαθηματική Εκπαίδευση.

20:15 – 20:45. κ. Διονύσιος Λάππας , Αναπληρωτής Καθηγητής Τομέων Άλγεβρας και Γεωμετρίας μήματος Μαθηματικών Ε.Κ.Π.Α.
«Σχολικά Μαθηματικά και Μαθηματικά: η απόδειξη στην "Σχολική" Γεωμετρία»

20:45 – 21:15. κ. Γιάννης Θωμαΐδης , Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών Κιλκίς-Λαγκαδά-Ωραιοκάστρου
«Η μαθηματική απόδειξη ως μείζον πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης.Πώς μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε ;»

Σ Τ Ρ Ο Γ Γ Υ Λ Ο Τ Ρ Α Π Ε Ζ Ι

21:15 – 22:00. Συμμετέχουν όλοι οι εισηγητές

Η μαθηματική απόδειξη στον αστερισμό του Δημοτικού σχολείου. Εκπαιδευτικά ασύμβατη ή διδακτικά εφικτή;

Δρ Μαρκάδας Σωτήρης
Δάσκαλος
Σχολικός Σύμβουλος Πρωτοβάθμιας Εκπαίδευσης (13η περ. Θεσ/νίκης)
markadas@sch.gr

Περίληψη
Ο τρόπος με τον οποίο τα μικρά παιδιά προσπαθούν να αποδείξουν ότι κάτι ισχύει πάντα, είναι ένας σχετικά νέος και ενδιαφέρον τομέας έρευνας. Οι αποδείξεις τους είναι προ-τυπικές και παρουσιάζονται με "ανεπίσημη" μαθηματική γλώσσα. Η απόδειξη (proof) και η λειτουργία συλλογισμού (reasoning) είναι δύο σημαντικοί στόχοι διδασκαλίας που συνδέονται περισσότερο με το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Ωστόσο, ακόμη και πολύ μικρά παιδιά μπορούν να ασχοληθούν με τον μαθηματικό συλλογισμό και την άτυπη απόδειξη. Η εργασία των μαθητών-τριών με προ-τυπικές, μη φορμαλιστικές αποδείξεις, βοηθάει τη δημιουργία μιας ισχυρής βάσης για ανάπτυξη τυπικών αποδείξεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Τρεις μέθοδοι απόδειξης που θα μπορούσαμε να προσεγγίσουμε διδακτικά στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση (Mooney et al., 2014, σ. 251) είναι η παραγωγική απόδειξη (deductive proof), η διάψευση από αντι-παράδειγμα (disproof by counter-example) και η απόδειξη διά ''εξάντλησης'' (proof by exhaustion), αξιοποιώντας το παιδαγωγικό αξίωμα του Bruner (1960, σ. 33) πως «οποιαδήποτε έννοια μπορεί να διδαχτεί στα παιδιά αρκεί να προσαρμοστεί στο νοητικό επίπεδο τους».

Εισαγωγή
Μια σύντομη περιδιάβαση στα προγράμματα σπουδών (ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ) του Δημοτικού, Γυμνασίου και Λυκείου αποκαλύπτει πως το ουσιαστικό *''απόδειξη''* εμφανίζεται για πρώτη φορά στο Πρόγραμμα Σπουδών της Β΄ Γυμνασίου[1] ενώ το ρήμα *''αποδεικνύω''* εμφανίζεται για πρώτη φορά στο Πρόγραμμα Σπουδών της Γ΄ Γυμνασίου[2]. Πουθενά στο αντίστοιχο πρόγραμμα του Δημοτικού δεν τίθεται ως διδακτικός στόχος ''να αποδείξουν'' οι μαθητές-τριες την αλήθεια ή ισχύ μιας πρότασης ή ενός μαθηματικού συλλογισμού. Όμως μια προσεκτική ματιά στους *Ειδικούς Σκοπούς* του Αναλυτικού Προγράμματος Σπουδών για τα Μαθηματικά του Δημοτικού αναδεικνύει πως ένας από αυτούς τους σκοπούς είναι «*η εξοικείωση με τη διαδικασία παραγωγής συλλογισμών και την αποδεικτική διαδικασία*»[3].
Αναφορές στην Μαθηματική Απόδειξη εμφανίζονται πλέον στα περισσότερα προγράμματα σπουδών πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης άλλων χωρών. Οι αναφορές αυτές περιλαμβάνουν και τις λειτουργίες συλλογισμού. Για παράδειγμα, στο *«The Principles and Standards for School Mathematics»* (NCTM, 2000, σ. 56) των Η.Π.Α., διαβάζουμε πως «ο συλλογισμός η και απόδειξη πρέπει να είναι αναπόσπαστο κομμάτι των μαθηματικών εμπειριών των μαθητών-τριών από το Νηπιαγωγείο μέχρι και το Λύκειο». Το εθνικό πρόγραμμα σπουδών της Αγγλίας αναφέρει πως όλοι οι μαθητές-τριες πρέπει να καλλιεργούν την «μαθηματική σκέψη, ερευνώντας, εικάζοντας σχέσεις και γενικεύσεις και αναπτύσσοντας επιχειρήματα, αιτιολογήσεις ή αποδείξεις χρησιμοποιώντας μαθηματική γλώσσα» (DfE, 2013, σ. 99).
Είναι δυνατόν να αποτελεί η Μαθηματική Απόδειξη διδακτικό ζητούμενο στο Δημοτικό Σχολείο ή είναι εκπαιδευτικά ασύμβατη; Μπορεί και πρέπει κάποιος δάσκαλος-α να μυήσει τους

[1] Φ.Ε.Κ. 303 τ. Β΄/13-03-2003: ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ Μαθηματικών, σελ. 4024.
[2] Φ.Ε.Κ. 303 τ. Β΄/13-03-2003: ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ Μαθηματικών, σελ. 4032.
[3] Φ.Ε.Κ. 303 τ. Β΄/13-03-2003: ΔΕΠΠΣ-ΑΠΣ Μαθηματικών, σελ. 3987.

μαθητές-τριες του στη Μαθηματική Απόδειξη από το Δημοτικό σχολείο; Σε ποια ηλικία πρέπει να προσεγγίζεται διδακτικά από τους μαθητές-τριες; Και φυσικά για να απαντηθούν τα παραπάνω ερωτήματα, τι ακριβώς εννοούμε λέγοντας Μαθηματική Απόδειξη; Υπάρχει ένας αδιαμφισβήτητος ορισμός αποδεκτός από το σύνολο των μαθηματικών, εκπαιδευτικών και ερευνητών στη διδακτική των Μαθηματικών;

Απόδειξη και λειτουργία συλλογισμού (reasoning) στα Μαθηματικά

Σύμφωνα με το *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας*[4] απόδειξη είναι «ο συλλογισμός μέσω του οποίου γίνεται εμφανής η ορθότητα μιας πρότασης».

Ο Haylock (2010, σ. 50), θεωρεί πως απόδειξη είναι μια πλήρης και πειστική επιχειρηματολογία για να υποστηριχτεί η αλήθεια ενός ισχυρισμού στα Μαθηματικά, η οποία προχωρά με λογικά βήματα από κάποιες παραδοχές σε ένα συμπέρασμα. Για τον Τουμάση (1994, σ. 363), «η απόδειξη είναι η συλλογιστική διαδικασία η οποία ξεκινά από ένα σύνολο υποθέσεων και μέσω μιας σειράς διαδοχικών συμπερασμάτων καταλήγει σ' ένα τελικό συμπέρασμα, με τέτοιο τρόπο ώστε η οποιαδήποτε αμφιβολία γύρω από το τελικό συμπέρασμα θα πρέπει να αναζητηθεί πίσω στις υποθέσεις μάλλον, παρά στη λογική αναγκαιότητα των διαδοχικών συμπερασμάτων». Η λειτουργεία συλλογισμού (reasoning) που συχνά συντροφεύει την έννοια της Μαθηματικής απόδειξης στις περισσότερες έρευνες αλλά και στα προγράμματα σπουδών, αποτελεί «μία από τις θεμελιακές λειτουργίες του ανθρώπινου γνωστικού συστήματος. Επιτρέπει την αναγνώριση σχημάτων, ομοιοτήτων και διαφορών, δομών και κανονικοτήτων, την επίλυση προβλημάτων όπως κι ελέγχους, επικυρώσεις μιας δράσης ή μιας απόφασης, ερμηνεία και εξήγηση» (Τζεκάκη, 2007, σ. 406). Διαχωρίζεται σε επαγωγικό συλλογισμό (inductive reasoning) και παραγωγικό συλλογισμό (deductive reasoning[5]). Ο διαχωρισμός αυτός περνάει και στις μελέτες για την Μαθηματική απόδειξη (inductive proof – deductive proof).

Οι Cabassut et al. (2012), υποστηρίζουν πως είναι δύσκολο κάποιος να εξηγήσει επακριβώς τι είναι μια απόδειξη, ειδικά σε κάποιον που είναι αρχάριος όπως ένα παιδί στο σχολείο. Οι εκπαιδευτικοί αντιλαμβάνονται διαφορετικά τη διάκριση μεταξύ επιχειρηματολογίας και απόδειξης. Έρευνες δείχνουν πως οι μαθητές και οι εκπαιδευτικοί συχνά ταξινομούν επιχειρήματα ως αποδείξεις με διαφορετικό τρόπο από την αποδεκτή φορμαλιστική μαθηματική κατηγοριοποίηση. Οι έρευνες για τις πεποιθήσεις σχετικά με την απόδειξη έχουν επικεντρωθεί στη διερεύνηση των αντιλήψεων των εκπαιδευτικών της πρωτοβάθμιας και δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης. Οι πεποιθήσεις τους σχετικά με την απόδειξη περιστρέφονται γύρω από δύο βασικά ζητήματα: αυτό που μετράει ως απόδειξη μέσα στην τάξη και αν η εστίαση στη διδασκαλία της απόδειξης είναι πάνω στο γνωστικό προϊόν ή στη διδακτική διαδικασία. Ένας αρκετά μεγάλος αριθμός εκπαιδευτικών τείνουν να δεχθούν εμπειρικά επιχειρήματα ως αποδείξεις.

Η διδασκαλία της απόδειξης θα πρέπει να ξεκινάει από την ερώτηση ‘’τι είναι η απόδειξη;’’ Κεντρικό ρόλο στις απαντήσεις έχει η έννοια της υποθετικοπαραγωγικής μεθόδου, η οποία είναι βασική για όλες τις επιστήμες: οι μαθητές αντλούν συνέπειες από μια θεωρία και τις ελέγχουν βάσει πραγματικών περιστατικών. Η προσέγγιση της απόδειξης αποτελείται από τρεις φάσεις (Jahnke, 2005), μια πρώτη φάση διερευνήσεων με άτυπους συλλογισμούς (Α΄ τάξη Δημοτικού και μετά), μια δεύτερη φάση υποθετικής-αφαιρετικής σκέψης (Β΄ Γυμνασίου και μετά) και μια τρίτη φάση αυτόνομων μαθηματικών θεωριών (Λύκειο και Πανεπιστήμιο). Η πρώτη φάση χαρακτηρίζεται από άτυπη επιχειρηματολογία και περιλαμβάνει ό,τι έχει κληθεί «προ-τυπικές αποδείξεις» (Kirsch, 1979), «χειροπρακτικές αποδείξεις και αποδείξεις με παραδείγματα» (Wittmann & Müller, 1988) και «αποδείξεις που εξηγούν» σε αντίθεση με «αποδείξεις που μόνο αποδεικνύουν» (Hanna, 1989). Αυτή η προσέγγιση υλοποιείται στη πρωτοβάθμια και κατώτερη δευτεροβάθμια εκπαίδευση σε αγγλόφωνες χώρες, καθώς και στη Γερμανία (Jahnke, 2010).

---

[4] Μπαμπινιώτης, Γ. (1998). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας.* Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας.

[5] Συναντάμε τον όρο με διαφορετικές αποδόσεις στην ελληνική βιβλιογραφία, όπως Αφαιρετική Λογική, Συνεπαγωγικό Συλλογισμό, Παραγωγικό Συλλογισμό, Παραγωγική Συλλογιστική.

Πολλοί ερευνητές και εκπαιδευτικοί θεωρούν δεδομένο πως η διδασκαλία της απόδειξης είναι ορθό να ξεκινάει στη Δευτεροβάθμια εκπαίδευση. Ο Τουμάσης (1994, σ. 362) θέτει το ερώτημα «*Πότε θα έπρεπε να διδάσκεται η απόδειξη στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση; Με ποιο τρόπο θα έπρεπε να μυηθούν οι μαθητές στον αποδεικτικό (παραγωγικό) τρόπο σκέψης;*». Η υπέρβαση της Πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης γίνεται γιατί «*οι πιο πολλοί μαθητές αντιμετωπίζουν δυσκολίες με την κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης και συνήθως δεν φθάνουν ποτέ στο επίπεδο αυτό μαθηματικής ωριμότητας… Ο αργός ρυθμός της διανοητικής ανάπτυξης, εμποδίζει την ικανότητα των περισσότερων παιδιών να σκεφτούν υποθετικά ή παραγωγικά πριν την ηλικία των 14 με 15 χρόνων*»[6]. Και αυτό εξηγείται αν ανατρέξουμε στα στάδια νοητικής ανάπτυξης του Piaget διότι «*κατά τη διάρκεια της περιόδου μεταξύ 14 και 15 χρόνων - ενωρίτερα για κάποια παιδιά κι αργότερα για κάποια άλλα - τα παιδιά περνούν από το στάδιο της συγκεκριμένης σκέψης, όπου η σκέψη τους είναι σχεδόν πλήρως προσδεδεμένη στις συγκεκριμένες αντιλήψεις τους, στο στάδιο της τυπικής σκέψης, όπου αρχίζουν να σκέφτονται υποθετικά και παραγωγικά*»[7]. Οι αναφορές αυτές όμως γίνονται για την τυπική/αυστηρή μαθηματική απόδειξη και γι' αυτό επισημαίνεται ότι «*η ικανότητα ενός παιδιού στις τυπικές αποδείξεις αρχίζει μέσα από τις προηγούμενες προσπάθειες για σχηματισμό και κατανόηση διαφόρων γενικεύσεων. Τα παιδιά των 12-14 χρόνων είναι σε θέση να αναγνωρίζουν πρότυπα και συσχετίσεις, ακόμη και να τα επεκτείνουν και να τα περιγράφουν, αλλά δεν μπορούν να τα δικαιολογήσουν ή να τα αποδείξουν*»[8].

Νεότερες όμως έρευνες (Τζεκάκη, 2007, σελ. 292), οδηγούν στην εδραίωση της άποψης πως «*με εκκίνηση την προσχολική και πρώτη σχολική ηλικία, οι μαθητές θα μάθουν βαθμιαία να εξηγούν να δικαιολογούν και να τεκμηριώνουν ώστε όταν φτάσουν σε μεγαλύτερες ηλικίες όχι μόνο να αντιμετωπίζουν με άνεση τις τυπικές μαθηματικές αποδείξεις αλλά και να κατανοούν τη δομή της μαθηματικής επιστήμης όπως και γενικότερα κάθε επιστημονικής προσέγγισης. Όπως και η επίλυση προβλήματος, η μαθηματική απόδειξη είναι δυνατό να αναπτυχθεί στα παιδιά και με την έννοια αυτήν να ενταχθεί στη διδακτική διαδικασία*». Τα ερευνητικά συμπεράσματα του Piaget για το *εγωκεντρικό* παιδί αναθεωρούνται από μεταγενέστερες έρευνες που καταλήγουν πως το παιδί από μικρή ηλικία έχει ένα συνεκτικό λογικό σύστημα και δοκιμάζει να έχει εξηγήσεις για γεγονότα και φαινόμενα. Συγκροτεί έτσι ένα ερμηνευτικό σύστημα χωρίς αντιφάσεις. Ακόμα και παιδιά προσχολικής ηλικίας ανακαλύπτουν κοινές ιδιότητες, βρίσκουν κανόνες σε πρότυπα και δικαιολογούν τις απαντήσεις τους (Τζεκάκη, 2010, σ. 409).

Ο τρόπος με τον οποίο τα μικρά παιδιά προσπαθούν να αποδείξουν ότι κάτι ισχύει πάντα είναι ένας σχετικά νέος και ενδιαφέρον τομέας έρευνας. Οι αποδείξεις τους είναι προ-τυπικές δηλαδή παρουσιάζονται με ανεπίσημη γλώσσα και βασίζονται στη διαίσθηση τους. Σύμφωνα με τον Lakatos (1996, σ. 220), υπάρχει ένα απλό σχήμα μαθηματικής ανακάλυψης ή σχήμα ανάπτυξης των άτυπων μαθηματικών θεωριών. Τα πρώτα δύο στάδια είναι η διατύπωση κάποιας αρχικής εικασίας και η παρουσίαση μιας απόδειξης δηλαδή ένα σχηματικό νοητικό πείραμα ή επιχείρημα που αποσυνθέτει την αρχική εικασία σε ένα σύνολο υποεικασιών ή λημμάτων.

Άλλοι ερευνητές χρησιμοποιούν τον όρο "άτυπες αποδείξεις". Ο Balacheff (1988)[9] ορίζει ως άτυπη απόδειξη εκείνη που περιλαμβάνει απλοϊκά επιχειρήματα, εμπειρικά επιχειρήματα και επιχειρήματα τα οποία βασίζονται σε πρακτικές πειραματικές διαδικασίες. Όταν χρησιμοποιείται αυτό το είδος της απόδειξης, η ορθότητα μιας πρότασης στηρίζεται σε παρατηρήσεις. Οι Garnier και Taylor (1999)[10] υποστηρίζουν ότι η άτυπη απόδειξη αποτελεί τη βάση και μπορεί να θεωρηθεί ως μια προσέγγιση, αλλά και μια πιο φιλική εκδοχή της τυπικής απόδειξη. Η άτυπη απόδειξη λειτουργεί ως μέσο επικοινωνίας της αιτιολόγησης, με λέξεις, σύμβολα, διαγράμματα, κ.ά., χωρίς την αυστηρότητα που χαρακτηρίζει κάθε τυπική απόδειξη.

---

[6] Τουμάσης, 1994, σελ. 364.
[7] Τουμάσης, 1994, σελ. 365.
[8] Τουμάσης, 1994, σελ. 365.
[9] Όπως αναφέρεται στο Στυλιανίδης, Στυλιανίδης, & Φιλίππου (2001).
[10] Όπως παραπάνω.

Η έννοια της μαθηματικής απόδειξης στο σχολείο έχει τρία σημαντικά χαρακτηριστικά γνωρίσματα (Hanna et al., 2009):

α. Η απόδειξη και οι *''διαδικασίες απόδειξης''* (proving) στα μαθηματικά του σχολείου χτίζουν μια μακροπρόθεσμη σχέση με την αυστηρότητα της απόδειξης που αποδέχονται οι μαθηματικοί.

β. Η απόδειξη και οι *''διαδικασίες απόδειξης''* μπορούν να προσφέρουν έναν τρόπο σκέψης που εμβαθύνει την μαθηματική κατανόηση και γενικότερα την ανθρώπινη λογική.

γ. Η απόδειξη και οι *''διαδικασίες απόδειξης''* είναι ταυτόχρονα θεμελιώδεις έννοιες και πολύπλοκες, και θα πρέπει να αναπτυχθούν σταδιακά ξεκινώντας από τις χαμηλότερες τάξεις του σχολείου.

Για τον Balacheff (1988), μια απόδειξη δεν είναι παρά μια εξήγηση, ενώ επισημαίνει τη σημασία της δημιουργίας ενός διδακτικού πλαισίου στην τάξη, στο οποίο ο μαθητής αποκτά επίγνωση της πολυπλοκότητας του μαθηματικού προβλήματος και την αναγκαιότητα να παράγει έγκυρα επιχειρήματα. Πρότεινε τις ακόλουθες διακρίσεις:

• ως εξήγηση ονομάζουμε τον λόγο ενός ατόμου που αποσκοπεί να αποδώσει κύρος στις διαπιστώσεις του για άλλους. Το κύρος της εξήγησης σχετίζεται αρχικά με αυτόν που την αρθρώνει.

• καλούμε απόδειξη μια εξήγηση, η οποία είναι αποδεκτή από μια κοινότητα ανθρώπων σε μια δεδομένη στιγμή.

• καλούμε μαθηματική απόδειξη την απόδειξη που είναι αποδεκτή από τους μαθηματικούς. Οι μαθηματικές αποδείξεις έχουν μια συγκεκριμένη δομή και ακολουθούν καθορισμένους κανόνες που έχουν μορφοποιηθεί από τη λογική.

Στο Δημοτικό οι μαθητές-τριες εμπλέκονται σε άτυπες αποδείξεις όταν χτίζουν ένα λογικό επιχείρημα που βασίζεται σε γνωστά δεδομένα ή γεγονότα. Οι τυπικές μαθηματικές αποδείξεις περιλαμβάνουν γενικά μια λογική αλυσίδα συλλογισμών που αποδεικνύει ως αληθή μια γενική δήλωση ή έκφραση. Η έννοια της απόδειξης συμβαδίζει με την έννοια της "εγκυρότητας μιας πρότασης". Τα τελευταία χρόνια πολλοί εκπαιδευτικοί εξετάζουν εκ νέου το ρόλο της μαθηματικής απόδειξης στα προγράμματα σπουδών, και ως εκ τούτου, υπάρχει μια τάση απομάκρυνσης από ό,τι έχει συχνά θεωρηθεί ως μια υπερβολική προβολή των αυστηρών (rigorous) αποδείξεων (Hanna, 1990). Δίνεται πλέον μεγαλύτερη έμφαση στην έννοια της απόδειξης ως " πειστικό επιχείρημα".

Ο διδασκαλία της απόδειξης στο σχολείο είναι σημαντική και απαραίτητη για τη διατήρηση της σύνδεσης μεταξύ των Μαθηματικών στο σχολείο και των μαθηματικών ως επιστήμη. Αν και η απόδειξη δεν έχει την ίδια εξέχουσα θέση στη μαθηματική πράξη και στη μαθηματική πρακτική σε όλες τις περιόδους, και αν και τα πρότυπα της αυστηρότητας της έχουν αλλάξει στην πάροδο του χρόνου, διατηρεί αναμφισβήτητα θέση στο επίκεντρο των Μαθηματικών.

Η μαθηματική Απόδειξη στο Δημοτικό σχολείο

Οι έρευνες για τις *διαδικασίες απόδειξης* (proving) και τη *λειτουργία συλλογισμού* (reasoning) σε παιδιά του δημοτικού σχολείου δεν είναι τόσο εκτεταμένες όσο στο χώρο της δευτεροβάθμιας και πανεπιστημιακής εκπαίδευσης. Οι Stylianides και Stylianides (2008) κάνοντας μια εκτεταμένη ανασκόπηση αναφέρουν πως κάποιες έρευνες καταλήγουν πως οι μαθητές-τριες του Δημοτικού δεν είναι αρκετά ώριμοι-ες στο να αποδεικνύουν. Άλλες μελέτες, ωστόσο, έχουν αναδείξει πως μπορούν να ολοκληρώνουν εργασίες *παραγωγικού συλλογισμού* (deductive reasoning*)* σε πολύ μικρές ηλικίες. Οι Galotti, Komatsu και Voelz (1997), αναφέρουν πως οι μαθητές-τριες Δημοτικού έχουν ικανότητες παραγωγικών και επαγωγικών συμπερασμάτων. Ακόμα και από τη Β΄ τάξη μπορούν διαισθητικά να κατανοούν τη διαφορά αυτών των δύο ειδών συμπερασμάτων και φαίνεται να έχουν μεγαλύτερη αυτοπεποίθηση στην παραγωγική εξαγωγή συμπερασμάτων και όχι στην επαγωγική.

Η απόδειξη (proof) και η λειτουργία συλλογισμού (reasoning) είναι δύο σημαντικοί στόχοι διδασκαλίας που για τους περισσότερους εκπαιδευτικούς συνδέονται περισσότερο με το Γυμνάσιο και το Λύκειο. Ωστόσο, ακόμη και πολύ μικρά παιδιά μπορούν να ασχοληθούν με τον

μαθηματικό συλλογισμό και την άτυπη απόδειξη. Στις δύο τελευταίες τάξεις του Δημοτικού οι μαθητές-τριες είναι ικανοί-ες να βγάλουν νόημα από νέες ιδέες και να αναπτύξουν συνήθειες που θα είναι σημαντικές σε όλη τη διάρκεια του βίου τους, τόσο εντός όσο και έξω από την τάξη. Η εργασία των μαθητών-τριών με ανεπίσημες αποδείξεις βοηθάει τη δημιουργία μιας ισχυρής βάσης για ανάπτυξη τυπικών αποδείξεων στη δευτεροβάθμια εκπαίδευση.

Στο δημοτικό, σύμφωνα με τον Van de Walle (2007), η πιο συνηθισμένη μορφή «απόδειξης» είναι η χρήση παραδειγμάτων. Τα παιδιά θα δοκιμάσουν πολλούς αριθμούς σε μία εικασία εξετάζοντας αν λειτουργεί για οποιοδήποτε αριθμό και αν αντικαταστήσουν. Μπορεί να δοκιμάσουν πολύ μεγάλους αριθμούς ως υποκατάστατα του «οποιουδήποτε» αριθμού. Συχνά θα υπάρχουν παιδιά στην τάξη που δεν θα δεχθούν αυτή την προσέγγιση ως απόδειξη ρωτώντας «πώς γνωρίζουμε ότι δεν υπάρχουν κάποιοι αριθμοί για τους οποίους δεν ισχύει αυτό;». Τα παιδιά προσπαθούν να χρησιμοποιήσουν κάποια μορφή λογικής. Συχνά αυτές οι προσπάθειες περιλαμβάνουν τη χρήση φυσικών υλικών για να δείξουν τη σκέψη πίσω από αυτή την εικασία. Για παράδειγμα, ένα παιδί που προσπαθεί να αποδείξει ότι α + β = β + α μπορεί να παρουσιάσει δύο ράβδους με σφηνοτουβλάκια, η μία με 8 τέτοια τουβλάκια και η άλλη με 6. Οι ράβδοι χρησιμοποιούνται για να δείξουν ότι ο αριθμός από τα τουβλάκια στις ράβδους δεν αλλάζει όταν αντιστρέφεται η σειρά των δύο ράβδων. Το χαρακτηριστικό που καθιστά αυτή την ενέργεια κάτι παραπάνω από ένα απλό παράδειγμα είναι η έκφραση των παιδιών ή η εξήγηση ότι ο αριθμός των κύβων στις ράβδους δεν αποτελεί μέρος του ισχυρισμού: «Θα ίσχυε όσα σφηνοτουβλάκια και να υπήρχαν στην κάθε ράβδο» (Van de Walle, 2007, σ. 350).

Πολλές από τις μαθηματικές δραστηριότητες προϋποθέτουν την εύρεση γενικών κανόνων εξετάζοντας μια σειρά από συγκεκριμένες περιπτώσεις. Αν και αυτή η διαδικασία δεν συνεπάγεται τη δημιουργία αποδείξεων, είναι σημαντική για την προσέγγιση και κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης. Σύμφωνα με την Κολέζα (2000, σ. 282), αν και η λογική θεωρείται χαρακτηριστικό της τυπικής παραγωγικής μαθηματικής σκέψης, οι μαθητές-τριες στο Δημοτικό μπορούν με αφορμή κατάλληλες γεωμετρικές δραστηριότητες να χρησιμοποιήσουν την λογική του "αν – τότε" στο δικό τους επίπεδο. Παραδείγματα τέτοιων δραστηριοτήτων είναι:

α) Προσδιόρισε τον αριθμό των διαγώνιων σε κάθε ένα από τα παρακάτω πολύγωνα και γράψε την απάντησή σου στον ακόλουθο πίνακα:

Πολύγωνο	Αριθμός κορυφών	Αριθμός διαγωνίων από κάθε κορυφή	Συνολικός αριθμός διαγωνίων
Τρίγωνο			
Τετράπλευρο			
Πεντάγωνο			
Εξάγωνο			
Επτάγωνο			
Οκτάγωνο			

Εικόνα 1: *Πίνακας γεωμετρικής δραστηριότητας (όπως παρουσιάζεται στο Κολέζα, 2000, σ. 283)*

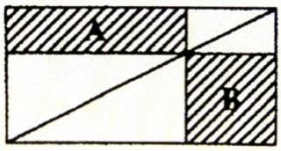
Συνεχίζοντας μπορούμε να καταλήξουμε σε έναν γενικό κανόνα.

β) Πόσες διαγώνιες πιστεύεις ότι έχει ένα δεκάγωνο; (Μπορείς να καταλήξεις από τον πίνακα σε ένα γενικό τύπο;)

γ) Πόσες διαγώνιες έχει ένα ν-γωνο:

δ) Σε μια παρέα 10 παιδιών, κάθε παιδί κάνει μια και μόνο χειραψία με κάθε ένα από τα άλλα παιδιά. Πόσες χειραψίες θα γίνουν; (Βλέπεις κάποια αντιστοιχία σ' αυτή την ερώτηση και στην ερώτηση (β);

ε) Με βάση το παρακάτω σχήμα τι μπορείς να συμπεράνεις για τις επιφάνειες Α και Β;



Εικόνα 2: *Πίνακας γεωμετρικής δραστηριότητας (όπως παρουσιάζεται στο Κολέζα, 2000, σ. 284)*

Η Κολέζα (2000, σ. 283) θεωρεί πως «με τέτοιου είδους λογικές δραστηριότητες οι μαθητές μπορούν να μάθουν να διατυπώνουν υποθέσεις, να τις ελέγχουν, να τις απορρίπτουν, ή να τις επαληθεύουν. Μπορούν να μυηθούν στον επαγωγικό συλλογισμό (π.χ. πόσες γραμμές ενώνουν 5 σημεία, 6 σημεία κ.λπ.), στο συλλογισμό «κατ' αναλογία, στην αναγνώριση και τη χρήση ισομορφισμών, στην ταξινόμηση σύμφωνα με κάποιο κριτήριο, στην οργανωμένη παρατήρηση και τη γενίκευση».

Σύμφωνα με τους Ball & Bass (2000, σελ. 910), οι μαθητές της τρίτης τάξης «δεν έχουν το μαθηματική διάθεση να αναρωτηθούν σχετικά με την πληρότητα των αποτελεσμάτων τους όταν εργάζονται σε ένα πρόβλημα με πάρα πολλές λύσεις». Παρομοίως ο Bell (1976), διαπίστωσε ότι το 70% των μαθητών-τριών 11-13 ετών ενώ μπορούσε να αναγνωρίζει και να περιγράφει πρότυπα ή σχέσεις, δεν κατέβαλαν καμία προσπάθεια για να τις αιτιολογήσουν ή να εξηγήσουν πως οδηγήθηκαν στα συμπεράσματα τους. Οι μαθητές-τριες της πρωτοβάθμιας εκπαίδευσης εξαρτώνται τόσο από τις εμπειρίες τους, όσο και από το δάσκαλο-α τους για να διαφοροποιήσουν τα πιστεύω τους και την πραγματική γνώση (Balacheff, 2009).

Για τον Stylianides (2007), η προσέγγιση της έννοιας της απόδειξης στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση πρέπει να βασίζεται σε δύο κατευθυντήριες αρχές: την αρχή της ‘’’*πνευματικής τιμιότητας’’* (intellectual-honesty principle) και την αρχή της ‘’*συνέχειας’’* (continuum principle). Η αρχή της *πνευματικής τιμιότητας* δηλώνει ότι η έννοια της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά θα πρέπει να είναι, ταυτόχρονα, και μαθηματικά ‘’τίμια’’ δηλαδή αποδεκτή για το επιστημονικό πεδίο των μαθηματικών και να είναι προσαρμοσμένη στις πνευματικό επίπεδο των μαθητών-τριών. Η αρχή αυτή βασίζεται στο θεωρητικό έργο του Bruner (1960) ο οποίος με τη φημισμένη άποψη του πως «οποιαδήποτε έννοια μπορεί να διδαχτεί στα παιδιά αρκεί να προσαρμοστεί στο νοητικό επίπεδο τους» υποστηρίζει πως μπορεί να βρεθεί πάντα μια ισορροπία μεταξύ των απαιτήσεων ενός αντικειμένου διδασκαλίας και της πνευματικής ανάπτυξης των διδασκόμενων. Η αρχή της συνέχειας αναδεικνύει την ανάγκη οι διδακτικές ενέργειες μας να έχουν προοπτική αλληλουχίας και εξέλιξης στο χρόνο.

Μορφές και μέθοδοι απόδειξης

Τρεις τυποποιημένες μέθοδοι απόδειξης που θα μπορούσαν να χρησιμοποιηθούν στην πρωτοβάθμια εκπαίδευση είναι (Mooney et al,, 2014, σ. 251):

- παραγωγική απόδειξη (deductive proof)
- διάψευση από αντι-παράδειγμα (disproof by counter-example)
- απόδειξη διά ‘’εξάντλησης’’ (proof by exhaustion)

► *Παραγωγική απόδειξη.*

Απόδειξη που απαιτεί μια αλυσίδα λογικών συλλογισμών, ξεκινώντας με αυτό που είναι γνωστό και πηγαίνοντας βήμα προς βήμα προς ένα συμπέρασμα.

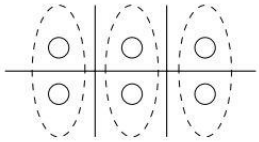
Σκεφτείτε κατά πόσον ισχύουν ή όχι οι ακόλουθες προτάσεις και στη συνέχεια προσπαθήστε να τις αποδείξετε (ή να τις διαψεύσετε):

(α) Εάν ένας αριθμός διαιρείται με το 6, τότε διαιρείται και με το 3.

(β) Εάν ένας αριθμός διαιρείται με το 7, τότε διαιρείται και με το 14.

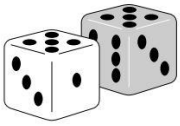
Λύσεις:

(α) Η πρόταση αυτή ισχύει. Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 6 τότε μπορεί να χωριστεί σε έξι ίσα μέρη. Φανταστείτε να ομαδοποιήσουμε τα έξι αυτά μέρη μαζί σε ζεύγη. Το αποτέλεσμα θα ήταν τρία ίσα μέρη και συνεπώς ο αριθμός αυτός διαιρείται με το 3.



Σχήμα 3: Αν ένας αριθμός διαιρείται με το 6 τότε μπορεί να χωριστεί σε έξι ίσα μέρη

Για μια απόδειξη πιο φορμαλιστική, ονομάζουμε τον αριθμό Χ και κάθε ένα από τα 6 μέρη Κ. Μια πιο αλγεβρική διατύπωση είναι:
$X = 6 \times K = 6K$
Και επειδή $6 = 3 \times 2$ τότε:
$X = 3 \times 2 \times K$
Δηλαδή:
$X = 3 \times 2K = 3(2K)$
Άρα ο αριθμός Χ διαιρείται με το 3.
(β) Η πρόταση αυτή δεν ισχύει. Για να διαψευστεί χρειαζόμαστε μόνο μια περίπτωση που δεν επαληθεύει την πρόταση (ένα αντι-παράδειγμα): ο αριθμός 21 διαιρείται με το 7 αλλά δεν διαιρείται με το 14.
► *Διάψευση από αντι-παράδειγμα.*
Το πλεονέκτημα: είναι συνήθως πολύ ευκολότερο να αποδειχτεί για κάτι ότι δεν είναι αλήθεια από το ότι είναι αλήθεια. Παράδειγμα η φράση «Όλοι οι Θεσσαλονικείς είναι ΠΑΟΚ» (☺). Θα ήταν εξαιρετικά δύσκολο να επαληθευτεί. Ακόμη και αν ρωτούσαμε σε όλα τα σπίτια της Θεσσαλονίκης και παίρναμε μόνο καταφατικές απαντήσεις, θα εξακολουθούσε να υπάρχει η αμφιβολία ότι μπορεί να υπάρχει κάποιος που δεν ρωτήθηκε. Θα απαιτούνταν μόνο ένας Θεσσαλονικιός που θα δήλωνε ότι δεν είναι ΠΑΟΚ. Μπορεί να πάρει πολύ χρόνο για να βρεθεί, αλλά, άπαξ και γίνει αυτό, η διάψευση θα ολοκληρωθεί. Η φράση «Θεσσαλονικιός που δεν είναι ΠΑΟΚ» είναι ένα **αντι-παράδειγμα** (☺). Η εύρεση αντι-παραδειγμάτων είναι καλή μέθοδος να διαψεύδουμε ισχυρισμούς και είναι μια χρήσιμη τεχνική για να ενθαρρύνουμε τα παιδιά να προβληματιστούν σχετικά με παρερμηνείες.
«Όταν ένας αριθμός πολλαπλασιάζεται με το 10, ένα μηδέν προστίθεται» είναι συνήθως ένας γενικευμένος κανόνας. Είναι αλήθεια για τον πολλαπλασιασμό ακεραίων αριθμών με το δέκα, αλλά ένα αντι-παράδειγμα όπως $0{,}2 \times 10$ δείχνει την περιορισμένη εγκυρότητα του κανόνα. Τα αντι-παραδείγματα δεν είναι σημαντικά μόνο για την αντίκρουση λανθασμένων εικασιών, αλλά μπορούν να είναι επίσης ένα ισχυρό διδακτικό εργαλείο οικοδόμησης μαθηματικών γνώσεων. Υπάρχει ένα παλιό γνωμικό: η εξαίρεση επιβεβαιώνει τον κανόνα. Στα μαθηματικά, ωστόσο, είναι η εξαίρεση που διαψεύδει τον κανόνα.
► *Απόδειξη διά της "εξάντλησης".*
Μια πολύ χρήσιμη μέθοδος απόδειξης η οποία είναι εύκολα κατανοητή. Χρησιμοποιείται όταν υπάρχει μόνο ένας μικρός αριθμός περιπτώσεων προς εξέταση και η κάθε μία μπορεί να ελεγχθεί.
Ένα παράδειγμα από το χώρο των πιθανοτήτων (Cooke, 2000, σ. 145-148):
Εξετάζουμε τα αποτελέσματα από τη ρίψη δύο ζαριών, ενός κόκκινου και ενός μπλε.



Σχήμα 4: *Ζάρια*

Ρίχνουμε τα ζάρια και καταγράφουμε τα συνολικά αποτελέσματα προσθέτοντας τους αριθμούς που αντιπροσωπεύουν οι κουκίδες τους, π.χ. $4 + 5 = 9$. Ζητείται να αποδειχτεί ο ισχυρισμός πως υπάρχουν 11 δυνατά αποτελέσματα και το συνολικό αποτέλεσμα 7 εμφανίζεται πιο συχνά

μεταξύ των πιθανών αποτελεσμάτων. Ο πίνακας παραθέτει όλους τους δυνατούς συνδυασμούς των κουκίδων στα δύο ζάρια. Το κόκκινο ζάρι αντιπροσωπεύεται από Κ και το μπλε από Μ.

K/M	1	2	3	4	5	6
1	1 + 1 = 2	1 + 2 = 3	1 + 3 = 4	1 + 4 = 5	1 + 5 = 6	1 + 6 = 7
2	2 + 1 = 3	2 + 2 = 4	2 + 3 = 5	2 + 4 = 6	2 + 5 = 7	2 + 6 = 8
3	3 + 1 = 4	3 + 2 = 5	3 + 3 = 6	3 + 4 = 7	3 + 5 = 8	3 + 6 = 9
4	4 + 1 = 5	4 + 2 = 6	4 + 3 = 7	4 + 4 = 8	4 + 5 = 9	4 + 6 = 10
5	5 + 1 = 6	5 + 2 = 7	5 + 3 = 8	5 + 4 = 9	5 + 5 = 10	5 + 6 = 11
6	6 + 1 = 7	6 + 2 = 8	6 + 3 = 9	6 + 4 = 10	6 + 5 = 11	6 + 6 = 12

Σχήμα 5: *Δυνατοί συνδυασμοί αποτελεσμάτων από ρίψη ζαριών*

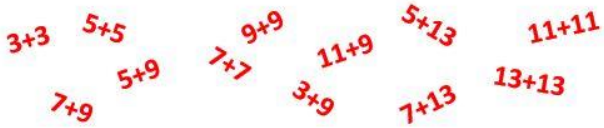
Εξετάζοντας τα αποτελέσματα διαπιστώνουμε ότι υπάρχουν έντεκα δυνατά συνολικά αποτελέσματα (δηλαδή 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 και 12). Επιπλέον, το σύνολο 7 παρουσιάζεται σε έξι διαφορετικές περιπτώσεις που είναι περισσότερες από την εμφάνιση οποιουδήποτε άλλου συνολικού αποτελέσματος (το 2 και 12 εμφανίζονται μόνο μία φορά, το 3 και 11 εμφανίζονται δύο φορές, τρεις φορές το 4 και 10, το 5 και 9 τέσσερις φορές και το 6 και 8 πέντε φορές).

Δραστηριότητες που προάγουν τη συλλογιστική λειτουργία και μυούν στην μαθηματική απόδειξη

► *Τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε δύο μονούς αριθμούς;*

Ας σκεφτούμε δύο ομάδες παιδιών Δημοτικού σχολείου που προσεγγίζουν με διαφορετικό τρόπο το τι συμβαίνει όταν προσθέτουμε δύο μονούς αριθμούς.

Η μια ομάδα προσθέτει πολλά ζεύγη μονών αριθμών. Αφού έχουν γεμίσει αρκετές σελίδες υπολογισμών, ο δάσκαλος ρωτάει τα παιδιά αν νομίζουν πως όταν προσθέτουμε 2 μονούς αριθμούς το αποτέλεσμα θα είναι πάντα ζυγός.



Σχήμα 6: *Πρόσθεση μονών αριθμών*

Τα παιδιά έχοντας κάνει πάρα πολλούς υπολογισμούς είναι σίγουρα πως προσθέτοντας μονό + μονό = ζυγός αριθμός. Πιστεύουν, μετά από δεκάδες υπολογισμούς, πως πάντα έτσι θα συμβαίνει.

Στην δεύτερη ομάδα όπου οι μαθητές ήταν μεγαλύτερης ηλικίας, η δασκάλα προώθησε τη συζήτηση μέσω της χρήσης εικόνων μοντελοποίησης των μονών και ζυγών αριθμών. Οι ζυγοί αριθμοί παρουσιάστηκαν από ζεύγη φίλων που πιάνουν τα χέρια, ενώ οι μονοί αριθμοί παρουσιάστηκαν ως ζεύγη φίλων συν ένα άτομο που στέκεται μόνο του.

Σχήμα 7: *Ανθρωπομορφική παρουσίαση μονών και ζυγών αριθμών*

Μετά από λίγη εξάσκηση ζευγαρώνοντας εικόνες διαφόρων μονών και ζυγών αριθμών τα παιδιά καθοδηγούνται να εξετάσουν τι συμβαίνει αν προστεθούν μονοί αριθμοί.

Τα παιδιά γρήγορα διαπιστώνουν πως οι δύο μοναχικές φιγούρες φτιάχνουν ένα ζευγάρι και έτσι προκύπτει ζυγός αριθμός. Φαίνεται καθαρά ότι όσο μεγάλοι και αν είναι οι μονοί αριθμοί το ζευγάρωμα τους θα είναι πάντα ζυγός αριθμός.

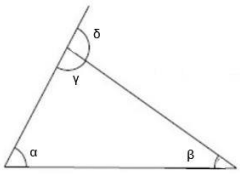
Έχουμε δηλαδή, δύο διαφορετικά σενάρια, δύο διαφορετικά επίπεδα μαθηματικής σκέψης σε κάθε ένα από αυτά.

Στο πρώτο, τα παιδιά φτάνουν σε έναν γενικευμένο κανόνα δοκιμάζοντας μερικά παραδείγματα. Αυτό το είδος σκέψης-συλλογισμού είναι γνωστό ως επαγωγή. Ο περιορισμός της προσέγγισης είναι ότι ποτέ δεν μπορούμε να είμαστε σίγουροι ότι τα παραδείγματα που δεν έχουμε δοκιμάσει θα είναι σύμφωνα με τον κανόνα αυτό. Η ιστορία των μαθηματικών είναι γεμάτη με προβλέψεις και εικασίες που βασίστηκαν σε επαγωγική σκέψη και τελικά αποδείχθηκαν λανθασμένες. Ένα παράδειγμα είναι αυτό το μοτίβο των αριθμών:

31 331 3331 33331 333331 3333331 33333331

Σχήμα 8: *Μοτίβο αριθμών*

Οι πρώτοι επτά αριθμοί σε αυτό το αριθμητικό μοτίβο (βιβλίο ΣΤ΄, κεφ. 54, σελ. 127) είναι πρώτοι αριθμοί (διαιρούνται μόνο από το ένα και τον ίδιο το αριθμό). Θα περίμενε κάποιος πως όσο κι να συνεχιστεί το μοτίβο, ο αριθμός που προκύπτει θα είναι πρώτος. Κι όμως ο όγδοος αριθμός του μοτίβου, είναι ο **333333331** ο οποίος ισούται με **17 X 19607843.**
Άρα δεν είναι πρώτος. Βλέπουμε εδώ δηλαδή τους περιορισμούς του επαγωγικού συλλογισμού.
Ενώ η επαγωγική σκέψη μπορεί συχνά να κομίσει συναρπαστικές δυνατότητες αναδεικνύοντας πιθανές σχέσεις ποτέ δεν αποτελεί εγγύηση για την εγκυρότητα αυτών των σχέσεων.
Στο δεύτερο παράδειγμα η μαθηματική λογική είναι σε πιο προχωρημένο επίπεδο. Παρά την απλότητα της απεικόνισης, έχουμε μια προσπάθεια να αποδειχτεί τι προκύπτει από την πρόσθεση δύο οποιονδήποτε μονών αριθμών. Στην πραγματικότητα, αυτή η "απόδειξη μέσω εικόνων" είναι πολύ κοντά σε μια πιο περίπλοκη αλγεβρική προσέγγιση.
Είναι χρήσιμη και η αντιστοίχιση μεταξύ της αλγεβρικής απόδειξης παρακάτω και του "συλλογισμού" μέσω των εικόνων:
Μπορούμε να γράψουμε ένα ζυγό αριθμό ως 2α, όπου α είναι ένας ακέραιος. Ομοίως, ο μονός αριθμός μπορεί να γραφεί ως 2α+1 (για παράδειγμα, ο μονός αριθμός 17 είναι δύο φορές το 8 συν 1). Οι δύο μονοί αριθμοί μπορούν να γραφούν 2α+1 και 2β+1. Προσθέτοντας τους έχουμε 2α+1+2β+1 = 2α+2β+2 = 2(α+β+1). Ο αριθμός α+β+1 είναι ακέραιος και αυτό συνεπάγεται ότι ο 2(α+β+1) είναι ζυγός. Άρα το άθροισμα δύο μονών αριθμών είναι ζυγός αριθμός.
Είδαμε παραπάνω πώς μπορεί να δικαιολογηθεί ένας απλός κανόνας σχετικά με την πρόσθεση δύο μονών αριθμών σε διάφορα επίπεδα που κυμαίνονται από τη μη ικανοποιητική επαγωγική (inductive) προσέγγιση στην επίσημη αλγεβρική μέθοδο. Αυτή η τελευταία μέθοδος είναι ένα παράδειγμα αυτού που ονομάζουμε μια παραγωγική απόδειξη (deductive). Είναι αποτελεσματική, επειδή, αντιπροσωπεύοντας μονούς και ζυγούς αριθμούς με γενικευμένο αλγεβρικό τρόπο, λαμβάνουμε υπόψη το άθροισμα όλων των δυνατών ζευγών των μονών αριθμών.
► *Παραγωγική απόδειξη. Ένα παράδειγμα σε γεωμετρικό πλαίσιο.*
Απόδειξη ότι η εξωτερική γωνία ενός τριγώνου είναι ίση με το άθροισμα των απέναντι εσωτερικών γωνιών[11].

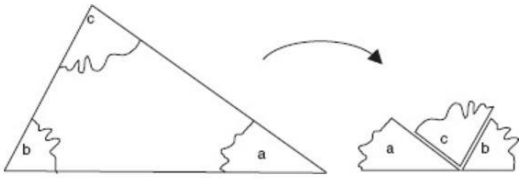


Ξέρουμε πως $\gamma + \delta = 180$ μοίρες
Ξέρουμε επίσης πως $\alpha + \beta + \gamma = 180$ μοίρες

Άρα $\gamma + \delta = \alpha + \beta + \gamma$
Οπότε $\delta = \alpha + \beta$

[11] Βιβλίο ΣΤ΄, κεφ. 58, σελ.142 & Βιβλίο Ε΄, κεφ. 41, σελ.108.

Σε αυτή τη σύντομη γεωμετρική απόδειξη, έχουμε κάνει κάποιες παραδοχές. Λαμβάνεται ως δεδομένο ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου είναι 180 μοίρες. Πως το ‘’αποδεικνύουμε’’ στο Δημοτικό σχολείο; Μέσω μέτρησης ή πρακτικής άσκησης[12]. Σχίζουμε γωνίες από χάρτινα τρίγωνα και τοποθετούμε αυτές γωνίες μαζί.



Σχήμα 9: *Τοποθέτηση γωνιών τριγώνου μαζί*

Με τον ίδιο τρόπο μπορεί να ‘’αποδειχτεί’’ πως το άθροισμα των γωνιών ενός τετράπλευρου είναι 360 μοίρες.

► *Αποδείξτε πως σε όλους τους πρώτους αριθμούς μεγαλύτερους από το 3 προηγείται ή έπεται αριθμός πολλαπλάσιο του 6.*

- Κάθε πρώτος αριθμός μεγαλύτερος από το 3 δεν διαιρείται με το 2 και είναι περιττός.
- Οι δύο αριθμοί εκατέρωθεν του πρώτου είναι άρτιοι και συνεπώς διαιρούνται με το 2.
- Σε κάθε τρεις συνεχόμενους αριθμούς περιλαμβάνεται ένας τουλάχιστον αριθμός που διαιρείται με το 3. Αυτός δεν μπορεί να είναι ο πρώτος αριθμός, έτσι πρέπει να είναι ένας από τους δύο αριθμούς εκατέρωθεν.
- Ως εκ τούτου ένας από τους αριθμούς εκατέρωθεν του πρώτου αριθμού διαιρείται και με το 2 και με το 3 και επομένως διαιρείται με το 6.
- Αυτό ολοκληρώνει την απόδειξη.

► *Αποδείξτε πως το άθροισμα τριών διαδοχικών αριθμών είναι διαιρετέο με το 3.*

- Τρεις συνεχόμενοι αριθμοί μπορούν να εκφραστούν ως[13]:

$x, \quad x + 1, \quad x + 2$

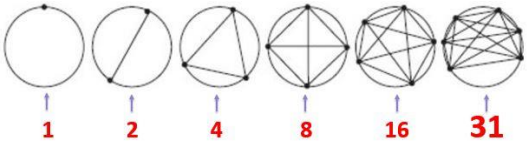
- Προσθέτοντας τους έχουμε:

$x + x + 1 + x + 2$
$= 3x + 3$
$= 3(x + 1)$

- Άρα διαιρείται με το 3.

► *Διάψευση από αντι-παράδειγμα.*

Η παρακάτω εικόνα δείχνει διάφορους αριθμούς κουκκίδων που σημειώνονται στην περιφέρεια των κύκλων και τους χωρίζουν σε περιοχές.



Σχήμα 11: *Χωρισμός κύκλων*

---

[12] Αυτή δεν είναι μια επαρκής τυπική απόδειξη.
[13] Βιβλίο ΣΤ΄, κεφ. 25-29, σελ. 61 & Βιβλίο ΣΤ΄, κεφ. 6, σελ. 20 (επιμεριστική ιδιότητα).

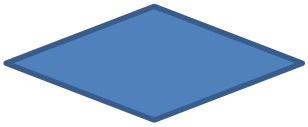
Μετρώντας τις περιοχές που χωρίζονται οι 4 πρώτοι κύκλοι έχουμε τους αριθμούς 1, 2, 4 και 8. Σε αυτό το σημείο ένα μαθηματικό μοτίβο αρχίζει να αναδύεται. Στον επόμενο κύκλο θα έχουμε 16 περιοχές; Υποθέτουμε πως έτσι θα είναι. Και πράγματι είναι 16. Ο έκτος κύκλος είναι το αντι-παράδειγμα που αποδεικνύει ότι δεν έχουμε να κάνουμε με μια απλή σχέση διπλασιασμού. Στον έκτο κύκλο οι προβλέψεις διαψεύδονται. Η καταμέτρηση δείχνει ότι ο αριθμός των περιοχών είναι 31 και όχι 32.

► *Διάψευση από αντι-παράδειγμα.*

Δάσκαλος/α: *Πείτε μου πώς ξέρετε εάν ένα σχήμα είναι ένα τετράγωνο;*

Παιδί: *Έχει τέσσερις πλευρές όλες το ίδιο μήκος.*

Δάσκαλος: *Τότε αυτό είναι ένα τετράγωνο;*



Σχήμα 10: *Ρόμβος*

Παιδί: *Δεν είναι...*

► *Διάψευση από αντι-παράδειγμα.*

Στο πλαίσιο της μέτρησης, μικρότερα παιδιά συχνά κάνουν μια γενίκευση με βάση την εμπειρία τους ότι τα μεγαλύτερα αντικείμενα είναι βαρύτερα από τα μικρότερα. Ένα μεγάλο μπλοκ φελιζόλ είναι ένα κατάλληλο αντι-παράδειγμα για να κατεδαφίσει τον εσφαλμένο αυτόν ισχυρισμό.

► *Διάψευση από αντι-παράδειγμα.*

Ένα παιδί, επινοεί ένα κανόνα για μια ακολουθία τεσσάρων ψηφίων που κρατιέται μυστικό από τα άλλα παιδιά στην ομάδα του. Τους δίνεται ένα παράδειγμα που ταιριάζει με τον κανόνα. Αυτό θα μπορούσε να είναι, για παράδειγμα:

7 5 3 1

Τα παιδιά προσπαθούν να ανακαλύψουν τον μυστικό κανόνα προτείνοντας άλλα παραδείγματα, και λαμβάνουν την απάντηση ναι ή όχι ανάλογα με το αν ταιριάζουν ή όχι (αυτή η άσκηση παρέχει τα παιδιά την ευκαιρία να εκτιμήσουν την αξία των αντι-παραδειγμάτων).

Υπάρχουν πολλοί πιθανοί κανόνες που θα ταίριαζαν σε αυτή τη συγκεκριμένη τετραψήφια ακολουθία. Μερικοί από αυτούς:

(α) φθίνουσα λίστα των διαδοχικών περιττών αριθμών

(β) φθίνουσα λίστα περιττών αριθμών

(γ) οποιαδήποτε τετραψήφια λίστα αριθμών

(δ) αριθμοί μικρότεροι από το 10000

(ε) μια λίστα των τεσσάρων ή λιγότερων περιττών αριθμών

Ας υποθέσουμε ότι ο μυστικός κανόνας που επιλέχθηκε ήταν ο (ε). Ποια παραδείγματα θα βοηθούσαν στην ανακάλυψη του κανόνα; Σαφώς η ακολουθία 9 7 5 3 δεν παρέχει ένα αντι-παράδειγμα για οποιοδήποτε από τους κανόνες (α) έως ε). Προτείνοντας όμως τα παιδιά την ακολουθία 5 3 1 θα επιτρέψει το (γ) να απορριφθεί. Σίγουρα η ακολουθία 1 9 7 θα ήταν ένα χρήσιμο παράδειγμα για να παρουσιαστεί. Γιατί;

► *Απόδειξη διά της "εξάντλησης".*

Υπάρχουν περιπτώσεις, όπου μια απόδειξη μπορεί ''χτιστεί'' εξαντλώντας όλες τις δυνατότητες που έχουμε.

Παράδειγμα:

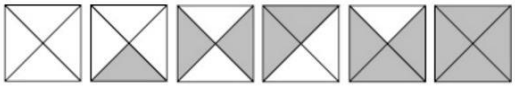
Αποδείξτε ότι έξι διαφορετικά σχέδια μπορούν να γίνουν σκιάζοντας (ή όχι σκιάζοντας) με ένα χρώμα τα τρίγωνα στο παρακάτω σχήμα:

Σχήμα 12: *Τετράγωνο χωρισμένο σε τρίγωνα*

Πρέπει να τονιστεί ότι θα υπάρξουν κάποια παρόμοια σχέδια από τα οποία θα λαμβάνονται υπόψη μόνο ένα από αυτά:

Σχήμα 13: *Σκίαση τριγώνων σε τετράγωνα*

Χρωματίζοντας πρώτα κανένα, μετά ένα, μετά δύο, στη συνέχεια τρία και τέλος όλα τα τρίγωνα, έχουμε την επιβεβαίωση ότι οι έξι δυνατότητες είναι:

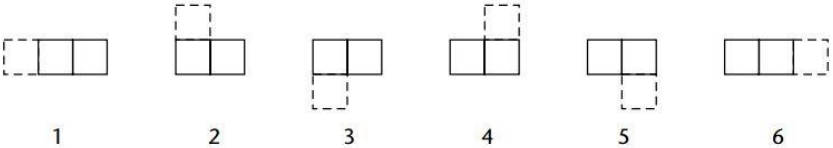


Σχήμα 14: *Δυνατότητα σκίασης τριγώνων σε τετράγωνα*

► *Απόδειξη διά της "εξάντλησης"*.

Το ντόμινο σχηματίζεται ενώνοντας τις πλευρές δύο ίσων τετράγωνων:

Ένα τρόμινο (tromino) σχηματίζεται ενώνοντας τις πλευρές τριών ίσων τετραγώνων.
Ζητείται να αποδειχτεί ο ισχυρισμός πως υπάρχουν δύο πιθανά τρόμινα.
Ξεκινάμε με ένα ντόμινο και προσθέτουμε ένα τετράγωνο για κάθε μία από τις ελεύθερες πλευρές με τη σειρά όπως στο διάγραμμα.

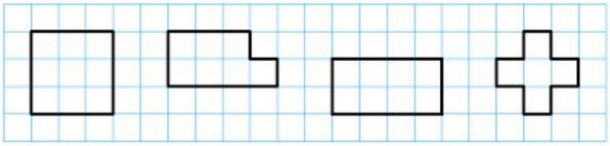


Σχήμα 15: *Πιθανά τρόμινα*

Αυτό δημιουργεί όλες τις πιθανές περιπτώσεις. Οι περιπτώσεις 1 και 6 είναι πανομοιότυπες. Ομοίως , οι περιπτώσεις 2, 3, 4 και 5 είναι πανομοιότυπες (εάν δύο σχήματα είναι όμοια, μπορεί να τοποθετηθεί το ένα ακριβώς πάνω από το άλλο μετά από περιστροφή τους). Συνεπώς, υπάρχουν ακριβώς δύο ξεχωριστά τρόμινα.
Ένα τετρόμινο (tetromino) σχηματίζεται ενώνοντας τέσσερις πλευρές τετραγώνων. Αποδείξτε ότι υπάρχουν πέντε πιθανά τετρόμινα.

► *Απόδειξη διά της "εξάντλησης"*.

Απέδειξε πως οποιοδήποτε σχήμα με περίμετρο 12 μονάδες (γραμμές) πλέγματος έχει εμβαδόν μικρότερο από ένα τετράγωνο με ίση περίμετρο.



Σχήμα 16: *Σχήματα με περίμετρο 12 γραμμές πλέγματος*

Μπορούμε να εξαντλήσουμε όλα τα πιθανά σχήματα και να καταλήξουμε πως το εμβαδόν τους είναι μικρότερο από του τετραγώνου με ίση περίμετρο. Χρησιμοποιούμε τη διατύπωση **εάν… τότε…** ''Εάν κατασκευάσουμε οποιοδήποτε σχήμα με περίμετρο 12 γραμμές τετραγωνισμένου χαρτιού τότε το εμβαδόν του θα είναι μικρότερο από αυτό του τετραγώνου με την ίδια περίμετρο''.

► *Απόδειξη μέσω αντίφασης.*

Σε αυτού του είδους την απόδειξη υποθέτουμε ότι μια ιδέα για την οποία υπάρχει αμφιβολία είναι όντως αλήθεια. Βασιζόμενοι σε αυτή την υποτιθέμενη αλήθεια φτάνουμε σε αδιέξοδο οπότε επιβεβαιώνεται η αρχική μας αμφιβολία.
Έχει ενδιαφέρον η ερώτηση πόσο κάνει η διαίρεση ενός αριθμού με το μηδέν, π.χ. 6 ÷ 0.

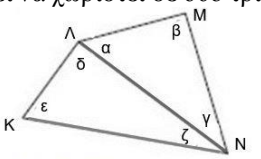
Μερικές φορές δίνονται απαντήσεις όπως 0 και 6.
Τα μικρότερα παιδιά συχνά λένε: «υπάρχουν 6 γλυκά και κανείς δεν υπάρχει να τα μοιραστεί, άρα θα μείνουν 6».
Η απόδειξη ότι δεν είναι δυνατό να διαιρούμε με μηδέν:
Ας υποθέσουμε ότι είναι δυνατή η διαίρεση με το μηδέν. Η συνέπεια αυτού είναι ότι το μηδέν πρέπει να συμπεριφέρεται σαν τους άλλους αριθμούς, π.χ.:
$1 \div 1 = 1$, $5 \div 5 = 1$, $37 \div 37 = 1$, $x \div x = 1$, άρα $0 \div 0 = 1$
Ξέρουμε πως $2 \times 0 = 3 \times 0 = 0$
Η διαίρεση με το μηδέν δίνει:

$$\frac{2 \times 0}{0} = \frac{3 \times 0}{0}$$

Ακυρώνοντας τα μηδενικά έχουμε:

$$2 = 3$$

Φτάσαμε σε αδιέξοδο. Άρα δεν είναι δυνατή η διαίρεση με το μηδέν.
► *Αποδείξτε ότι το άθροισμα των εσωτερικών γωνιών ενός τετράπλευρου είναι πάντα ίσο με 360°.*
(α) ένα τετράπλευρο πάντα μπορεί να χωριστεί σε δύο τρίγωνα, π.χ.:



$(\alpha+\beta+\gamma)+(\delta+\varepsilon+\zeta)=180^o+180^o=360^o$

Σχήμα 18: *Χωρισμός τετράπλευρου σε τρίγωνα*

Οι τέσσερις γωνίες του τετράπλευρου είναι επίσης το άθροισμα αυτών των έξι γωνιών.
(β) τα παιδιά θα μπορούσαν επίσης να σχεδιάσουν αρκετά τετράπλευρα, να μετρήσουν τις γωνίες και βρουν το άθροισμα τους, ή, να κόψουν τις γωνίες και βάζοντας τες τη μία δίπλα στην άλλη να φανεί πως είναι 360° όλες μαζί.
► *Να αποδείξετε ότι (α) το γινόμενο δύο ζυγών αριθμών είναι ζυγός, και (β) το γινόμενο δύο μονών αριθμών είναι μονός.*
(α) Οι δύο ζυγοί αριθμοί μπορούν να γραφτούν ως 2α και 2β, όπου α και β είναι ακέραιοι.
Πολλαπλασιάζοντας τους έχουμε: $2\alpha \times 2\beta = 2(2\alpha\beta)$
Το 2αβ είναι γινόμενο τριών ακεραίων αριθμών και πρέπει επίσης να είναι ένας ακέραιος αριθμός (υπόθεση). Ως εκ τούτου το 2(2αβ) είναι γινόμενο δύο ζυγών αριθμών και πρέπει να είναι ζυγός.
(β) γράφοντας τους μονούς αριθμούς ως 2α+1 και 2β+1 και πολλαπλασιάζοντας τους έχουμε:
$(2\alpha+1)\times(2\beta+1) = 4\alpha\beta+2\beta+2\alpha+1$
Η τελική μονάδα καθιστά αδύνατο να διαιρεθεί αυτός ο αριθμός με το 2, άρα δεν είναι ζυγός. Ως εκ τούτου, το γινόμενο δύο μονών αριθμών είναι μονός.
► *Να αποδείξετε ότι το γινόμενο τριών συνεχόμενων αριθμών είναι ζυγός.*
Τρεις συνεχόμενοι αριθμοί περιλαμβάνουν έναν τουλάχιστον αριθμό με τη μορφή 2α, ο οποίος είναι ακέραιος. Το γινόμενο του 2α με οποιοδήποτε από τους άλλους δύο δίνει έναν αριθμό διαιρετό από 2, εξ ου και το γινόμενο είναι πάντα ζυγός.
► *Να αποδείξετε (μέσω εξάντλησης) ότι υπάρχουν μόνο έξι τρόποι σειροθέτησης των γραμμάτων α, β και γ.*
Η συστηματική διερεύνηση δίνει τις εκδοχές: αβγ, βαγ, γαβ αγβ, βγα, γβα
► *Βρείτε αντι-παραδείγματα για να διαψεύσετε τους παρακάτω ισχυρισμούς:*
(α) ο πολλαπλασιασμός κάνει έναν αριθμό μεγαλύτερο.
(β) εάν ο α και β είναι δύο παράγοντες του x, τότε είτε το α είναι ένας παράγοντας του β, ή το β είναι ένας παράγοντας του α.
Απαντήσεις:

(α) $0.1 \times 60 = 6$

(β) 8 και 6 αποτελούν παράγοντες του 24, αλλά το 8 δεν είναι ένας παράγοντας του 6, και το 6 δεν είναι ένας παράγοντας του 8.

Βιβλιογραφία

Balacheff, N. (1988). *A study of pupils' proving processes at the junior high school level.* Unpublished paper presented at the Joint International Conference 66th NCTM and UCSMP Project, Chicago.

Balacheff, N. (2009). Proving in mathematics from a learning perspective. Στο Φ. Καλαβάσης κ. ά. (επιμ.), *Μαθηματική εκπαίδευση και οικογενειακές πρακτικές*, *Πρακτικά 3ου Συνεδρίου ΕΝ.Ε.ΔΙ.Μ* (σ. 17-42). Ρόδος: Πανεπιστήμιο Αιγαίου.

Ball, D., & Bass, H. (2000). Making believe: The collective construction of public mathematical knowledge in the elementary classroom. In D. Phillips (Ed.), *Constructivism in education* (pp.193–224). Chicago: University of Chicago Press.

Bell, A. (1976). A study of pupils' proof-explanations in mathematical situations. *Educational Studies in Mathematics*, 7 (23–40).

Bruner, J. (1960). *The process of education*. Cambridge: Harvard University Press.

Cabassut R., Conner A., İşçimen, F., Furinghetti, F., Jahnke, H.N., & Morselli F. (2012). Conceptions of Proof - In Research and Teaching. In G. Hanna & M. de Villiers (Eds.), *Proof and Proving in Mathematics Education. New ICMI Study Series 15,* (pp.169–190), Springer.

Cooke, H. (2000). *Primary Mathematics*. The Open University. London: SAGE.

DfE (Department for Education). (2013). *National Curriculum in England: Primary Curriculum*. Sudbury: DfE Publications.

Haylock, D. (2010). *Mathematics Explained for primary teachers*. California: SAGE Publications.

Galotti, K. M., Komatsu, L. K., & Voelz, S. (1997). Children's differential performance on deductive and inductive syllogisms. *Developmental Psychology*, *33*, 70–78.

Hanna, G. (1990). Some pedagogical aspects of proof. *Interchange, 21(1)*, 6–13.

Hanna, G., Villiers, M., Arzarello, F., Dreyfus, T., Durand-Guerrier, V., Jahnke, H., Lin, F., Selden, A., Tall, D., & Yevdokimov, O. (2009). ICMI study 19: Proof and proving in mathematics education: discussion document. In F. Lin, et al. (Eds.), *Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and Proving in Mathematics Education,* Volume 1, National Taiwan Normal University, May 2009.

Jahnke, H. N. (2005). A genetic approach to proof. In M. Bosch (Ed.), *Proceedings of the Fourth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education (CERME IV),* (pp. 428–437).

Jahnke, H.N. (2010). The Conjoint Origin of Proof and Theoretical Physics. In G. Hanna et al. (eds.), *Explanation and Proof in Mathematics: Philosophical and Educational Perpectives*, (pp.17–32), Springer.

Κολέζα, Μ. (2000). *Γνωσιολογική και Διδακτική προσέγγιση των Στοιχειωδών Μαθηματικών Εννοιών.* Αθήνα: Leader Books.

Lakatos I. (1996). *Αποδείξεις και Ανασκευές.* Αθήνα: Εκδόσεις Τροχαλία.

Mooney, C., Hansen, A., Ferrie, L., Fox S., & Wrathmell, R. (2014). *Primary Mathematics: Knowledge and Understanding*. London: Learning Matters.

Μπαμπινιώτης, Γ. (1998). *Λεξικό της Νέας Ελληνικής Γλώσσας.* Αθήνα: Κέντρο Λεξικολογίας.

National Council of Teachers of Mathematics (NCTM). (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Στυλιανίδης, Α., Στυλιανίδης, Γ., & Γ. Φιλίππου, Γ. (2001). Αντιλήψεις των φοιτητών για την άτυπη απόδειξη και την απόδειξη με αντιπαράδειγμα. Στο Μ. Τζεκάκη (επιμ.) *Πρακτικά 5ου Πανελληνίου Συνεδρίου με διεθνή συμμετοχή, ''Διδακτική των μαθηματικών και Πληροφορική στην Εκπαίδευση''*, 269-274, Θεσσαλονίκη: Α.Π.Θ.

Stylianides, A. (2007a). The notion of proof in the context of elementary school mathematics. *Educational Studies in Mathematics*, 65(1), 1-20.

Stylianides, G., & Stylianides, A. (2008). Proof in school mathematics: Insights from psychological research into students' ability for deductive reasoning. *Mathematics Thinking and Learning*, *10*, 103–133.

Τζεκάκη, Μ. (2007). *Μικρά παιδιά, μεγάλα μαθηματικά νοήματα.* Αθήνα: Gutenberg.

Τζεκάκη, Μ. (2010). *Μαθηματική εκπαίδευση για την προσχολική και την πρώτη σχολική ηλικία.* Θεσσαλονίκη: Ζυγός.

Τουμάσης, Μ. (1994). *Σύγχρονη διδακτική των Μαθηματικών*. Αθήνα: Gutenberg.

Van de Walle, J. A. (2007). *Διδάσκοντας μαθηματικά. Μια Αναπτυξιακή Διαδικασία* (Β. Αράπογλου, μετάφρ.). Θεσσαλονίκη: Επίκεντρο.

Η απόδειξη στο Γυμνάσιο

Θάνος Μάγκος
Καθηγητής Μαθηματικών
Πειραματικό Γυμνάσιο Πανεπιστημίου Μακεδονίας
mathanasio@gmail.com

Εισαγωγή

Είναι κοινός τόπος ότι στην καρδιά των Μαθηματικών βρίσκεται η απόδειξη. Ωστόσο, αυτό φαίνεται ότι το κατανοούν μάλλον οι επαγγελματίες μαθηματικοί, σε αντίθεση με τους μαθητές, που δυσκολεύονται να κατακτήσουν αυτή την, θεμελιώδη για τα Μαθηματικά, έννοια.

Παρακάτω θα παρακολουθήσουμε τον τρόπο με τον οποίο προσεγγίζεται η απόδειξη στα Μαθηματικά των τριών τάξεων του Γυμνασίου μέσα από τα σχολικά βιβλία και μέσα από συγκεκριμένα παραδείγματα. Όπου το κρίνουμε χρήσιμο προτείνουμε εναλλακτικές προσεγγίσεις.

Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία στο βιβλίο της Α' Γυμνασίου

Οι μαθητές ερχόμενοι από το Δημοτικό Σχολείο στο Γυμνάσιο, όπως είναι παιδαγωγικά αναμενόμενο, δεν έχουν έρθει σε επαφή με την έννοια της Μαθηματικής Απόδειξης. Για τα παιδιά της ηλικίας αυτής, η απόδειξη ισχυρισμών της καθημερινότητας αποτελείται συχνά από την παράθεση έωλων επιχειρημάτων. Κλασικό παράδειγμα τέτοιου είδους απόδειξης είναι η, ας την ονομάσουμε, ψευδοεπαγωγική απόδειξη, όπως φαίνεται στο επόμενο παράδειγμα:

Ερώτηση: Συμπλήρωστε τον παρακάτω πίνακα

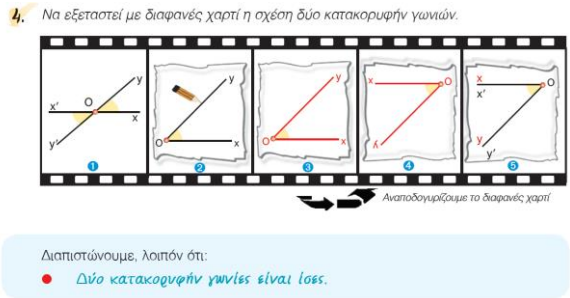
ν	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\nu^2+\nu+41$											

Στη συνέχεια εξετάστε αν οι αριθμοί που προκύπτουν είναι πρώτοι ή σύνθετοι.

Όπως είναι διαπιστωμένο, αφού οι μαθητές παρατηρήσουν ότι σε όλες τις περιπτώσεις τα αποτελέσματα είναι πρώτοι αριθμοί, σπεύδουν να διατυπώσουν τον «κανόνα» ότι αυτό θα συμβαίνει πάντοτε, για όλες τις τιμές του φυσικού αριθμού ν.

Φυσικά αυτό είναι σε μεγάλο βαθμό λογικό. Τέτοιου είδους «αποδείξεις» χρησιμοποιούμε όλοι στην καθημερινότητά μας. Στο σημείο αυτό κεντρικό ρόλο θα παίξει ο καθηγητής των Μαθηματικών, ο οποίος καλείται να καταδείξει τη διαφορά μεταξύ της εμπειρικής «απόδειξης» και της πραγματικής απόδειξης, εκείνης δηλαδή η οποία εγγυάται την αδιαμφισβήτητη αλήθεια ενός ισχυρισμού.

Στην Α' Γυμνασίου, το πρώτο μέρος του βιβλίου, δηλαδή η Αριθμητική και η Άλγεβρα, περιορίζονται αποκλειστικά σε υπολογιστικές ασκήσεις. Απουσιάζει η παραμικρή αναφορά στην απόδειξη. Η αλήθεια είναι, ότι για κάτι τέτοιο προσφέρεται περισσότερο η ενότητα της Γεωμετρίας. Ανατρέχοντας, όμως, στις παραγράφους της Γεωμετρίας βλέπουμε ότι απουσιάζει και από αυτές. Μάλιστα στην ενότητα Β.1.8, στην οποία αναφέρεται η έννοια των κατακορυφήν γωνιών, η διαπίστωση ότι «Δύο κατακορυφήν γωνίες είναι ίσες» γίνεται με χρήση διαφανούς χαρτιού!



Εικόνα 1

Μάλιστα, οι οδηγίες διδασκαλίας προτείνουν να γίνει χρήση του Χελωνόκοσμου (!) για την κατανόηση της ισότητας των κατακορυφήν γωνιών.

Στο σύνολό τους, οι ασκήσεις της ενότητας της Γεωμετρίας χωρίζονται ουσιαστικά σε δύο ομάδες. Στις υπολογιστικές και στις σχεδιαστικές. Φωτεινή εξαίρεση αποτελούν οι εφαρμογές της παραγράφου Β.3.2. Εδώ γίνεται ουσιαστικά η πρώτη νύξη για την απόδειξη, αν και η επίμαχη λέξη πάλι απουσιάζει:

1. *Να δικαιολογηθεί με λογικά επιχειρήματα ότι το άθροισμα των τριών γωνιών κάθε τριγώνου είναι 180°.*

Εικόνα 2

Περιέργως, οι εκφωνήσεις των επόμενων τριών εφαρμογών έχουν ως εξής:

2. *Σε κάθε ορθογώνιο τρίγωνο οι οξείες γωνίες είναι συμπληρωματικές.*

Εικόνα 3

3. *Το άθροισμα δύο γωνιών ενός τριγώνου ισούται με την εξωτερική της τρίτης γωνίας. (Στο τρίγωνο ΑΒΓ η γωνία $A\widehat{\Gamma}x$, που σχηματίζεται από την ΑΓ και την προέκταση της ΒΓ προς το μέρος του Γ, ονομάζεται εξωτερική γωνία της $\widehat{\Gamma}$).*

Εικόνα 4

4. *Οι γωνίες ενός ισόπλευρου τριγώνου είναι όλες ίσες με 60°.*

Εικόνα 5

Συμπερασματικά, οι μαθητές ολοκληρώνοντας την Α' Γυμνασίου, στην πράξη δεν έχουν συναντήσει ουσιαστικά αποδεικτικές ασκήσεις. Τα Μαθηματικά είναι συνυφασμένα με υπολογιστικές διαδικασίες και τη σχεδίαση σχημάτων. Εκτός αυτού, το μεγαλύτερο μέρος της ύλης είναι γνωστό από το Δημοτικό. Η καινούρια έννοια που συναντούν και στην οποία καλούνται να αποκτήσουν ευχέρεια είναι οι αρνητικοί αριθμοί.

Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία στο βιβλίο της Β' Γυμνασίου

Οι πρώτες αποδεικτικές ασκήσεις που συναντούν οι μαθητές είναι στην παράγραφο στην οποία ορίζεται η τετραγωνική ρίζα θετικού αριθμού.

4 Να αποδείξετε ότι:

α) $\sqrt{\frac{\sqrt{4}}{2}+\sqrt{9}} = 2$ β) $\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = 2$

γ) $\sqrt{7+\sqrt{2+\sqrt{1+\sqrt{9}}}} = 3$

Εικόνα 6

Εδώ οι μαθητές βρίσκονται συνήθως σε αμήχανη κατάσταση. Έχουν μπροστά τους μια ισότητα, στην οποία απουσιάζει ο άγνωστος! Μαθημένοι από τις εξισώσεις, είναι σύνηθες το φαινόμενο να προτείνουν λύσεις, όπως η επόμενη:

$$\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{4}}} = 2$$

$$\sqrt{2+\sqrt{2+2}} = 2$$

$$\sqrt{2+\sqrt{4}} = 2$$

$$\sqrt{2+2} = 2$$

$$\sqrt{4} = 2$$

$$2 = 2.$$

Ας παρατηρηθεί ότι, ενώ η παραπάνω απόδειξη είναι από μαθηματικής άποψης σωστή, εντούτοις, δεν είναι η ενδεδειγμένη. Στο σημείο αυτό είναι καταλυτικός ο ρόλος του καθηγητή των μαθηματικών, ο οποίος καλείται να εξηγήσει πώς ακριβώς πρέπει να αντιμετωπιστεί αυτό το θέμα, χρησιμοποιώντας ίσως προηγουμένως μερικά απλούστερα παραδείγματα.

Στην ίδια παράγραφο βρίσκουμε και τις ακόλουθες ασκήσεις:

12 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4				
36	49				

Τι συμπεραίνετε;

13 Να συμπληρώσετε τον παρακάτω πίνακα:

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16				
25	36				

Τι συμπεραίνετε;

Εικόνα 7

Παρατηρούμε ότι ο μαθητής ενθαρρύνεται, βασιζόμενος στην εξέταση δύο μόνο περιπτώσεων, να διατυπώσει τους κανόνες

$$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\beta}, \qquad \frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}.$$

Ωστόσο, ας παρατηρηθεί ότι στις απαντήσεις των ασκήσεων, στο τέλος του βιβλίο, οι συγγραφείς επιλέγουν μια πιο ουδέτερη στάση:

12

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta}$	$\sqrt{\alpha\beta}$
9	4	3	2	6	6
36	49	6	7	42	42

Παρατηρούμε ότι: $\sqrt{\alpha}\sqrt{\beta} = \sqrt{\alpha\cdot\beta}$.

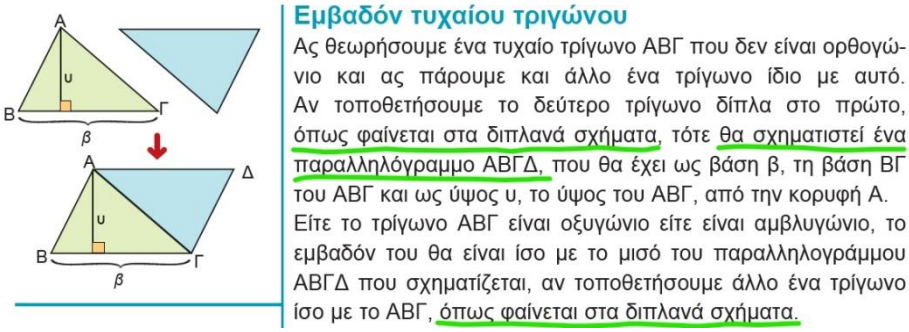
13

α	β	$\sqrt{\alpha}$	$\sqrt{\beta}$	$\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}}$	$\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$
4	16	2	4	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
25	36	5	6	$\frac{5}{6}$	$\frac{5}{6}$

Παρατηρούμε ότι: $\frac{\sqrt{\alpha}}{\sqrt{\beta}} = \sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}$.

Εικόνα 8

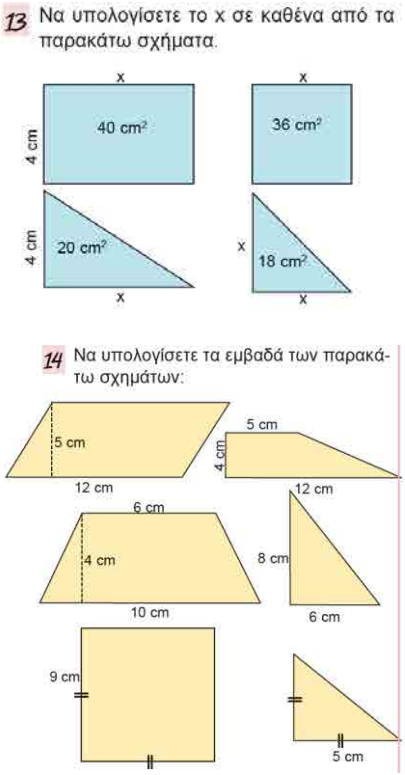
Η επόμενη επαφή των μαθητών με την απόδειξη γίνεται στην παράγραφο Β.1.3. Εμβαδά επίπεδων σχημάτων. Τώρα συμβαίνει το εξής ενδιαφέρον: Ενώ παρατίθενται οι αποδείξεις των τύπων υπολογισμού των εμβαδών παραλληλογράμμου, τριγώνου και τραπεζίου, αυτές παρουσιάζουν κενά. Επομένως τελικά καταλήγουν να μην αποτελούν αποδείξεις, αλλά διαισθητικές αιτιολογήσεις. Ας δούμε το παράδειγμα του τριγώνου:



Εικόνα 9

Τίθεται το εύλογο ερώτημα, γιατί το τετράπλευρο ΑΒΓΔ είναι παραλληλόγραμμο. Ο διδάσκων που θα τολμήσει να θίξει το ερώτημα αυτό, συχνά λαμβάνει την απάντηση ότι «φαίνεται από το σχήμα». Τώρα είναι η σειρά του διδάσκοντος να εξηγήσει τη διαφορά του φαίνεσθαι και του είναι και να αρχίσει να καλλιεργεί στους μαθητές έναν από τους σκοπούς διδασκαλίας της γεωμετρίας, την ορθή παραγωγή συλλογισμών και εξαγωγή συμπερασμάτων.

Δυστυχώς, το σχολικό βιβλίο υπονομεύει τον σκοπό αυτόν. Είναι συχνό το φαινόμενο να δίνονται ελλιπή δεδομένα σε ασκήσεις και να πρέπει ο μαθητής να υποθέσει μόνος του βολικά δεδομένα που θα τον οδηγήσουν στην εύρεση μιας λύσης. Ενδεικτικά παραδείγματα είναι τα ακόλουθα:



Εικόνα 10

Στην παράγραφο Β.1.4. «Πυθαγόρειο Θεώρημα», οι μαθητές μαθαίνουν ένα από τα βασικότερα θεωρήματα των Μαθηματικών. Συνήθως η εφαρμογή του θεωρήματος για την εύρεση μιας

πλευράς του τριγώνου, δεν παρουσιάζει δυσκολίες. Εκεί που εντοπίζονται αρκετές δυσκολίες, είναι στην εφαρμογή του αντιστρόφου. Η ικανότητα διάκρισης μεταξύ του ευθέος και αντιστρόφου φαίνεται ότι δυσκολεύει τους μαθητές. Ακόμα και η διατύπωση του αντιστρόφου βλέπουμε ότι είναι συχνά προβληματική:

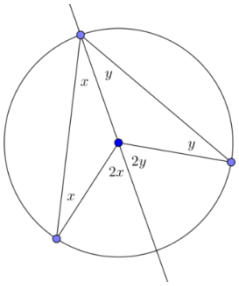
«Αν το τετράγωνο της υποτείνουσας ενός τριγώνου ισούται με το άθροισμα των τετραγώνων των κάθετων πλευρών…»
Ας επισημάνουμε ακόμη ότι το ίδιο το σχολικό βιβλίο περιπλέκει την κατάσταση αυτή. Στην παράγραφο Β.3.1. διαβάζουμε

Επομένως, ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα και στα δύο τρίγωνα ΑΒΓ και ΒΜΓ.

β) Αφού ισχύει το Πυθαγόρειο θεώρημα, τα τρίγωνα θα είναι ορθογώνια, οπότε θα ισχύει $\widehat{A} = 90°$ και $\widehat{M} = 90°$.

Εικόνα 11

Με αυτόν τον τρόπο επιχειρούν οι συγγραφείς να εξηγήσουν γιατί «Κάθε εγγεγραμμένη γωνία που βαίνει σε ημικύκλιο είναι ορθή».
Εκτός από την προβληματική διατύπωση, ας παρατηρήσουμε ότι η απόδειξη του θεωρήματος «Κάθε εγγεγραμμένη γωνία ισούται με το μισό της επίκεντρης που βαίνει στο ίδιο τόξο» θα μπορούσε να περιέχεται στο σχολικό βιβλίο, καθώς αφενός πρόκειται για αναπάντεχο αποτέλεσμα, αφετέρου γιατί βασίζεται σε απλές ιδιότητες των γωνιών τριγώνου.



Εικόνα 12

Η Άλγεβρα και η Γεωμετρία στο βιβλίο της Γ' Γυμνασίου

Όπως και στις προηγούμενες τάξεις, το πρώτο μέρος του βιβλίου, η Άλγεβρα, εξυπηρετεί ως επί το πλέιστον υπολογιστικούς σκοπούς και οι αποδεικτικές ασκήσεις είτε απουσιάζουν, είτε εξαιρούνται από τη διδακτέα ύλη σύφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας. Εξαίρεση αποτελούν οι αποδεικτικές ασκήσεις στην παράγραφο των Ταυτοτήτων. Μάλιστα, οι φετινές οδηγίες διδασκαλίας εξαιρούν από τη διδακτέα ύλη σχεδόν ολόκληρη την παράγραφο της διάταξης, οπότε μοιραία αποκλείονται αποδεικτικές ασκήσεις στις ανισότητες. Διδάσκονται μόνο οι ιδιότητες της διάταξης που χρησιμοποιούνται στην επίλυση ανισώσεων 1^{ου} βαθμού, αλλά «*…αυτές οι ιδιότητες θα πρέπει να συζητηθούν διαισθητικά και χωρίς την απόδειξη του σχολικού βιβλίου*».
Αναμφίβολα, η αποδεικτική διαδικασία έχει κεντρική θέση στο δεύτερο μέρος του βιβλίου, τη Γεωμετρία. Τα Κριτήρια Ισότητας Τριγώνων αποτελούν ιδανική περίσταση για να εξασκηθεί ο μαθητής στην μαθηματική απόδειξη. Ωστόσο δημιουργείται στους μαθητές η εντύπωση ότι με τη βοήθεια των Κριτηρίων Ισότητας, είτε αποδεικνύονται ήδη γνωστές γεωμετρικές ιδιότητες, είτε προτάσεις των οποίων η αλήθεια είναι «προφανής». Λόγου χάρη, η πρώτη εφαρμογή του βιβλίου είναι η

1 Σε ισοσκελές τρίγωνο ΑΒΓ (ΑΒ = ΑΓ) φέρουμε τη διχοτόμο ΑΔ.
α) Να συγκριθούν τα τρίγωνα ΑΒΔ και ΑΔΓ.
β) Να αποδειχθεί ότι $\hat{B} = \hat{\Gamma}$ και ότι η διχοτόμος ΑΔ είναι διάμεσος και ύψος.

Εικόνα 13

ενώ στην Προτεινόμενη Άσκηση 8 ζητείται

8 Να αποδείξετε ότι οι απέναντι πλευρές ενός παραλληλογράμμου είναι ίσες.

Εικόνα 14

Στο σημείο αυτό καλείται (απαιτείται;) ο διδάσκων να δαπανήσει χρόνο για να εξηγήσει στους μαθητές τη σημασία της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Μια ιστορική αναδρομή κρίνεται χρήσιμη, όπως και η αναφορά στα Στοιχεία του Ευκλείδη και στη σημασία τους στην ιστορία της επιστήμης.

Τέλος, στο κεφάλαιο της Τριγωνομετρίας οι μαθητές συναντούν την απόδειξη, τόσο σε θέματα θεωρίας (απόδειξη των βασικών τριγωνομετρικών ταυτοτήτων), όσο και σε ασκήσεις, αν και, σύμφωνα με τις οδηγίες διδασκαλίας, ασκήσεις όπως οι παρακάτω θεωρείται ότι *«είναι εκτός στόχων του αναλυτικού προγράμματος και δεν είναι σε θέση να τις διαπραγματευτούν μόνοι τους οι περισσότεροι μαθητές»*

7 Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2α - ημ^2α = 2συν^2α - 1$ β) $ημ^2ασυν^2β + ημ^2αημ^2β + συν^2α = 1$

8 Να αποδείξετε ότι:
α) $(ημω + συνω)^2 + (ημω - συνω)^2 = 2$
β) $(αημω + βσυνω)^2 + (βημω - ασυνω)^2 = α^2 + β^2$

9 Να αποδείξετε ότι:
α) $συν^2x εφ^2x + συν^2x = 1$ β) $\frac{ημx + συνx}{1 + εφx} = συνx$

Εικόνα 15

Δυστυχώς, ο Νόμος των Ημιτόνων και ο Νόμος των Συνημιτόνων είναι εκτός διδακτέας ύλης (!) και ως εκ τούτου, η καρδιά της Τριγωνομετρίας, δηλαδή η επίλυση τριγώνου απουσιάζει. Έτσι οι μαθητές δεν έχουν την ευκαιρία να δούνε στην πράξη ένα από τα πιο πρακτικά θέματα των σχολικών Μαθηματικών.

Συμπεράσματα

Όπως γίνεται φανερό από τα παραπάνω, στα σχολικά βιβλία του Γυμνασίου, η θέση της απόδειξης είναι υποβαθμισμένη. Οι μαθητές ολοκληρώνουν την υποχρεωτική εκπαίδευση έχοντας ελάχιστη επαφή με τη μαθηματική απόδειξη. Αν και πρόκειται για μια απαιτητική διεργασία, η οποία προϋποθέτει σε κάποιο βαθμό μαθηματική ωριμότητα, δεν παύει να βρίσκεται στα βασικά ζητούμενα της διδασκαλίας των Μαθηματικών. Το πρόβλημα γίνεται οξύτερο όταν οι μαθητές φτάνουν στη βαθμίδα του Λυκείου και δεν έχουν κατακτήσει βασικές δεξιότητες προς αυτή την κατεύθυνση.

Στο ερώτημα «Τι μπορεί να γίνει, ώστε να βελτιωθεί αυτή η κατάσταση;» η απάντηση βρίσκεται στους στόχους που θέτει το ίδιο το εκπαιδευτικό σύστημα. Από ό,τι φαίνεται τις τελευταίες δεκαετίες, έχει υπάρξει μια στροφή προς τον εμπειρισμό, τη διαισθητική επιβεβαίωση των καταστάσεων, ως αντίβαρο στον φορμαλισμό που επικρατούσε προηγουμένως. Η απόδειξη δίνει συνήθως τη θέση της στην πειραματική επαλήθευση. Η γεωμετρία είναι περισσότερο υποβαθμισμένη από ποτέ. Φαίνεται να μην είναι πρωταρχικής σημασίας η ορθή παράθεση αλληλουχίας λογικών συμπερασμάτων, αλλά πώς μπορεί η επιστήμη να υπηρετήσει τη ζωή για να λυθούν πρακτικά προβλήματα. Ίσως ο εξορθολογισμός της ύλης (όχι η μείωσή της) να αποτελεί τη χρυσή τομή.

Αξιοποίηση της αποδεικτικής διαδικασίας με στόχο την αναβάθμιση της διδασκαλίας των Μαθηματικών του Λυκείου

Αλέξανδρος Γ. Συγκελάκης
Ηράκλειο Κρήτης
asygelakis@gmail.com

Περίληψη
Σκοπός της παρούσας εργασίας είναι να εντάξει στα μαθηματικά του Λυκείου μερικές από τις αποδείξεις που μπορούν να αναβαθμίσουν τη διδασκαλία του μαθήματος και ταυτόχρονα να αναδείξει τη σημασία της αποδεικτικής διαδικασίας για τη σωστή και σε βάθος κατανόηση νέων εννοιών και τη χρήση των θεωρημάτων μέσα από κατάλληλα παραδείγματα και ασκήσεις. Στην παρούσα εργασία έχουμε επικεντρωθεί στην ύλη της Άλγεβρας της Α και της Β Λυκείου αφού για τη Γ Λυκείου έγινε εκτενής αναφορά στις εργασίες [7], [8].

Εισαγωγή
Είναι γεγονός ότι τα θέματα των Πανελληνίων τα τελευταία χρόνια απαιτούν ένα είδος μαθηματικής ωριμότητας από τους μαθητές που τα αναλυτικά προγράμματα όχι μόνο δεν ενθαρρύνουν αλλά απεναντίας την αποτρέπουν. Χαρακτηριστικά παραδείγματα είναι παρακάτω θέματα από εξετάσεις όπου η επιτυχής ολοκλήρωσή τους απαιτούσε ενδιάμεσα βήματα που στηρίζονταν σε γνώσεις που αποκτήθηκαν (ή θα έπρεπε να έχουν αποκτηθεί) σε προηγούμενες τάξεις.

1) Το 2001 οι μαθητές έπρεπε να αποδείξουν τη συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{array}{c} g(x)(3f^2(x)+2\beta f(x)+\gamma)=x^2-4x+\beta \\ \beta^2<3\gamma \end{array}\right\} \Rightarrow g(x)>0$$

2) Το 2003 έπρεπε να συγκρίνουν τους αριθμούς

$$\frac{\sqrt{\frac{23}{3}}}{5}, \quad \frac{\sqrt{\frac{41}{3}}}{8}$$

3) Το 2004 έπρεπε να δείξουν τη συνεπαγωγή:

$$\left.\begin{array}{c} \alpha>0 \\ \alpha>\beta \\ \alpha^2-\beta^2=-\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow \beta<0$$

4) Το 2006 έπρεπε να δείξουν ότι αν οι ευθείες $y=\frac{1}{\alpha}x+\ln\alpha-1$ και $y=e^{\beta}x+e^{\beta}-\beta e^{\beta}$ ταυτίζονται τότε ο α είναι ρίζα της εξίσωσης $f(x)=0$ όπου $f(x)=\frac{x+1}{x-1}-\ln x$

5) Το 2009 έπρεπε να δείξουν ότι $x+\sqrt{x^2+9}>0$ για κάθε $x\in\mathbb{R}$.

Μέθοδος της απαγωγής σε άτοπο
Μία μέθοδος απόδειξης που πρέπει να τονιστεί και να χρησιμοποιηθεί αρκετά από τον διδάσκοντα ώστε ο μαθητής να εξοικειωθεί και να μάθει να χρησιμοποιεί. Πολλές φορές χρησιμοποιείται υποσυνείδητα και στην καθημερινή ζωή.
Στις δικαστικές αίθουσες είναι καθημερινότητα: «Ο πελάτης μου είναι αθώος διότι την ώρα του εγκλήματος βρισκόταν σε άλλη πόλη όπως μαρτυρούν τα στοιχεία που σας παραθέτω, άρα (αν ήταν ένοχος) θα έπρεπε να βρίσκεται σε δύο διαφορετικά μέρη την ίδια στιγμή πράγμα που είναι αδύνατο (άτοπο).»
Ο Γαλιλαίος (στο βιβλίο *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche Intorno a Due Nuove Scienze* που έγραψε το 1638) για να καταρρίψει τον ισχυρισμό του Αριστοτέλη σύμφωνα με τον οποίο *«τα βαρύτερα σώματα φτάνουν γρηγορότερα στο έδαφος»*, παρέθεσε το εξής επιχείρημα:

«Ας υποθέσουμε ότι αυτό που λέει ο Αριστοτέλης είναι σωστό. Τότε ένας μεγάλος λίθος Α θα αποκτήσει πέφτοντας ταχύτητα, ας υποθέσουμε 10 μέτρα το δευτερόλεπτο, ενώ ένας μικρότερος Β θα αποκτήσει μικρότερη ταχύτητα, ας υποθέσουμε 5 μέτρα το δευτερόλεπτο. Φυσικά αν δέναμε τους δύο λίθους και τους αφήναμε να πέσουν μαζί, τότε ο μεγαλύτερος θα έκανε τον μικρότερο να κινηθεί γρηγορότερα κι έτσι το σύστημα των δύο λίθων θα είχε ταχύτητα μικρότερη των 10 (αφού ο μεγάλος λίθος επιβραδύνεται από τον μικρό). Όμως το σύστημα των 2 λίθων είναι ένας λίθος πιο βαρύς από τους δύο προηγούμενους κι έτσι θα έπρεπε να έχει ταχύτητα μεγαλύτερη και από τους δύο, άτοπο.»

Φυσικά η γεωμετρία προσφέρεται για τη διδασκαλία και εμβάθυνση στη μέθοδο της απαγωγής σε άτοπο. Τα επόμενα (κυρίως αλγεβρικά) αποτελέσματα μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εισαγωγή στην εξαιρετική αυτή αποδεικτική διαδικασία.

- Ο $\sqrt{2}$ είναι άρρητος
- Άρρητος + ρητός = άρρητος
- Αν ο α είναι ακέραιος και ο α^2 είναι άρτιος τότε ο α είναι άρτιος
- Οποιοσδήποτε μη μηδενικός ρητός γράφεται ως γινόμενο δύο άρρητων
- Υπάρχουν άπειροι πρώτοι αριθμοί
- Ισχύει $\eta\mu x + \sigma\upsilon\nu x \geq 1$ για κάθε $x \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$

<u>Ο ρόλος των αντιπαραδειγμάτων</u>

Τα αντιπαραδείγματα στη διδασκαλία αν χρησιμοποιηθούν ορθά μπορούν να επέμβουν και να διορθώσουν σκοτεινά σημεία της σχολικής ύλης, να ακονίσουν το μυαλό του μαθητή και να το κρατήσουν σε εγρήγορση, και να βελτιώσουν τις αποδεικτικές ικανότητές του. Αναφέρουμε χαρακτηριστικά τα παρακάτω:

- Αν $\alpha^2 = \beta^2$ τότε $\alpha = \beta$
- Αν $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ τότε $\alpha\gamma > \beta\delta$
- Για οποιουσδήποτε αριθμούς $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ με $\alpha > \beta$ και $\gamma > \delta$ ισχύει ότι $\alpha - \gamma > \beta - \delta$».
- Για οποιοδήποτε θετικό αριθμό α ισχύει ότι $3\alpha^2 > 2\alpha$.
- άρρητος + άρρητος = άρρητος
- $\text{άρρητος}^{\text{άρρητος}} = \text{άρρητος}$
- Είναι αληθείς οι ισότητες $(\alpha+\beta)^2 = \alpha^2 + \beta^2$, $|\alpha+\beta| = |\alpha| + |\beta|$, $\sqrt{\alpha+\beta} = \sqrt{\alpha} + \sqrt{\beta}$, $\log(\alpha+\beta) = \log\alpha + \log\beta$, $10^{\alpha+\beta} = 10^{\alpha} + 10^{\beta}$ για όλους εκείνους τους πραγματικούς αριθμούς για τους οποίους έχουν νόημα οι παραστάσεις; Υπάρχουν αριθμοί για τους οποίους ισχύουν ως ισότητες; Να τοποθετήσετε το κατάλληλο σύμβολο $<, >, \leq, \geq$ στη θέση του $=$ για τις διάφορες τιμές των α, β.

<u>Να βρεθεί το λάθος…</u>

Η αναζήτηση του λάθους από τους μαθητές σε μία αποδεικτική διαδικασία τους φέρνει αντιμέτωπους με συχνά λάθη που κάνουν και επεμβαίνει διορθωτικά και με έμμεσο τρόπο σε αυτά. Μετά από ολιγόλεπτα ή ωριαία διαγωνίσματα, μπορεί ο δάσκαλος να εκμεταλλευτεί διδακτικά τα λάθη των μαθητών του, συλλέγοντας τα βασικότερα και ανώνυμα να τα παρουσιάσει στον πίνακα ζητώντας από τους μαθητές να τα ανακαλύψουν. Ο γόνιμος διάλογος που δημιουργείται αναδεικνύει τα προβλήματα και τις περισσότερες φορές τα διορθώνει. Το ίδιο μπορεί να συμβεί αν για παράδειγμα οι μαθητές διορθώσουν τα ανώνυμα διαγωνίσματα των συμμαθητών τους (αυτό γίνεται εύκολα αν κάθε μαθητής έχει ένα κωδικό τον οποίο μόνο ο καθηγητής γνωρίζει και μετά το πέρας της εξέτασης γίνει ανταλλαγή γραπτών) σε ένα διαγνωστικό (για παράδειγμα) διαγώνισμα στην αρχή της χρονιάς. Έτσι αναδεικνύονται τα προβλήματα του τμήματος και ο διδάσκων μπορεί να εστιάσει την προσοχή του σε αυτά κάνοντας επαναλήψεις σε όσες ενότητες θεωρήσει απαραίτητο. Ταυτόχρονα, οι μαθητές γίνονται δέκτες όλων όσων ακούν κατά καιρούς από τους διδάσκοντες για τα λάθη τα οποία κάνουν κατά τη διάρκεια εξετάσεων. Τελείως ενδεικτικά αναφέρω τα παρακάτω.

1) Να λυθεί η εξίσωση $\eta\mu x = \sigma\upsilon\nu x$

Λύση

Η εξίσωση γράφεται $\eta\mu^2 x = \sigma\upsilon\nu^2 x \Leftrightarrow \eta\mu^2 x = 1 - \eta\mu^2 x \Leftrightarrow 2\eta\mu^2 x = 1 \Leftrightarrow$

$\eta\mu x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2} \Leftrightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{4}, x = 2k\pi \pm \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ ■

Σχόλιο: Παρατηρούμε ότι οι λύσεις $x = 2k\pi - \frac{\pi}{4}, x = 2k\pi + \frac{3\pi}{4}, k \in \mathbb{Z}$ δεν επαληθεύουν την αρχική εξίσωση και είναι απόλυτα φυσιολογικό καθώς υψώνοντας στο τετράγωνο στην πρώτη ισότητα, χάνεται η ισοδυναμία με την αρχική εξίσωση (στην πραγματικότητα στο τέλος βγάζουμε τις λύσεις και της εξίσωσης $\eta\mu x = -\sigma\upsilon\nu x$), συνεπώς είναι απαραίτητη στο τέλος η επαλήθευση (ή την προσεγγίζουμε με διαφορετικό τρόπο).

2) Αν για τους πραγματικούς αριθμούς α, β ισχύει $\alpha^2 + \beta^2 + 4\alpha - 6\beta + 13 = 0$, να δείξετε ότι $\alpha = -2$ και $\beta = 3$.

Λύση

Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$ η σχέση ισχύει συνεπώς οι τιμές αυτές των α, β είναι δεκτές.

3) Να λύσετε την εξίσωση

$$\frac{x^2+1}{2} + \frac{x^2+2}{6} + \frac{x^2+3}{12} + \cdots + \frac{x^2+n}{n^2+n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$$

Λύση

Παρατηρούμε ότι η εξίσωση έχει ως λύσεις τους αριθμούς $x = 1$ και $x = -1$, άρα αυτές είναι οι ζητούμενες.

Σχόλιο: Παρατηρήστε ότι η παραπάνω απάντηση είναι σωστή αν επιπλέον αναφερθεί ότι πρόκειται για δευτεροβάθμια εξίσωση με δύο άνισες ρίζες τις $-1,1$ άρα και μοναδικές.

<u>Το σύνολο των πραγματικών αριθμών</u>

<u>Ερώτημα:</u> Πως ορίζονται οι πραγματικοί αριθμοί στο Λύκειο; Ποιες είναι οι θεμελιώδεις προτάσεις (αξιώματα) που χρησιμοποιούνται και ποιες είναι οι προτάσεις που μπορούμε να αποδείξουμε με τη βοήθεια αυτών; Για παράδειγμα η ισότητα $(-1)\cdot(-1) = 1$ αποδεικνύεται ή θεωρείται αξίωμα;

Για να απαντήσουμε στο παραπάνω καθώς και σε άλλα παρόμοια ερωτήματα, αναφέρουμε εν συντομία τις τέσσερις ομάδες στις οποίες κατατάσσονται τα αξιώματα για τον ορισμό των πραγματικών: 2 αξιώματα ισότητας, 7 αξιώματα σώματος, 3 αξιώματα διάταξης, 1 αξίωμα συνέχειας.

<u>Αξίωμα Ισότητας:</u> A_1) Δύο αριθμοί $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ καλούνται ίσοι, τότε και μόνο όταν αποτελούν διάφορες ονομασίες ενός και του αυτού αριθμού που οφείλονται στους διάφορους τρόπους κατασκευής αυτού. Για την ισότητα ισχύουν οι εξής ιδιότητες:

α) $\alpha = \alpha$, για κάθε $\alpha \in \mathbb{R}$ (ανακλαστική)

β) $\alpha = \beta \Leftrightarrow \beta = \alpha$ (συμμετρική)

γ) $\alpha = \beta$ και $\beta = \gamma \Rightarrow \alpha = \gamma$ (μεταβατική)

Π.χ. Λόγω της ανακλαστικής ιδιότητας έχουμε $3 = 3 = 3 = \cdots$ Ας σημειώσουμε ότι υπάρχουν μη πραγματικοί «αριθμοί» για τους οποίους δεν ισχύει η ανακλαστική ιδιότητα. Ας πούμε για το ∞ δε μπορούμε να γράψουμε $\infty = \infty$.

<u>Αξιώματα Σώματος:</u> B_1) Υπάρχει ένα σύνολο αριθμών, το οποίο καλούμε σύνολο των πραγματικών αριθμών και το συμβολίζουμε με $\mathbb{R}$, το οποίο είναι μη κενό, μεταξύ των στοιχείων του οποίου έχουν οριστεί δύο πράξεις, η πρόσθεση $(+)$ και πολλαπλασιασμός $(\cdot)$ βάσει των οποίων σε κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών α,β αντιστοιχούν δύο νέοι αριθμοί $\alpha + \beta$, $\alpha \cdot \beta$ (ή αβ), που καλούνται άθροισμα και γινόμενο των α, β αντίστοιχα. Το άθροισμα $\alpha + \beta$ και το γινόμενο $\alpha \cdot \beta$ είναι επίσης πραγματικοί αριθμοί που ορίζονται μονοσήμαντα από τους α, β.

B_2) $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha + \beta = \beta + \alpha$ και $\alpha\beta = \beta\alpha$.

B_3) $\forall \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $(\alpha + \beta) + \gamma = \alpha + (\beta + \gamma)$ και $(\alpha\beta)\gamma = \alpha(\beta\gamma)$.

B_4) (Υπαρξη ουδέτερων στοιχείων) Υπάρχουν δύο διαφορετικοί μεταξύ τους πραγματικοί αριθμοί που ονομάζονται μηδέν (0) και ένα (1) οι οποίοι έχουν αντίστοιχα τις ιδιότητες: $\alpha + 0 = 0 + \alpha = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ και $1 \cdot \alpha = \alpha \cdot 1 = \alpha$, $\forall \alpha \in \mathbb{R}$. (Το ότι είναι μοναδικοί μπορεί να προκύψει ως συνέπεια των αξιωμάτων).

B_5) Για κάθε πραγματικό αριθμό α, υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός β με την ιδιότητα $\alpha + \beta = \beta + \alpha = 0$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται αντίθετος του α, αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός και τον συμβολίζουμε με $-\alpha$.

B_6) Για κάθε πραγματικό αριθμό $\alpha \neq 0$ υπάρχει ένας τουλάχιστον πραγματικός αριθμός β, ώστε $\alpha\beta = \beta\alpha = 1$. Ο αριθμός αυτός ονομάζεται αντίστροφος του α, αποδεικνύεται ότι είναι μοναδικός και συμβολίζεται με α^{-1}.

B_7) Ο πολλαπλασιασμός επιμερίζεται ως προς την πρόσθεση δηλαδή $\forall\, \alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ισχύει $\alpha(\beta + \gamma) = \alpha\beta + \alpha\gamma$.

Μερικές από τις προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν (και από τους μαθητές) λόγω των παραπάνω:

1) (Νόμος της διαγραφής - πρόσθεση) $\alpha + \beta = \alpha + \gamma \Rightarrow \beta = \gamma$.
(Συνέπεια της παραπάνω είναι η μοναδικότητα του 0 στο αξίωμα B_4 και η μοναδικότητα του αντίθετου στο αξίωμα B_5)

<u>Απόδειξη:</u> Για οποιοδήποτε $\alpha \in \mathbb{R}$ υπάρχει $x \in \mathbb{R}$ ώστε $x + \alpha = 0$ (αξίωμα B_5). Από το αξίωμα A_1 έχουμε $x + (\alpha + \beta) = x + (\alpha + \gamma)$ (1). Συνεπώς (αξίωμα B_3) $x + (\alpha + \beta) = (x + \alpha) + \beta = 0 + \beta = \beta$ (η τελευταία ισότητα λόγω του αξ. B_4). Επίσης $x + (\alpha + \gamma) = (x + \alpha) + \gamma = 0 + \gamma = \gamma$. Συνεπώς η (1) λόγω των παραπάνω γίνεται $\beta = \gamma$. ■

2) $-\alpha = -\beta \Rightarrow \alpha = \beta$.

3) Για κάθε διατεταγμένο ζεύγος πραγματικών αριθμών α, β υπάρχει μοναδικός αριθμός x, ώστε $\beta + x = \alpha$.

<u>Απόδειξη:</u> Ύπαρξη: Από το B_5 υπάρχει αριθμός (ο $-\beta$) ώστε $(-\beta) + \beta = \beta + (-\beta) = 0$. Άρα (αξ. B_3) $\beta + (\alpha + (-\beta)) = (\alpha + (-\beta)) + \beta = \alpha + ((-\beta) + \beta) = \alpha$. Θέτουμε $x = \alpha + (-\beta)$ και τότε θα είναι $\beta + x = \beta + (\alpha + (-\beta)) = \alpha$.
Μοναδικότητα: Έστω ότι υπάρχει z για τον οποίο $\beta + z = \alpha$. Τότε θα είναι $\beta + z = \beta + x$ άρα $z = x$.
Σχόλιο: Ο μοναδικός αυτός αριθμός x ονομάζεται διαφορά του β από το α και συμβολίζεται με $\alpha - \beta$. ■

4) $\alpha - \beta = \alpha + (-\beta)$, $-(-\alpha) = \alpha$, $-(\alpha + \beta) = (-\alpha) + (-\beta)$
5) $\frac{\alpha}{\beta} = \alpha \cdot \frac{1}{\beta}$, $(\alpha^{-1})^{-1} = \alpha$, $(\alpha\beta)^{-1} = \alpha^{-1} \cdot \beta^{-1}$

6) $\alpha \cdot 0 = 0 \cdot \alpha = 0$
<u>Απόδειξη:</u> Είναι $\alpha \cdot 0 = \alpha \cdot (0 + 0) = \alpha \cdot 0 + \alpha \cdot 0$ και από το νόμο της διαγραφής έχουμε $\alpha \cdot 0 = 0$ ■

7) $\alpha(\beta - \gamma) = \alpha\beta - \alpha\gamma$

8) (Νόμος της διαγραφής – πολ/σμός) αν $\alpha \neq 0$ και $\alpha\beta = \alpha\gamma$ τότε $\beta = \gamma$.

9) Εάν $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ και $\alpha \neq 0$ τότε υπάρχει ένας και μόνο αριθμός $\gamma \in \mathbb{R}$ ώστε $\alpha\gamma = \beta$. Ο αριθμός αυτός γ ονομάζεται πηλίκο των β και α και συμβολίζεται με $\frac{\beta}{\alpha}$ ή και με $\beta : \alpha$.
Παρατήρηση: Εάν $\alpha \in \mathbb{R}$ με $\alpha \neq 0$ τότε ο αντίστροφος x του α είναι το πηλίκο $\frac{1}{\alpha}$ και θα μπορούμε να χρησιμοποιούμε και το συμβολισμό $\frac{1}{\alpha}$ για τον αντίστροφο του α.

10) $(-\alpha)\beta = \alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$ και $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$

<u>Απόδειξη:</u> Είναι $\beta + (-\beta) = 0$. Άρα $\alpha[\beta + (-\beta)] = \alpha \cdot 0 = 0$. Οπότε $\alpha\beta + \alpha(-\beta) = 0$ δήλαδή ο $\alpha(-\beta)$ είναι αντίθετος του αβ δηλαδή $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$. Όμοια $(-\alpha)\beta = -(\alpha\beta)$. Για την απόδειξη του $(-\alpha)(-\beta) = \alpha\beta$ θέτουμε στην $\alpha(-\beta) = -(\alpha\beta)$ όπου β το $-\beta$ και χρησιμοποιούμε την $-(-\alpha) = \alpha$. ■
Πόρισμα: $(-1)(-1) = 1$

<u>Αξιώματα Διάταξης:</u> Η έννοια της θετικότητας εισάγεται αξιωματικά με τον ακόλουθο τρόπο. Υποθέτουμε ότι υπάρχει ένα μη κενό υποσύνολο του συνόλου $\mathbb{R}$ των πραγματικών αριθμών το οποίο ονομάζεται σύνολο των θετικών αριθμών για το οποίο ισχύουν τα παρακάτω αξιώματα:

Γ_1) Εάν α, β θετικοί αριθμοί τότε και οι αριθμοί $\alpha + \beta$ και αβ είναι επίσης θετικοί.

Γ_2) Εάν $\alpha \neq 0$ πραγματικός αριθμός τότε ένας μόνο από τους α, -α είναι θετικός.

Γ_3) Ο αριθμός 0 δεν είναι θετικός.
Σύμβαση: Συμφωνούμε να λέμε ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι μεγαλύτερος του πραγματικού αριθμού β αν και μόνο αν ο αριθμός $\alpha - \beta$ είναι θετικός και γράφουμε $\alpha > \beta$. Λέμε επίσης ότι ο πραγματικός αριθμός α είναι μικρότερος του αριθμού β, αν και μόνο αν $\beta > \alpha$ και γράφουμε $\alpha < \beta$.
Μερικές από τις προτάσεις που μπορούν να αποδειχθούν λόγω των παραπάνω αξιωμάτων:
1) Κάθε θετικός αριθμός είναι μεγαλύτερος του 0 και αντίστροφα κάθε πραγματικός αριθμός α με $\alpha > 0$ είναι θετικός.
<u>Απόδειξη:</u> Έστω α θετικός. Τότε αφού $\alpha - 0 = \alpha =$ θετικός άρα $\alpha > 0$.
Αντίστροφα αν $\alpha > 0$ τότε από τον ορισμό η διαφορά $\alpha - 0$ είναι θετικός και αφού $\alpha - 0 = \alpha$ άρα ο α είναι θετικός. ■
Σημείωση: Στο εξής το γεγονός $\alpha =$ θετικός θα συμβολίζεται με $\alpha > 0$.
2) (Θεώρημα της τριχοτομίας) Εάν α, β πραγματικοί τότε θα αληθεύει μία και μόνο μία από τις σχέσεις $\alpha > \beta,\ \alpha < \beta,\ \alpha = \beta$.
<u>Απόδειξη:</u> Εφόσον οι α, β είναι πραγματικοί άρα και οι $\alpha - \beta$ και $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$ θα είναι επίσης πραγματικοί και διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
i) $\alpha - \beta = 0$. Τότε $\alpha = \beta + 0 = \beta$

ii) $\alpha - \beta \neq 0$. Τότε βάσει του Γ_2 μόνο ένας εκ των $\alpha - \beta$, $\beta - \alpha = -(\alpha - \beta)$ θα είναι θετικός. Εάν ο $\alpha - \beta$ είναι θετικός, τότε $\alpha > \beta$. Σε αυτή την περίπτωση δεν γίνεται να έχουμε και $\beta > \alpha$ διότι τότε ο $\beta - \alpha$ θα ήταν θετικός που αντιβαίνει στο αξίωμα Γ_2. Εάν τώρα ο $\beta - \alpha$ είναι θετικός έχουμε $\beta > \alpha$ και όμοια όπως πριν δεν μπορεί να ισχύει ταυτόχρονα $\alpha > \beta$. ■

3) (Μεταβατική Ιδιότητα) Εάν για τρεις πραγματικούς αριθμούς α, β, γ ισχύουν οι σχέσεις $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ τότε θα ισχύει $\alpha < \gamma$.

<u>Απόδειξη:</u> Αφού $\alpha < \beta$ και $\beta < \gamma$ άρα $\beta - \alpha > 0$ και $\gamma - \beta > 0$. Άρα από το αξίωμα Γ_1 είναι $(\beta - \alpha) + (\gamma - \beta) > 0$ δηλαδή $\gamma - \alpha > 0$ που δίνει την $\alpha < \gamma$.
Σχόλιο: Λόγω της παραπάνω προκύπτει και ότι αν $\alpha > \beta$ και $\beta > \gamma$ τότε θα ισχύει $\alpha > \gamma$. ■

4) Ο αριθμός 1 είναι θετικός.

<u>Απόδειξη:</u> Όπως είδαμε στην ιδιότητα 2, μία από τις σχέσεις $1 > 0$, $1 = 0$, $1 < 0$ ισχύει. Όμως από τον ορισμό των 0,1 είναι $1 \neq 0$. Ας υποθέσουμε ότι $1 < 0$. Τότε ο αριθμός $0 - 1 = -1$ είναι θετικός. Όμως από το αξίωμα Γ_1 ο αριθμός $(-1)(-1)$ είναι επίσης θετικός δηλαδή ο 1 είναι θετικός, άτοπο. Συνεπώς $1 > 0$. ■

<u>Αξίωμα συνέχειας:</u> Εάν ένα σύνολο Ε πραγματικών αριθμών είναι άνω φραγμένο, τότε υπάρχει μεταξύ των άνω φραγμάτων ένα ελάχιστο. Δηλαδή υπάρχει πραγματικός αριθμός Μ τέτοιος ώστε
i) Το Μ είναι άνω φράγμα του Ε δηλαδή $x \leq M$, για κάθε $x \in E$.
ii)$M \leq M'$ για κάθε άνω φράγμα M' του Ε.

<u>Συμπέρασμα:</u> Οι μαθητές θα πρέπει να είναι σε θέση να κατανοήσουν ότι για την ανάπτυξη μίας μαθηματικής θεωρίας είναι αναγκαίες κάποιες αρχικές παραδοχές (αξιώματα). Τροχοπέδη για την κατανόηση του τρόπου ορισμού των πραγματικών αριθμών αποτελεί το γεγονός ότι πολλές ιδιότητες προήλθαν από μηχανική εφαρμογή στην επίλυση προβλημάτων στο Δημοτικό. Ιδανικό μάθημα για να γίνει μία εισαγωγή στην έννοια των αξιωμάτων είναι η Ευκλείδεια Γεωμετρία. Εξάλλου ο μαθητής έρχεται σε επαφή και με άλλα σύνολα τα οποία είναι εφοδιασμένα με πράξεις και έχουν δομή (σύνολο διανυσμάτων, σύνολο μιγαδικών αριθμών, σύνολο συναρτήσεων).
Θα πρέπει να εντάξουμε στη διδασκαλία μας τον επαγωγικό συλλογισμό στο Λύκειο (από τα θεμέλια που είναι τα αξιώματα και στηριζόμενοι σε αυτά, παράγουμε νέες προτάσεις που με τη βοήθειά τους θα δώσουν νέες προτάσεις). Αυτό είναι ευκαιρία να γίνει είτε στη Γεωμετρία ήδη από την Α Λυκείου, είτε στο κεφάλαιο των διανυσμάτων στη Β Λυκείου.
Το τελευταίο μπορούμε να το καταφέρουμε να το εντάξουμε στη διδασκαλία μας, αποφεύγοντας ασκήσεις τεχνικού χαρακτήρα οι οποίες στηρίζονται σε στείρες μεθοδολογίες και καλούπια που στερούν από το μαθητή τη δημιουργικότητα.

<u>Ταυτότητες – Παραγοντοποίηση</u>
Στην παράγραφο η οποία αποτελεί επανάληψη των γνώσεων του Γυμνασίου με ελάχιστες νέες προσθήκες, μπορούμε να αφιερώσουμε 1 διδακτική ώρα ώστε να αναδείξουμε τη «δύναμη» της Άλγεβρας σε προβλήματα που θα αδυνατούσαμε να αντιμετωπίσουμε με συνηθισμένες μεθόδους. Η εκτέλεση γρήγορων πράξεων ή η εύρεση αθροισμάτων αποτελούν κατάλληλα ερεθίσματα για τους μαθητές ώστε ο παραπάνω στόχος να επιτευχθεί.
<u>Άσκηση:</u> Να αποδείξετε ότι ο αριθμός

$$A = \frac{333334 \cdot 666663 \cdot 333331 + 333327}{333333^2}$$

είναι ακέραιος και να βρεθεί ο ακέραιος αυτός. (Διαγωνισμός «Ο Θαλής» 1998-1999)

Λύση:
Ονομάζουμε για ευκολία $\alpha = 333333$ και η παράσταση Α γίνεται

$$A = \frac{(\alpha+1)(2\alpha-3)(\alpha-2)+\alpha-6}{\alpha^2} = \cdots = \frac{2\alpha^3-5\alpha^2}{\alpha^2} = 2\alpha-5$$

κι έτσι Α=666661 ■

<u>Άσκηση:</u> α) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+1)^2-\alpha^2 = 2\alpha+1$
να βρείτε το άθροισμα $A = 1+2+3+\cdots+100$
β) Με τη βοήθεια της ταυτότητας $(\alpha+1)^3-\alpha^3 = 3\alpha^2+3\alpha+1$ να βρείτε το άθροισμα $B = 1^2+2^2+3^2+\cdots+100^2$
γ) Μπορείτε με ανάλογο τρόπο να βρείτε το άθροισμα

$$\Gamma = 1^3+2^3+3^3+\cdots+100^3\ ;$$

Λύση
α) Με χρήση της ταυτότητας έχουμε:

$$\begin{gathered} 2^2-1^2 = 2\cdot 1+1 \\ 3^2-2^2 = 2\cdot 2+1 \\ 4^2-3^2 = 2\cdot 3+1 \\ \vdots \\ 100^2-99^2 = 2\cdot 99+1 \\ 101^2-100^2 = 2\cdot 100+1 \end{gathered}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω παίρνουμε:

$$101^2-1^2 = 2A+100 \Leftrightarrow 2A = 100\cdot 102-100 \Leftrightarrow A = \frac{100\cdot 101}{2}$$

β) Όμοια όπως στο ερώτημα (α) και με χρήση της αντίστοιχης ταυτότητας παίρνουμε:

$$\begin{gathered} 2^3-1^3 = 3\cdot 1^2+3\cdot 1+1 \\ 3^3-2^3 = 3\cdot 2^2+3\cdot 2+1 \\ 4^3-3^3 = 3\cdot 3^2+3\cdot 3+1 \\ \vdots \\ 100^3-99^3 = 3\cdot 99^2+3\cdot 99+1 \\ 101^3-100^3 = 3\cdot 100^2+3\cdot 100+1 \end{gathered}$$

Προσθέτοντας κατά μέλη τις παραπάνω παίρνουμε:

$$101^3-1^3 = 3B+3A+100$$

Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειωθεί ο τρόπος γρήγορης εύρεσης του Β με αλγεβρικό τρόπο χωρίς επίπονες πράξεις. Μπορούμε να ζητήσουμε ήδη από την αρχή από τους μαθητές να αποδείξουν το γνωστό:

$$B = \frac{100\cdot(100+1)\cdot(2\cdot 100+1)}{6}$$

που απλοποιεί πολύ τις πράξεις για να φτάσουμε στο τελικό αποτέλεσμα και περιμένουμε μία διαδικασία σαν την παρακάτω:

$$\begin{gathered} 3B = (101-1)\left(101^2+101+1\right)-3\cdot\frac{100\cdot 101}{2}-100 \Leftrightarrow \\ 6B = 2\cdot 100\cdot\left(101^2+101+1\right)-3\cdot 100\cdot 101-2\cdot 100 \Leftrightarrow \\ 6B = 100\cdot\left(2\cdot 101^2+2\cdot 101+2-3\cdot 101-2\right) \Leftrightarrow \\ 6B = 100\cdot\left(2\cdot 101^2-101\right) \Leftrightarrow \\ 6B = 100\cdot 101\cdot(2\cdot 101-1) \Leftrightarrow \\ B = \frac{100\cdot(100+1)\cdot(2\cdot 100+1)}{6} \end{gathered}$$

γ) Όμοια όπως στο α και στο β.

***Σχόλιο*:** Για το 1ο ερώτημα υπάρχει ήδη ο γνωστός τρόπος της αντιμετάθεσης τους αθροίσματος (που διδάσκεται εξάλλου και στην απόδειξη του τύπου για το άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου) αλλά προτείνουμε την παραπάνω μέθοδο διότι δείχνει τον τρόπο με τον οποίο μπορούμε να γενικεύσουμε τη διαδικασία ώστε να βρίσκουμε κλειστό τύπο για αθροίσματα της μορφής $1^k + 2^k + 3^k + \cdots + \nu^\kappa$. ■

Σχετικές ασκήσεις

1) Να κάνετε γενικεύσεις των παρακάτω τύπων για ν προσθετέους και να δείξετε ότι $1^3 + 2^3 + 3^3 + \cdots + \nu^3 = (1 + 2 + 3 + \cdots + \nu)^2$

2) Να βρείτε το άθροισμα $1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + 3 \cdot 4 + \cdots + 100 \cdot 101$. Γενικεύστε το συμπέρασμά σας.

<u>Τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$</u>

Αφού δείξουμε τις σχέσεις που αφορούν το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών μίας εξίσωσης μπορούμε να τις χρησιμοποιήσουμε για την παραγοντοποίησή του υπό τη μορφή άσκησης:

Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2 + \beta x + \gamma, \alpha \neq 0$ με ρίζες x_1, x_2. Να δείξετε ότι το τριώνυμο:

α) παίρνει τη μορφή $\alpha(x^2 - Sx + P)$, όπου S, P το άθροισμα και το γινόμενο των ριζών αντίστοιχα.

β) παραγοντοποιείται ως $\alpha(x - x_1)(x - x_2)$.

<u>Απόδειξη</u>

α) Είναι γνωστό ότι $S = -\frac{\beta}{\alpha}$ απ' όπου $\beta = -\alpha S$ και $P = \frac{\gamma}{\alpha}$ απ' όπου $\gamma = \alpha P$. Αντικαθιστώντας στην αρχική μορφή του τριωνύμου, παίρνουμε τη ζητούμενη.

β) Αντικαθιστώντας τις $S = x_1 + x_2$ και $P = x_1 x_2$ στην μορφή στην οποία καταλήξαμε στο α) ερώτημα παίρνουμε

$$\alpha[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1 x_2] = \alpha(x^2 - x_1 x - x_2 x + x_1 x_2)$$
$$= \alpha[x(x - x_1) - x_2(x - x_1)] = \alpha(x - x_1)(x - x_2) \blacksquare$$

Στο τριώνυμο υπάρχουν αρκετές όμορφες ασκήσεις που μπορεί ο εκπαιδευτικός να κάνει μέσα στην τάξη ώστε να ενισχύσει την αποδεικτική διαδικασία και την σκέψη των μαθητών. Πόσες φορές στη Γ Λυκείου δε χρειαστήκαμε (π.χ. στην εύρεση ορίων) να παραγοντοποιήσουμε με γρήγορο τρόπο ένα τριώνυμο της μορφής $\alpha x^2 + \beta x + \gamma$ όπου η μία ρίζα του ήταν γνωστή; Για παράδειγμα το τριώνυμο $2x^2 - x - 10$ έχει προφανή ρίζα το -2 άρα παραγοντοποιείται ως 2(x-2)(x- ?). Στο σημείο αυτό «καλούμε» τους μαθητές να μαντέψουν τι πρέπει να μπει στη θέση του «?» αλλά κυρίως το «γιατί» δουλεύει η μέθοδός τους.

Σχετικές ασκήσεις: 1) Να παραγοντοποιήσετε τα τριώνυμα $3x^2 + 5x - 2$, $3x^2 - 2x - 1$, $x^2 + 3ax + 2a^2$, $2x^2 + 5xy + 3y^2$ χωρίς να λύσετε τις αντίστοιχες εξισώσεις και χωρίς να κάνετε διάσπαση των όρων για παραγοντοποίηση.

2) Να απλοποιήσετε την παράσταση

$$\frac{-x^2 + \alpha x + \beta(\beta - \alpha)}{x^2 + (\alpha + \beta)x - 2\alpha(\alpha - \beta)}$$

Άσκηση

Αν $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ με $(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha) \neq 0$, τότε να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης

$$A = \frac{(\alpha - 1)(\alpha + 1)}{(\alpha - \beta)(\alpha - \gamma)} + \frac{(\beta - 1)(\beta + 1)}{(\beta - \alpha)(\beta - \gamma)} + \frac{(\gamma - 1)(\gamma + 1)}{(\gamma - \alpha)(\gamma - \beta)}$$

Λύση

Είναι

$$A = \frac{(\alpha^2 - 1)(\gamma - \beta) + (\beta^2 - 1)(\alpha - \gamma) + (\gamma^2 - 1)(\beta - \alpha)}{(\alpha - \beta)(\beta - \gamma)(\gamma - \alpha)}$$

Χωρίς να «χαλάσουμε» τον αριθμητή κάνοντας πράξεις, παρατηρούμε ότι ο αριθμητής είναι ένα τριώνυμο του α (είτε του β είτε του γ).

Το γράφουμε στη μορφή $(x^2 - 1)(\gamma - \beta) + (\beta^2 - 1)(x - \gamma) + (\gamma^2 - 1)(\beta - x)$ για ευκολία. Επειδή ο συντελεστής του x^2 είναι το $\gamma - \beta$ άρα όταν παραγοντοποιηθεί θα έχει τη μορφή

$(\gamma-\beta)(x-x_1)(x-x_2)$ όπου x_1, x_2 οι ρίζες του τριωνύμου. Ποιες όμως είναι οι ρίζες του; Επειδή παρατηρούμε ότι στον παρονομαστή (με τον οποίο θα γίνουν οι όποιες απλοποιήσεις προκύψουν) υπάρχει ο όρος $\alpha-\beta$ και $\alpha-\gamma$, «υποψιαζόμαστε» ότι ο β ή ο γ (ή και οι δύο) είναι οι ζητούμενες ρίζες. Πράγματι,
για $x=\beta$ και για $x=\gamma$ παρατηρήστε ότι το τριώνυμο μηδενίζεται, άρα τελικά η παραγοντοποίησή του θα είναι $(\gamma-\beta)(x-\beta)(x-\gamma)$ κι επειδή το x είναι το α άρα τελικά

$$A=\frac{(\gamma-\beta)(\alpha-\beta)(\alpha-\gamma)}{(\alpha-\beta)(\beta-\gamma)(\gamma-\alpha)}=1$$

■

Άσκηση
Έστω α,β,γ πραγματικοί αριθμοί τέτοιοι ώστε $\alpha>0,\ \beta>\alpha+\gamma$. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma=0$, έχει άνισες ρίζες. (Διαγωνισμός «Ο ΘΑΛΗΣ» 1997-1998)
Λύση
Η διακρίνουσα είναι ίση με $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma$.
(Σκέψεις: Εάν ήταν εφικτό να υψώσουμε τη σχέση $\beta>\alpha+\gamma$ στο τετράγωνο, τότε θα βγάζαμε άμεσα τη διακρίνουσα μη αρνητική. Όμως κάτι τέτοιο δε μπορούμε να το κάνουμε καθώς δε γνωρίζουμε το πρόσημο των μεταβλητών β και γ. Αν ήταν φυσικά $\gamma\geq 0$ τότε θα είχαμε άμεσα ότι $\beta>\alpha+\gamma>0$ κι έτσι θα μπορούσαμε να υψώσουμε και τα δύο μέλη στο τετράγωνο. Τι γίνεται όμως όταν $\gamma<0$;)
Διακρίνουμε τις εξής περιπτώσεις:
Αν $\gamma\geq 0$ τότε $\beta>\alpha+\gamma>0$ οπότε

$$\beta^2>(\alpha+\gamma)^2\Rightarrow\beta^2-4\alpha\gamma>\alpha^2-2\alpha\gamma+\gamma^2\Rightarrow\Delta>(\alpha-\gamma)^2\geq 0\Rightarrow\Delta>0$$

κι έτσι η αρχική εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.
Αν $\gamma<0$ τότε $\alpha\gamma<0$ οπότε προφανώς $\Delta=\beta^2-4\alpha\gamma>0$ οπότε και πάλι η εξίσωση έχει δύο άνισες ρίζες.
***Σχόλιο*:** Παρατηρείται πολλές φορές οι μαθητές να κάνουν αυθαίρετες παραδοχές ώστε να καταλήξουν στο επιθυμητό αποτέλεσμα που ζητάει η (αποδεικτική συνήθως) άσκηση χωρίς περαιτέρω σκέψεις. Στην Α Λυκείου οι μαθητές δεν είναι ακόμη εξοικειωμένοι με την ανάγκη διάκρισης περιπτώσεων στην πορεία της άσκηση και αυτή είναι μία διαδικασία που πρέπει να την αναδείξουμε στο μάθημα, κάνοντας αρκετές ασκήσεις αυτού του τύπου. ■
Σχετικές ασκήσεις: 1) Αν η ανίσωση $\alpha x^2+\beta x+\gamma>0$ έχει ως λύση τον αριθμό 2 τότε έχει άπειρες λύσεις.
2) Να δείξετε ότι $\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2\geq 0$ για οποιουσδήποτε πραγματικούς αριθμούς α,β. Πότε ισχύει η ισότητα;
3) Δίνεται το τριώνυμο $\alpha x^2+\beta x+\gamma$ με $0<\gamma<\beta<\alpha$. Αν ρ_1,ρ_2 οι ρίζες του να αποδείξετε ότι $\rho_1,\rho_2\in(-1,1)$.
(http://www.mathematica.gr/forum/viewtopic.php?p=207786#p207786)

Άσκηση
Να λυθεί η εξίσωση $\sqrt{5-x}=5-x^2$
Λύση: Αν προσπαθήσουμε να τη λύσουμε με συμβατικές μεθόδους, τότε καταλήγουμε σε μία εξίσωση 4ου βαθμού χωρίς ακέραιες ρίζες την οποία δύσκολα λύνουμε χωρίς παραγοντοποίηση. Μπορούμε όμως να κάνουμε το εξής: Για $x\in\left[-\sqrt{5},\sqrt{5}\right]$ η εξίσωση γίνεται $5^2-(2x^2+1)\cdot 5+x^4+x=0$ συνεπώς βλέποντάς την ως τριώνυμο του 5 με διακρίνουσα $\Delta=(2x-1)^2$, καταλήγουμε στο ότι

$$5=\frac{2x^2+1\pm(2x-1)}{2}$$

κι έτσι καταλήγουμε στην επίλυση 2 απλών δευτεροβάθμιων εξισώσεων των οποίων τις λύσεις εύκολα βρίσκουμε. Είναι τελικά $x=\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ και $x=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$. ■

Άσκηση

Δίνεται η εξίσωση $\alpha^2x^2 + 2\alpha(\sqrt{2}-1)x + \sqrt{x-2} + 3 - 2\sqrt{2} = 0$ όπου $x \in \mathbb{R}$ άγνωστος και $\alpha \in \mathbb{R}$ παράμετρος. Να λύσετε την εξίσωση για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου α. (Διαγωνισμός «Ο Ευκλείδης» 2012-2013)

Λύση

Αν $\alpha = 0$ τότε $\sqrt{x-2} = 2\sqrt{2} - 3 < 0$ άρα είναι αδύνατη.

Αν $\alpha \neq 0$ τότε βλέπουμε την παραπάνω εξίσωση ως δευτεροβάθμια ως προς α με διακρίνουσα $\Delta = -4x^2\sqrt{x-2}$. Για να έχει λοιπόν λύση πρέπει $\Delta \geq 0$ που δίνει $x = 2$. Τότε βρίσκουμε

$$4\alpha^2 + 4\alpha(\sqrt{2}-1) + 3 - 2\sqrt{2} = 0 \Leftrightarrow \left(2\alpha + \sqrt{2} - 1\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$$

Συνεπώς η αρχική εξίσωση έχει τη λύση $x = 2$ αν και μόνο αν $\alpha = \frac{1-\sqrt{2}}{2}$. ■

<u>Σύνολο Τιμών Συνάρτησης</u>

Οι μαθητές είναι εξοικειωμένοι με την γραμμική συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$. Με τη βοήθειά της μπορούμε να κάνουμε μία εισαγωγή στην έννοια του συνόλου τιμών βρίσκοντας το σύνολο τιμών της παραπάνω συνάρτησης. Αυτό μπορεί να γίνει έμμεσα με συγκεκριμένα παραδείγματα:

<u>Άσκηση:</u>

Δίνεται η συνάρτηση $f(x) = 2x - 3$. Υπάρχει τιμή του x για την οποία $f(x) = 8$; Ποια είναι αυτή; Πως τη βρήκες; Μπορούμε να επαναλάβουμε την ερώτηση για διάφορες άλλες τιμές της f(x) ($f(x) = \frac{2}{3}$, $f(x) = \pi$, $f(x) = \kappa$ με κ τυχαίο πραγματικό αριθμό). Έτσι μπορούμε μετά να περάσουμε και στην γενικότερη μορφή: Η συνάρτηση $f(x) = \alpha x + \beta$ έχει σύνολο τιμών το □ αν $\alpha \neq 0$ και το μονοσύνολο $\{\beta\}$ αν $\alpha = 0$.

Απόδειξη: Το δεύτερο μέρος είναι φανερό οπότε περιοριζόμαστε για $\alpha \neq 0$.

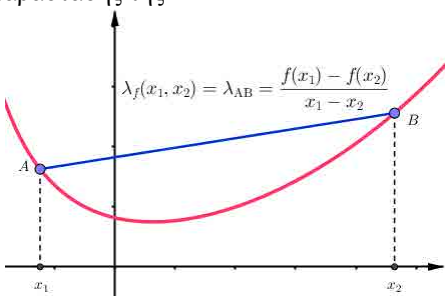
Θα δείξουμε ότι για κάθε $y_0 \in$ □ υπάρχει x_0 ώστε $f(x_0) = y_0$. Για να το βρούμε λύνουμε την εξίσωση $f(x_0) = y_0$ ως προς x_0: $\alpha x_0 + \beta = y_0 \Leftrightarrow x_0 = \frac{y_0-\beta}{a}$

Πράγματι, τότε $f\left(\frac{y_0-\beta}{a}\right) = a\frac{y_0-\beta}{a} + \beta = y_0 - \beta + \beta = y_0$. ■

Την παραπάνω διαδικασία αξίζει να την κάνουμε σε κάθε νέα συνάρτηση που μαθαίνουν οι μαθητές στην Α και Β Λυκείου ($y = \alpha x^2$, $y = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$, $y = \eta\mu x$, $y = \sigma\upsilon\nu x$, $y = \varepsilon\varphi x$, $y = \ln x$, $y = e^x$. Το σύνολο τιμών της τελευταίας συνάρτησης το βρίσκουμε αφού έχει διδαχθεί η έννοια του λογαρίθμου).

Ο λόγος μεταβολής για τη μελέτη συνάρτησης και την εισαγωγή στο διαφορικό λογισμό

Για μία συνάρτηση f ορίζουμε το λόγο μεταβολής $\lambda_f(x_1, x_2) = \frac{f(x_1)-f(x_2)}{x_1-x_2}$ και γεωμετρικά εκφράζει το συντελεστή διεύθυνσης της ευθείας που ορίζεται από τα σημεία $A(x_1, f(x_1))$ και $B(x_2, f(x_2))$ της γραφικής παράστασης της f.



Τότε είναι εύκολο να δείξουμε τις εξής ισοδυναμίες:

$$f \text{ γνησίως αύξουσα} \Leftrightarrow \lambda_f(x_1, x_2) > 0$$

$$f \text{ γνησίως φθίνουσα} \Leftrightarrow \lambda_f(x_1, x_2) < 0$$

που είναι χρήσιμες για εύρεση της μονοτονίας συναρτήσεων που είναι στην ύλη της Β Λυκείου (π.χ. για τη μελέτη της μονοτονίας του τριωνύμου με εναλλακτικό τρόπο χωρίς οριζόντιες και κατακόρυφες μετατοπίσεις ή για ρητές συναρτήσεις).

Παράδειγμα

Να βρεθεί η μονοτονία της συνάρτησης $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Λύση

Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι το $\mathbb{R}$. Για οποιαδήποτε $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2$ παίρνουμε

$$\lambda_f(x_1, x_2) = \cdots = \frac{x_1 + x_2}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)}$$

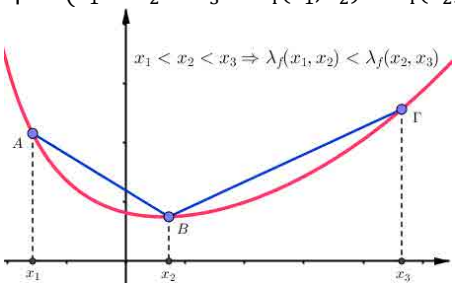
απ' όπου ξεκάθαρα αν $x_1 < x_2 \leq 0$ τότε $\lambda_f(x_1, x_2) < 0$ ενώ αν $0 \leq x_1 < x_2$ τότε $\lambda_f(x_1, x_2) > 0$. Άρα η συνάρτηση f είναι γνησίως φθίνουσα στο $(-\infty, 0]$ και γνησίως αύξουσα στο $[0, +\infty)$. ■

Συνεχίζοντας τις ιδιότητες που έχει ο λόγος μεταβολής, μπορούμε να τον επεκτείνουμε για να μελετήσουμε περισσότερες ιδιότητες μιας συνάρτησης:

$$f \text{ "1-1"} \Leftrightarrow \lambda_f(x_1, x_2) \neq 0$$

$$f \text{ κυρτή} \Leftrightarrow \left(x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \lambda_f(x_1, x_2) < \lambda_f(x_2, x_3)\right)$$

$$f \text{ κοίλη} \Leftrightarrow \left(x_1 < x_2 < x_3 \Rightarrow \lambda_f(x_1, x_2) > \lambda_f(x_2, x_3)\right)$$



Παράδειγμα

Να μελετήσετε ως προς την κυρτότητα τη συνάρτηση $f(x) = \frac{x^2}{x^2+1}$

Λύση:

Έστω $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}$ με $x_1 < x_2 < x_3$. Θα μελετήσουμε το πρόσημο της παράστασης

$$A = \lambda_f(x_1, x_2) - \lambda_f(x_2, x_3)$$

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρήκαμε ότι $\lambda_f(x_1, x_2) = \frac{x_1+x_2}{(x_1^2+1)(x_2^2+1)}$. Έτσι, έχουμε

$$A = \frac{1 - (x_1x_2 + x_2x_3 + x_3x_1)}{(x_1^2 + 1)(x_2^2 + 1)(x_3^2 + 1)}$$

(Επειδή οι αριθμοί x_1, x_2, x_3 μπορεί να είναι οσοδήποτε κοντά μεταξύ τους, όταν τείνουν να γίνουν ίσοι τότε ο αριθμητής τείνει να γίνει ίσος με $1 - 3x^2$ και μηδενίζεται στα $-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$. Είναι λοιπόν πολύ φυσιολογικό να μελετήσουμε το πρόσημο της παραπάνω παράστασης A, στα διαστήματα στα οποία χωρίζουν οι αριθμοί $-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}$ το $\mathbb{R}$).

Είναι εύκολο τώρα να δούμε αν $x_1, x_2, x_3 \in \left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ τότε $A > 0$ άρα η f είναι κυρτή στο $\left[-\frac{\sqrt{3}}{3}, \frac{\sqrt{3}}{3}\right]$ ενώ αν $x_1, x_2, x_3 \in \left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$ τότε $A < 0$ άρα η f είναι κοίλη στο $\left(-\infty, -\frac{\sqrt{3}}{3}\right] \cup \left[\frac{\sqrt{3}}{3}, +\infty\right)$.

Σχόλιο: Μπορούμε σύμφωνα με την παραπάνω άσκηση να φτιάξουμε μια όμορφη άσκηση κατάλληλη για τη Β Λυκείου που να εξετάζει κυρίως τον χειρισμό αλγεβρικών πράξεων από τους μαθητές καθώς και γνώσεις της Α Λυκείου. Αυτό μπορεί να γίνει δίνοντας στους μαθητές

τα διαστήματα της κυρτότητας και ζητώντας το πρόσημο του A και τη γεωμετρική ερμηνεία του πρόσημου. ■

Τέλος, ο λόγος μεταβολής αποτελεί μία εξαιρετική εισαγωγή στο διαφορικό λογισμό καθώς και στους κανόνες παραγώγισης συνάρτησης καθώς οι αλγεβρικές ιδιότητες του λόγου μεταβολής ακολουθούν τους κανόνες παραγώγισης. Συγκεκριμένα:

$$\lambda_{cf}(x_1, x_2) = c\lambda_f(x_1, x_2)$$
$$\lambda_{f\pm g}(x_1, x_2) = \lambda_f(x_1, x_2) \pm \lambda_g(x_1, x_2)$$
$$\lambda_{fg}(x_1, x_2) = \lambda_f(x_1, x_2)f(x_1) + \lambda_g(x_1, x_2)g(x_2)$$
$$\lambda_{g\circ f}(x_1, x_2) = \lambda_g\big(f(x_1), f(x_2)\big) \cdot \lambda_f(x_1, x_2)$$

<u>Τύπος αλλαγής βάσης στους λογαρίθμους</u>

Αφού σχολιασθεί ότι η εξίσωση $\alpha^x = \theta$, $0 < \square \neq 1$ έχει μοναδική λύση για κάθε θετικό αριθμό θ, θα βρούμε τη λύση με δύο τρόπους

$1^{ος}$: Λογαριθμίζοντας με βάση το α παίρνουμε $x = \log_\alpha \theta$

$2^{ος}$: Λογαριθμίζοντας με βάση το $0 < \square \neq 1$ παίρνουμε $x = \frac{\log_\beta \theta}{\log_\beta \alpha}$

Από τους δύο παραπάνω τρόπους και επειδή η λύση είναι μοναδική έχουμε μία απόδειξη του τύπου που αφορά την αλλαγή βάσης στους λογαρίθμους. ■

Βιβλιογραφία

[1]. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α. *Μαθηματικά Γ Τάξης Γενικού Λυκείου Θετική και Τεχνολογική Κατεύθυνση*, ΙΤΥΕ «Διόφαντος» (2010)

[2]. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α., *Άλγεβρα και στοιχεία πιθανοτήτων Α Τάξης Γενικού Λυκείου*, ΙΤΥΕ «Διόφαντος» (2012)

[3]. Ανδρεαδάκης, Σ. κ.α., *Άλγεβρα Β Τάξης Γενικού Λυκείου*, ΙΤΥΕ «Διόφαντος» (2012)

[4]. Καζαντζής Θ.Ν., *Άλγεβρα, Τόμος 1,* Θεσσαλονίκη (1978)

[5]. Μαυρογιάννης Ν., *Γινομένων γαρ πάντων κατά τον λόγον Διδασκαλία και Απόδειξη στα Μαθηματικά Κατεύθυνσης της Γ΄ Λυκείου.* 3η Ημερίδα Μαθηματικών. Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί (2013)

[6]. Συγκελάκης Α. *Λάθη και Παρανοήσεις στα Μαθηματικά του Λυκείου*, 6η Μαθηματική Εβδομάδα, Θεσσαλονίκη (2014)

[7]. Συγκελάκης Α. *Η σημασία των αποδείξεων θεωρίας του σχολικού βιβλίου της Γ΄ Λυκείου στην επίλυση ασκήσεων, η επίδρασή τους στα θέματα των Πανελληνίων εξετάσεων και η επιρροή των παλαιότερων σχολικών βιβλίων*. 8η Μαθηματική Εβδομάδα, Θεσσαλονίκη (2016).

[8]. Θωμαίδης Ι., Μπαρούτης Δ., Σαράφης Ι., Συγκελάκης Α. *Η διδασκαλία της Ανάλυσης στην Γ΄ Λυκείου: Είναι δυνατό να συνδυάσουμε θεωρητική εμβάθυνση και «μεθοδολογία»;,* 33ο Πανελλήνιο Συνέδριο Μαθηματικής Παιδείας, Χανιά (2016)

[9]. http://www.mathematica.gr

ΣΧΟΛΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΙ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ
(Η απόδειξη στη σχολική Γεωμετρία)

Διονύσιος Λάππας
Τμήμα Μαθηματικών ΕΚΠΑ
dlappas@math.uoa.gr

Περίληψη
Με επίκεντρο τον εντοπισμό και οριοθέτηση της απόδειξης στο σχολικό περιβάλλον, θα επιχειρηθεί μια γενική παρουσίαση για τη θέση και το ρόλο των Μαθηματικών στη Μέση Εκπαίδευση. Θα ληφθούν υπόψη τόσο Διδακτικές και επιστημολογικές απόψεις, όσο και καθαρά ενδομαθηματικές θεωρήσεις.

1. Εισαγωγή

Αυτό που οριοθετεί τα Μαθηματικά σε σχέση με τις άλλες διανοητικές δραστηριότητες είναι οι αποδείξεις. Έτσι, δεν θα απείχαμε πολύ από την πραγματικότητα αν ισχυριστούμε ότι η ουσία των Μαθηματικών βρίσκεται στην απόδειξη. Όμως, πως ακριβώς εντάσσεται και σε τι ακριβώς συνίσταται η απόδειξη αποτελεί αφενός μεν ένα αντικείμενο ιστορικής διερεύνησης, αφετέρου δε ένα ενδο-μαθηματικό αντικείμενο έρευνας! Κατά συνέπεια, μια μελέτη της θέσης της απόδειξης στη Δευτεροβάθμια Εκπαίδευση αποτελεί μια πρόκληση

2. Μαθηματικά, Εκπαίδευση και Μαθηματική Εκπαίδευση (με αναφορά στη θέση της Γεωμετρίας στο Σχολικό πλαίσιο)

Ερωτώντας για τα μαθηματικά, όχι για να δοθεί ένας ορισμός, αλλά για τη σχέση τους με την ανθρώπινη διανοητική ανάπτυξη, θα δοθούν ποικίλες απαντήσεις και το ίδιο ασφαλώς θα συμβεί και για άλλα επιστημονικά αντικείμενα. Οι μαθηματικοί βέβαια θα ισχυριστούν ότι πρόκειται για μια δραστηριότητα, αφού οι ίδιοι δραστηριοποιούνται σε αυτά. Σε μια τέτοια δραστηριότητα εμπλέκονται η αναζήτηση και επίλυση προβλημάτων αλλά και η οργάνωση της ύλης. Τα προβλήματα μπορεί να είναι είτε πρωτότυπα είτε να αφορούν στην επεξεργασία για παρουσίαση παλιών η νέων αποτελεσμάτων ενός κλάδου, πιθανώς και από μια διαφορετική σκοπιά. Με αναφορά στη διδασκαλία θα δούμε ότι από πολύ παλιά η οργάνωση ήδη υπάρχουσας ύλης αποτελούσε αντικείμενο εργασίας των μαθηματικών. Αυτό δεν είναι αναγκαστικά κατακριτέο, αφού σταθεροποιεί και συστηματοποιεί θεωρητικά επιτεύγματα που εδραιώνονται με ερευνητική δραστηριότητα.

Ερχόμενοι στην εκπαίδευση, θα δούμε ότι η κατάσταση είναι πιο σύνθετη, αφού σε αυτή υπεισέρχονται τόσο ψυχολογικές συνιστώσες όσο και αντικρουόμενες απόψεις για τις ικανότητες μάθησης. Σύμφωνα με τον Freudental (Freudental, 1971) το πρώτο καταγεγραμμένο μάθημα γεωμετρίας έγινε στον Μένωνα του Πλάτωνα από τον Σωκράτη, στην προσπάθειά του να εκπαιδεύσει ένα σκλάβο σε μαθηματικά θέματα. Από το γεγονός αυτό ο έρχεται στο συμπέρασμα ότι ο καλύτερος τρόπος για να διδαχθεί ένα θέμα είναι «να το δείξεις», άποψη που διατρέχει τη σκέψη των θεωρητικών της εκπαίδευσης μέχρι σήμερα.

Σχετικά με τη Μαθηματική εκπαίδευση τα ερωτήματα γίνονται περισσότερο προβληματικά αφού συνδυάζουν ήδη δύο ευρείες περιοχές, τα μαθηματικά και την εκπαίδευση. Το κυριότερο ζήτημα που εγείρεται είναι το κατά πόσον τα Μαθηματικά θα μπορούσαν να διδαχθούν ως ένα λογικο-παραγωγικό σύστημα. Οι περισσότεροι μαθηματικοί θα συμφωνούσαν ότι αυτή πρέπει να είναι η

φυσιολογική κατάσταση των πραγμάτων, δηλαδή ναι. Και από το σημείο αυτό θα αρχίσουν τα προβλήματα οργάνωσης της ύλης, κύρια στα σχολικά μαθηματικά. Δειγματοληπτικά: πως θα διδαχθούν οι λογάριθμοι πριν ή χωρίς τη θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Πως θα διδαχθεί η γωνία χωρίς την χρήση αναλυτικών συναρτήσεων. Και όμως, ιστορικά αυτό έχει συμβεί και μάλιστα επιτυχώς! Το πλέον χαρακτηριστικό παράδειγμα αποτελεί η Θεωρία των Αριθμών, προηγούμενα από την κατά Peano αξιωματική Θεμελίωση. Σε άλλα θέματα το πράγμα δεν δουλεύει. Η μαθηματική επαγωγή για παράδειγμα χωρίς ακριβή μαθηματική διατύπωση, δεν μπορεί να υπάρξει πέραν κάποιων νοητικών πειραμάτων.

Αν προσπαθήσουμε να τοποθετήσουμε την Γεωμετρία στα παραπάνω πλαίσια μας περιμένουν κάποιες εκπλήξεις. Έξω από τα μαθηματικά και για το ευρύ κοινό, η γεωμετρία θεωρείται ως το πλέον αντιπροσωπευτικό παράδειγμα λογικο-παραγωγικό συστήματος. Και όμως, αυτό δημιούργησε διπλή αντίδραση στην εκπαιδευτική κοινότητα. Σε κάποιους δεν ήταν αρκετά παραγωγικό με την έννοια της αυστηρά δομημένης αξιωματικής παρουσίασης και σε άλλους αρκετά απαιτητικό για τους μαθητές και την διδακτική, με την έννοια ότι αυτή η παραγωγική δομή δεν ανακαλύπτεται από τους μαθητές, που κύρια σκοπεύει η διδασκαλία. Παρόλα αυτά, η γεωμετρία είναι το μόνο μάθημα που διδάσκεται με ένα, υποτυπώδες έστω, ενώ τα άλλα μαθήματα η/και κλάδοι των σχολικών μαθηματικών μάλλον αποτελούν συλλογή αποτελεσμάτων και κανόνων.

Η άλλη άποψη να εισαχθεί και να διδαχθεί ένα σύστημα μαθηματικών γενικά και να θεωρηθεί η γεωμετρία ενταγμένη ως ειδική περίπτωση σε αυτό το σύστημα επιχειρήθηκε και απέτυχε παταγωδώς. Προβλέπει για την γεωμετρία ένα ειδικό κεφάλαιο στην περίπτωση των γραμμικών χώρων με εσωτερικό γινόμενο συγκεκριμένου τύπου. Αυτή η αντιμετώπιση παραβλέπει εντελώς τον ενσώματο χαρακτήρα της γεωμετρίας με την εξερεύνηση του περιβάλλοντος χώρου και των σωμάτων ενταγμένων μέσα σε αυτόν. Πρέπει να υπογραμμιστεί εδώ σε όλους τους τόνους ότι καμία αυστηρή αξιωματική δεν μπορεί να εφαρμοστεί σε σχολικό περιβάλλον υπό τις παρούσες συνθήκες και με δεδομένους τους στόχους στο χώρο της εκπαίδευσης.

3. Σκέψεις πάνω στη φύση των αξιωματικών θεμελιώσεων των γεωμετριών

Αν προσπαθήσουμε να ξεδιαλύνουμε τις σύγχρονες θεμελιώσεις της Γεωμετρίας θα έρθουμε σε επαφή με φιλοσοφικές θέσεις όπως ο πλατωνισμός, ο Φορμαλισμός ο Κοστροκτουβισμός και ίσως κάποιες ακόμα. Μάλιστα μερικοί μαθηματικοί θεωρούν τις φιλοσοφικές τους θέσεις ζήτημα πίστεως.

Οι Πλατωνιστές πιστεύουν ότι τα μαθηματικά αντικείμενα και κατ' επέκταση τα Μαθηματικά υπάρχουν αιώνια, πέραν κάθε χρονικού ορίζοντα και ανεξάρτητα της ανθρώπινης ύπαρξης. Καθήκον του μαθηματικού είναι να διαδώσει και να διερευνήσει αυτήν την υπάρχουσα αλήθεια, οπότε είναι ένας εξερευνητής παρά ένας δημιουργός.

Για τους Φορμαλιστές τα Μαθηματικά είναι συλλογή τυπικών συστημάτων που τα στοιχεία τους διευθετούνται και συνδυάζονται σύμφωνα με εξειδικευμένους κανόνες ενός παιχνιδιού. Αυτοί οι κανόνες, οι ορισμοί και η απόδειξη θεωρημάτων είναι η αποκλειστική ενασχόληση των μαθηματικών. Ο φορμαλιστής είναι ένα δημιουργός και όχι ένας εξερευνητής. Για αυτόν δεν τίθεται ζήτημα ύπαρξης των μαθηματικών αντικειμένων. Αρκεί να αποδείξει ότι οι κανόνες του παιχνιδιού δεν οδηγούν σε αντιφάσεις.

Για τους Κονστροκτουβιστές τα μαθηματικά είναι αποδεκτά στην έκταση που τα αντικείμενά τους προκύπτουν κατασκευαστικά και σε πεπερασμένα βήματα αρχίζοντας από κάποια βασικά αντικείμενα.

Ο Φορμαλισμός ενισχύθηκε υπέρμετρα το δεύτερο μισό του περασμένου αιώνα και η επιρροή του έφτασε μέχρι τις σχολικές αίθουσες διδασκαλίας. Αυτό ίσως δημιουργεί μια αντίφαση αφού οι περισσότεροι μαθηματικοί είναι (θεωρούν τον εαυτό τους) Πλατωνιστές. Όπως χαρακτηριστικά αναφέρεται «κρυφοί πλατωνιστές με τη μαγεία του φορμαλισμού» (Zeiter, 1990). Θα άξιζε να μελετηθεί λίγο περισσότερο ο φορμαλισμός αφού άσκησε ισχυρή επίδραση στα μαθηματικά και στην Γεωμετρία και έγινε συνώνυμος με την αξιωματική γραμμή παρουσίασης, αφού όπως ειπώθηκε πρόκειται για κουλτούρα αξιωματικά δομημένη.

3.1 Επί των αξιωματικών Θεωριών, εν συντομία

Σε μια αξιωματική θεωρία παρουσιάζονται τρία διακριτά στοιχεία: (Α) Τα αξιώματα, (Β) Τα θεωρήματα , και (Γ) Τα μοντέλα. Τα αξιώματα ως κανόνες που με λογική συνεπαγωγή οδηγούν στη διατύπωση θεωρημάτων ή όπως το έθεσε ο Poincare: για να δούμε πως ξεδιπλώνεται η Γεωμετρία αρκεί να εμπιστευθούμε τα αξιώματα της σε μια μηχανή. Τέλος τα μοντέλα αποτελούν υλοποιήσεις της θεωρίας. Για τον πλατωνιστή πηγή των αξιωμάτων του είναι ο περιβάλλων χώρος, σε γενικές γραμμές ακολουθεί τη σειρά (Γ)(Α)(Β). Για τον δημιουργικό φορμαλιστή η σειρά είναι (Α)(Β)(Γ) και αναζητεί μοντέλα όταν η θεωρία αναπτυχθεί πλήρως. Τέλος, οι απαιτήσεις μιας αξιωματικής θεωρίας συνοψίζονται στα: Μη αντιφατικότητα, Ανεξαρτησία , πληρότητα.

3.2 Γεωμετρία και αξιωματικά συστήματα

Το πρώτο αξιωματικό σύστημα αναπτύχθηκε από τους Έλληνες και αφορούσε στη «συνήθη» Γεωμετρία. Περιέχεται στα Στοιχεία του Ευκλείδη και είχαν έντονη διδακτική χροιά, ενώ η παρουσία τους γίνεται αισθητή ακόμα και σήμερα. Ο Hilbert επιχείρησε, χρησιμοποιώντας και την προηγούμενη εργασία πολλών γενεών μαθηματικών, να διορθώσει τα κενά που είχε η γεωμετρία των Στοιχείων ως αξιωματικό σύστημα. Μια κριτική εξέταση των αξιωμάτων του Hilbert δείχνει ότι προϋποτίθεται η αξιωματική θεμελίωση των πραγματικών αριθμών. Έκτοτε αναπτύχθηκαν και άλλα αξιωματικά συστήματα είτε ολόκληρης της Γεωμετρίας η μέρους αυτής είτε με διδακτικές αποβλέψεις όπως το σύστημα του Birkhoff.

Σε ένα εντελώς διαφορετικό κλίμα αντιμετώπισης της γεωμετρίας βρίσκεται το πρόγραμμα Erlagen του Klein. Αυτό το πρόγραμμα δεν έχει καμία εμφανή σχέση με αξιώματα και σκοπεύει στη ταξινόμηση των γεωμετριών με χρήση της θεωρίας των ομάδων μετασχηματισμών.

4. Απόδειξη και Σχολική πραγματικότητα

Σε μια πρώτη προσέγγιση, απόδειξη είναι μια διαδικασία συμπερασμού που μέσα από σειρά επιχειρημάτων οδηγεί σε εδραιωμένα αποτελέσματα. Επομένως, στο πεδίο των Μαθηματικών η απόδειξη νοείται ως μια πειστική παρουσίαση ότι κάποια μαθηματική πρόταση είναι απαραίτητα ορθή μέσα στα αποδεκτά πλαίσια του πεδίου των Μαθηματικών. Αυτή η απλοϊκή τοποθέτηση δεν φωτίζει όλα τα ιδιαίτερα χαρακτηριστικά που απαρτίζουν την απόδειξη.

Η επόμενη τοποθέτηση οριοθετεί την απόδειξη και θέτει ένα προβληματισμό για την ενσωμάτωση αποδείξεων στο σχολικό περιβάλλον:

"Μια απόδειξη στα κλασσικά μαθηματικά ορίζεται σαν μια ακολουθία, συμπερασμάτων όπου το πέρασμα από το ένα συμπέρασμα στο άλλο βασίζεται στις έννοιες ή σε επιτρεπτούς χειρισμούς συμβόλων, και όχι στην αναφορά κανόνων της κατηγορηματικής λογικής" (Knipping, 2003 σελ.13)

Υποδεικνύει ότι στην απόδειξη συνυπάρχουν δύο διακριτά χαρακτηριστικά. Το τυπικό

μέρος, που μπορεί να είναι και ένας επιδέξιος χειρισμός συμβόλων και το εννοιολογικό περιεχόμενο που αναφέρεται στην κατανόηση των εννοιών και των τύπων που υπεισέρχονται στην αποδεικτική διαδικασία. Σε κάθε περίπτωση, η μετάβαση από τον ένα ισχυρισμό στον άλλο, στο εσωτερικό μιας απόδειξης, είναι μια ισχυρά μη τυπική δραστηριότητα.

Άλλες συνιστώσες που καθορίζουν την απόδειξη και αξίζουν ξεχωριστής διερεύνησης είναι η αντίθεση μεταξύ εμπειρικής και φορμαλιστικής φύσης σε μια απόδειξη καθώς και η διάκριση της διαδικασίας που ακολουθείται σε μια απόδειξη από το προϊόν της ίδιας της απόδειξης (η διαδικασία συνδέεται με την εσωτερική δομή, ενώ το προϊόν παραπέμπει στο νόημα).

Δεν θα μπορούσε να μην γίνει αναφορά σε κάποια μεθοδολογικά – διδακτικά ζητήματα που σχετίζονται με την απόδειξη στο σχολικό περιβάλλον. Η αναζήτηση μεθοδολογίας για την κατασκευή και «κτίσιμο» μιας απόδειξης, η ανάπτυξη και οργάνωση της επιχειρηματολογίας και η επιλογή των αιτιολογήσεων, ώστε το τελικό προϊόν να γίνεται αποδεκτό από την κοινότητα. Σε αυτό το σημείο πρέπει να σημειωθεί ότι η απόδειξη αποτελεί εν τέλει ιστορικό και πολιτισμικό αποτέλεσμα και ως τέτοιο χρήζει και κοινωνιολογικής προσέγγισης.

4.1 Η Απόδειξη στο Σχολικό περιβάλλον και όχι μόνον

Ενώ γίνεται ευρέως αποδεκτό ότι η απόδειξη παίζει ένα κεντρικό ρόλο στο αντικείμενο της μαθηματικής επιστήμης και στην καθημερινή πρακτική των επαγγελματιών μαθηματικών, είναι απορίας άξιον το γεγονός ότι ο ρόλος της απόδειξης στα σχολικά μαθηματικά είναι, στην καλύτερη περίπτωση, περιφερειακός. Παραδοσιακά αναμένεται η απόδειξη να παίζει κάποιο ρόλο στα μαθηματικά του Λυκείου και στους μαθητές που προσανατολίζονται σε Θετικές Σπουδές. Όμως, ακόμα και σε αυτή την περίπτωση ο ρόλος της απόδειξης είναι αρκετά περιορισμένος. Η μοναδική συστηματική μελέτη και παρουσίαση αποδείξεων γίνεται κυρίως μέσα από την Ευκλείδεια Γεωμετρία. Όμως, λόγω της πολύ ειδικής επιστημολογικής φύσης αυτού του μαθηματικού αντικειμένου, πιθανώς και να δημιουργούνται στους μαθητές λανθασμένες πεποιθήσεις για τη φύση απόδειξης και των μαθηματικών γενικότερα. Από το άλλο μέρος, τίποτα δεν συνηγορεί στο ότι σε αυτό το στάδιο και εντελώς ξαφνικά οι μαθητές θα εκτιμήσουν την αξία της απόδειξης. Η πρόσβαση σε αποδείξεις δεν μπορεί να διαχωριστεί από τα μαθηματικά, όπως κατά κόρον συμβαίνει στα Αναλυτικά Προγράμματα. Μια πρώιμη πρόσβαση θα δώσει στους μαθητές τη δυνατότητα της συμμετοχής, της επικοινωνίας και της εγχάραξης της μαθηματικής γνώσης και αυτός πρέπει να αποτελέσει τον κύριο λόγο ενσωμάτωσης αποδείξεων στα Αναλυτικά Προγράμματα (Hoyles, 1997).

Στη συνέχεια θα γίνει προσπάθεια εντοπισμού των πολλαπλών ρόλων και εκφάνσεων μέσω των οποίων η απόδειξη μπορεί να λειτουργήσει στο σχολικό περιβάλλον, με κύρια αναφορά στο (Knuth, 2002a) και τις παραπομπές που εκεί δίνονται.

Η πλειονότητα των μαθητών (και όχι μόνον οι μαθητές) εκλαμβάνουν την απόδειξη καθ' όλη τη διάρκεια του σχολικού τους βίου ως *μέσο επικύρωσης της αλήθειας ενός μαθηματικού ισχυρισμού.* Αυτό εμπεριέχει πολλούς κινδύνους. Καταρχήν αυτή η επικύρωση συνήθως περιορίζεται σε προτάσεις με τις οποίες έχουν έρθει αντιμέτωποι (και έχουν επιχειρηματολογήσει επί αυτών) προηγουμένως και που μπορεί να είναι εποπτικά προφανή, με αποτέλεσμα η απόδειξη να θεωρείται επιβεβαίωση γνωστών αληθειών, αφού το αποδεικτέο είναι ήδη οικείο.

Όμως οι μαθηματικοί φυσιολογικά αναμένουν από την απόδειξη κάτι επέκεινα της επικύρωσης αποτελεσμάτων και επιχειρούν διαχωρισμό του αποδεικτικού από τον

επεξηγηματικό χαρακτήρα. Σύμφωνα με μια πολύ γνωστή τοποθέτηση του Hersh οι μαθηματικοί ενδιαφέρονται περισσότερο όχι γιατί το αν ένας ισχυρισμός είναι αληθής αλλά γιατί αυτός ο ισχυρισμός είναι αληθής. Σε αυτά τα πλαίσια, η καλύτερη απόδειξη είναι εκείνη που βοηθά τους Μαθηματικούς (και τους μαθητές) να καταλάβουν το νόημα του προς απόδειξη θεωρήματος, ώστε όχι μόνο να δουν ότι είναι αληθές αλλά και γιατί είναι αληθές. Αυτό υποδεικνύει ότι η απομνημόνευση των αποδείξεων που κυριαρχεί στους σπουδαστές , αποκόπτει την απόδειξη από το υπόλοιπο σώμα των Μαθηματικών και αποστερεί από αυτήν τον αποκαλυπτικό της χαρακτήρα.

Από ένα μέρος της μαθηματικής κοινότητας όλο και περισσότερο υπογραμμίζεται ότι η απόδειξη έχει και μια *κοινωνιολογική συνιστώσα* και πολλές φορές μπορεί να αποτελέσει προϊόν *μαθηματικής διαπραγμάτευσης και διαλόγου*. Με αυτή την ιδιότητα είναι μέσο επικοινωνίας και της μετάδοσης της μαθηματικής γνώσης. Σύμφωνα με μια ενδιαφέρουσα τοποθέτηση του Yuri Manin, για να αποτελέσει μια μαθηματική απόδειξη μέρος αυτού του κοινωνικού κατασκευάσματος πρέπει να αποτελέσει πρώτα προϊόν μαθηματικής συζήτησης και διαπραγμάτευσης και αφού γίνει αποδεκτή από τη μαθηματική κοινότητα να επικυρωθεί ως μαθηματική γνώση. Αυτές οι επισημάνσεις ελάχιστα η καθόλου λαμβάνονται υπόψη και δεν επηρεάζουν άμεσα το σχολικό πλαίσιο, όπου δεν τίθενται ζητήματα εγκυρότητας μιας πρότασης ούτε προβλήματα επικοινωνίας μεταξύ των Μαθηματικών.

Ιστορικά οι αποδείξεις έχουν παίξει σημαντικό ρόλο στην ανακάλυψη η την δημιουργία νέων μαθηματικών θεωριών. Το πλέον αντιπροσωπευτικό παράδειγμα είναι η ανακάλυψη των μη-Ευκλείδειων Γεωμετριών, όπου σε μια πρώιμη φάση ένας κορμός αποτελεσμάτων δημιουργήθηκε με λογική παραγωγική. Βέβαια κάτι αντίστοιχο δεν μπορεί να υπάρξει στην καθημερινή σχολική πραγματικότητα, με το μόνο συγκρίσιμο αντικείμενο ανακάλυψης να είναι η χρήση λογισμικού για την διατύπωση εικασιών που κατόπιν θα πρέπει να αποδειχθούν.

Εν κατακλείδι μόνον μέσω των αποδείξεων αναδεικνύονται τα μαθηματικά ως ένα παραγωγικό σύστημα που συγκροτείται με ορισμούς αξιώματα και θεωρήματα. Αν και στο Λύκειο γίνεται αναφορά μόνον σε ένα τυπικό σύστημα (αυτό της Ευκλείδειας Γεωμετρίας), είναι αμφίβολο το κατά πόσον οι μαθητές συνειδητοποιούν την υποκείμενη αξιωματική δομή και δεν βλέπουν τα θεωρήματα ως ανεξάρτητα μεταξύ τους αποτελέσματα.

Θα αναγνωρίσουμε βέβαια μεγάλη απόκλιση μεταξύ των πάρα πάνω ρόλων της απόδειξης και την πραγματική τους διάσταση στο σχολικό περιβάλλον, με αυτό να αφορά και στους μαθητές και στους καθηγητές των μαθηματικών.

5. Το αξιωματικό πλαίσιο ως νομιμοποιητικό στοιχείο

Όπως αναλυτικά συζητήθηκε παραπάνω, υπάρχουν σοβαρά προβλήματα σε οποιαδήποτε απόπειρα εισαγωγής αξιωματικών παρουσιάσεων σε σχολικό περιβάλλον, αφού δεν εισάγουμε αξιώματα για να δικαιολογήσουμε τα προφανή αλλά για να οδηγηθούμε σε συμπεράσματα που δεν θα μπορούσαν να αποτελέσουν βέβαια γνώση μέσω της εμπειρίας. Πιο κάτω θα καταγραφούν κάποιες περιπτώσεις οι οποίες χωρίς την νομιμοποίηση που παρέχει το αξιωματικό σύστημα καθίστανται έωλες.

5.1 Το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου

Οι μαθητές (και το ευρύ κοινό) το μαθαίνουν πολύ νωρίς και έχουν την πεποίθηση ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι 180 μοίρες η επί το μαθηματικότερο δύο ορθές γωνίες. Αυτό αποτελεί μια θα λέγαμε αρχετυπική μαθηματική γνώση η οποία έχει διαχυθεί ανά τους

αιώνες και διατρέχει την πολιτισμική εξέλιξη. Στην ενδο-μαθηματική διατύπωση «Σε κάθε τρίγωνο το άθροισμα των γωνιών του είναι δύο ορθές γωνίες», δημιουργούνται υπερβάσεις. Η μια υπέρβαση αφορά στην έκφραση «σε κάθε» και η άλλη στο ότι «είναι δύο ορθές». Δηλαδή, σε οποιοδήποτε τόπο και οποτεδήποτε υπολογίσω τις γωνίες ενός οποιουδήποτε τριγώνου το αποτέλεσμα θα είναι πάντα σταθερό και μάλιστα δύο ορθές. Τα προηγούμενα εκφράζουν μια βεβαιότητα ανεξάρτητη του παρατηρητή και της ακρίβειας των οργάνων μέτρησης που χρησιμοποιούνται και των συνθηκών που αυτή η μέτρηση λαμβάνει χώρα. Ακόμα και στον αδαή, εγείρονται ερωτήματα ότι κάτι βαθύτερο, πέραν της εμπειρίας υποκρύπτεται. Αν πρόκειται για ιδανικές καταστάσεις και ιδεατά τρίγωνα, τότε από κάπου αντλείται αυτή η βεβαιότητα! Οι μαθηματικοί ασφαλώς γνωρίζουν ότι το συμπέρασμα μπορεί να προκύψει παραγωγικά, με λογικούς συλλογισμούς, αρχίζοντας από κάποιες πρώτες αρχές. Αυτό έλαβε χώρα ιστορικά και σε μορφή που μας έχει παραδοθεί για πρώτη φορά στα Στοιχεία του Ευκλείδη. Εκεί τέθηκαν πρώτες αρχές (Αξιώματα) που επιτρέπουν τόσο την διατύπωση στη γενικότητα που συζητάμε, όσο και μια απόδειξη του ισχυρισμού. Έτσι γίνεται αποδεκτός σε ένα πολύ συγκεκριμένο πλαίσιο, αυτό της ευκλείδειας Γεωμετρίας. Σήμερα γνωρίζουμε ότι σε αυτό το πλαίσιο το συμπέρασμα νομιμοποιείται και μάλιστα μόνον σε αυτό. Στα αξιώματα αυτής της γεωμετρίας υπάρχει και το αξίωμα των παραλλήλων, που στη διατύπωση του είναι πράγματι καθολικό και υπερβαίνει την εποπτεία. Εν τέλει αυτό είναι ισοδύναμο με το ότι το άθροισμα των γωνιών του τριγώνου είναι σταθερό (και ισούται με δύο ορθές). Τα σημαντικά αποτελέσματα λοιπόν προκύπτουν από μη αναγώγιμες διατυπώσεις αξιωμάτων που καθορίζουν το πλαίσιο ανάπτυξης και τα νομιμοποιούν. Μετά τον 19^{ο} αιώνα αυτό έγινε πλήρως αντιληπτό με την ανάπτυξη των μη ευκλείδειων γεωμετριών, που αποτελούν ένα νέο πλαίσιο αναφοράς. Τώρα ερωτήματα του τύπου «το άθροισμα των γωνιών ενός τριγώνου», εξακολουθούν να διατυπώνονται και να διερευνώνται σε νέα πλαίσια, όπου χρησιμοποιούνται προωθημένα μαθηματικά εργαλεία και μέθοδοι από όλους σχεδόν τους κλάδους των μαθηματικών.

5.2 Η θέση του αξιώματος Pasch

Η ανάπτυξη της γεωμετρίας τον 19^{ο} αιώνα, έφερε στο προσκήνιο εκτός από τις μη ευκλείδειες γεωμετρίες και την αλλαγή των απόψεων μας για την έννοια χώρος, Μέχρι τότε ο φυσικός χώρος είχε δεδομένη μια και μόνον γεωμετρία, την ευκλείδεια. Σε αυτήν οι έννοιες ευθεία, επίπεδο είχαν μια αδιαπραγμάτευτη θέση και παρέπεμπαν σε φυσικά και εμπειρικά αντίστοιχα. Η ανάπτυξη της διαφορικής γεωμετρίας από τον Gauss και τον Riemann επέτρεψε και επέβαλε στους μαθηματικούς να αναθεωρήσουν τις απόψεις για τις θεμελιώδης έννοιες, όπως ευθείες και επίπεδα. Ο χώρος πλέον νοείται ως γεωμετρικός χώρος, σε αντιπαραβολή με τον φυσικό χώρο. Σε αυτό ακριβώς το περιβάλλον άρχισαν οι προσπάθειες επανεξέτασης επί το αυστηρότερο και πέραν της εποπτείας των θεμελίων της στοιχειώδους ευκλείδειας γεωμετρίας. Διαπιστώθηκε ότι η συστηματική προσφυγή στην εποπτεία και στο προφανές του σχήματος (δηλαδή ακριβώς τα στοιχεία που καθιστούσαν αυτήν την γεωμετρία διδάξιμο αντικείμενο στις σχολικές αίθουσες) δεν μπορούσαν πλέον να γίνουν αποδεκτά χωρίς επιπτώσεις στο όλο οικοδόμημα. Μια από τις πρώτες προσπάθειες σε αυτήν την κατεύθυνση, πριν από τον Hilbert, έγινε από τον Pasch. Διευκρινίζει ταυτόχρονα την φύση των ευθειών και την τοπολογία του επιπέδου. Διαπιστώθηκε ότι το άκρως εποπτικό γεγονός ότι «αν μια ευθεία που δεν διέρχεται από καμία κορυφή ενός τριγώνου τμήσει μια πλευρά του τριγώνου (σε εσωτερικό σημείο της), τότε η ευθεία αυτή πρέπει να εξέλθει του τριγώνου τέμνοντας ακριβώς μια και μόνον μια άλλη πλευρά (σε εσωτερικό σημείο)», που απουσίαζε από την γεωμετρία των Στοιχείων, μπορεί αν τεθεί ως αξίωμα να διευθετήσει και να δικαιολογήσει πλήθος άλλων εποπτικών ισχυρισμών που αναφέρονταν στο προφανές του σχήματος. Σήμερα αυτό γίνεται πλήρως αποδεκτό και αποτελεί μέρος μιας ομάδας αξιωμάτων, αυτών της διάταξης, όπου για παράδειγμα μπορεί να αποδειχθεί ότι νομιμοποιείται ο

χωρισμός ενός επιπέδου από μια ευθεία του σε ημιεπίπεδα. Καθόλου παράξενο ότι η απουσία ενός αξιώματος τύπου Pasch δημιουργεί παράδοξα, με πιο γνωστό αυτό που «αποδεικνύει» ότι κάθε τρίγωνο είναι ισοσκελές, επιχειρηματολογώντας επί «σχημάτων»

5.3 Η κατοχύρωση της έννοιας «κανονικό πολύγωνο»

Σχήματα και ορολογία όπως ισόπλευρο τρίγωνο και τετράγωνο ήταν σε χρήση προτού η γεωμετρία θεωρηθεί αυτόνομα ως μαθηματικός κλάδος. Στο νέο πλαίσιο έπρεπε να αποδειχθεί η ύπαρξή τους και μάλιστα κατασκευαστικά. Η κατασκευή είναι μια όλως ιδιαίτερη διεργασία που λαμβάνει χώρα στο εσωτερικό της θεωρίας και υπακούει σε κανόνες που δίδονται εξ αρχής, σήμερα μέσω των αξιωμάτων. Αυτοί οι κανόνες εξιδανικεύουν μηχανικές κατασκευές μέσω οργάνων και πολλές φορές τα πρότυπά τους μπορούν να ανιχνευθούν σε ποικίλες κοινωνικές αντιλήψεις και επιβολές που χάνονται στα βάθη του μύθου.

Ως κανονικό πολύγωνο νοείται ως ένα επίπεδο σχήμα το οποίο είναι ισόπλευρο και ισογώνιο. Η ύπαρξη στο πλαίσιο της ευκλείδειας Γεωμετρίας (μέσω κατασκευής, όπως οριοθετήθηκε ακριβώς πριν) κανονικών πολυγωνικών σχημάτων, είναι μια άκρως επίπονη ερευνητική δραστηριότητα, που σαφώς υπερβαίνει τα σχολικά δεδομένα. Το πρώτο κανονικό πολύγωνο που κατασκευάστηκε μετά από αυτά που απαντώνται στα Στοιχεία (τρίγωνα, τετράγωνα, πεντάγωνα (δεκάγωνα), εξάγωνα, δεκαπεντάγωνα) κατέστη εφικτή με τη λύση του όλου προβλήματος από το Gauss και ήταν το κανονικό δεκαεπτάγωνο!

Θα διερευνήσουμε την ένταξη της έννοιας «κανονικό πολύγωνο» σε κάποιο άλλο πλαίσιο και τον διαφορετικό τρόπο νομιμοποίησης σε αυτό. Είναι γνωστό ότι ένα κανονικό σχήμα έχει πολλές συμμετρίες. Έχει κέντρο συμμετρίας και άξονες συμμετρίας. Όλες αυτές οι συμμετρίες αποτελούν μια μαθηματική δομή, αυτήν της ομάδας σε ένα εντελώς νέο μαθηματικό πλαίσιο. Αν εξετάσουμε το κανονικό πολύγωνο στο νέο πλαίσιο, μέσω της ομάδας των ισομετριών του θα προκύψει τώρα ότι αυτή η ομάδα είναι μιας πολύ ιδιαίτερης μορφής. Συγκεκριμένα είναι πεπερασμένη και αυτό που είναι γνωστό με την ορολογία κυκλική η διεδρική. Το όλο αποτέλεσμα φέρει το όνομα Θεώρημα DaVinci και διατυπώνεται ως εξής: «κάθε πεπερασμένη ομάδα ισομετριών του επιπέδου είναι είτε κυκλική είτε διεδρική, δηλαδή ομάδα συμμετριών ενός κανονικού πολυγώνου». Η έννοια «κανονικό πολύγωνο» στο πλαίσιο της θεωρίας ομάδων νομιμοποιείται ακριβώς γιατί υπάρχουν πάντα πεπερασμένες ομάδες που είναι κυκλικές η διεδρικές και κανονικά πολύγωνα με ν το πλήθος πλευρών «υπάρχουν» σε κάθε περίπτωση (ν από τρία και πάνω)!

Αναφέρεται το ακόλουθο παράξενο αποτέλεσμα: «οι τριχοτόμοι των εσωτερικών γωνιών ενός τριγώνου σχηματίζουν ισόπλευρο τρίγωνο». Σε ποιο πλαίσιο εντάσσεται αυτό το αποτέλεσμα; Στην ευκλείδεια γεωμετρία έχει αποδειχθεί ότι τριχοτόμοι δεν υφίστανται (κατασκευαστικά). Το ισόπλευρο τρίγωνο όμως είναι ένα κανονικό σχήμα. Αποδείξεις υπάρχουν και με χρήση στοιχειώδους γεωμετρίας αλλά και στα πλαίσια της θεωρίας των ομάδων. Ας γίνει αυτό ένα ερώτημα προς προβληματισμό για την επιρροή και τη φύση της γεωμετρίας.

Βιβλιογραφία

Freudental H. Geometry between the devil and the deep Sea, Educational studies of Mathematics, 3(1971), 413-435.

Hoyles, C. (1997). The curricular shaping of students approaches to proof. For the Learning Mathematics, 17 (1), 7-16.

Knipping, C. (2003). Argumentation structures in classroom proving situations. European Research in Mathematics Education III, Thematic Group 4.

Knuth, E. (2002a). Teachers' conceptions of proof in the context of secondary school mathematics. Journal of Mathematics Teacher Education, 5, 61-88.

Zeiter Herbrt : Axiomatics of Geometry in School and in Science, For the Learning of Mathematics, Vol. 10(2) (1990), 17-24.

Η μαθηματική απόδειξη ως μείζον πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης: Πώς μπορούμε να το αντιμετωπίσουμε;

Γιάννης Θωμαΐδης
Σχολικός Σύμβουλος Μαθηματικών

Εισαγωγή

Η έννοια της απόδειξης στο πλαίσιο μιας μαθηματικής θεωρίας έχει, από την εποχή των αρχαίων Ελλήνων και του Ευκλείδη, ορισμένα σταθερά χαρακτηριστικά. Κάθε αποδεικτέα πρόταση ανάγεται μέσω μιας σειράς παραγωγικών συλλογισμών σε προτάσεις που έχουν αποδειχθεί προηγουμένως, δηλαδή τελικά στα (αναπόδεικτα) αξιώματα της συγκεκριμένης θεωρίας. [14]

Στη διαδικασία αυτή παίζουν κρίσιμο ρόλο όχι μόνο τα γνωστικά στοιχεία, όπως οι προσεκτικά διατυπωμένοι ορισμοί και ιδιότητες των μαθηματικών εννοιών και οι κανόνες της λογικής, αλλά επίσης η φαντασία και η επινοητικότητα με τη βοήθεια των οποίων πραγματοποιούνται οι αναγκαίες συνδέσεις. Η δημιουργική ενασχόληση με την αποδεικτική διαδικασία στα Μαθηματικά φαίνεται ότι απαιτεί, εκτός από την κατάκτηση των ειδικών μαθηματικών τεχνικών και μεθόδων, επιπλέον ικανότητες που ανάγονται στην Ψυχολογία και τη Γνωστική Επιστήμη. Μια εξαιρετική ανάλυση αυτού του θέματος από έναν πολύ μεγάλο μαθηματικό γίνεται στο [2].

Πολυάριθμες έρευνες και θεωρητικές αναλύσεις της Διδακτικής των Μαθηματικών έχουν επιβεβαιώσει αυτό που αποτελεί «κοινό τόπο» στην καθημερινή διδακτική πράξη: Οι απαιτήσεις της μαθηματικής απόδειξης, όπως εκτέθηκαν παραπάνω, υπερβαίνουν κατά πολύ τις γνωστικές δυνατότητες της μεγάλης πλειοψηφίας των μαθητών του Λυκείου τουλάχιστον αυτές που αναπτύσσονται και εκδηλώνονται μέσα στις σχολικές τάξεις. Η σχετική βιβλιογραφία, στην οποία καταγράφονται δεδομένα εμπειρικών ερευνών, προτείνονται ερμηνείες και διατυπώνονται προτάσεις για την αντιμετώπιση του προβλήματος, είναι τεράστια και για το λόγο αυτό περιοριζόμαστε σε ολιγάριθμες παραπομπές, κυρίως σε πρόσφατα συλλογικά έργα, όπως π.χ. τα [3] και [4]. Εκείνο που φαίνεται πάντως να προκύπτει με κάποια βεβαιότητα μέσα από αυτό το υλικό, είναι ότι η αποτελεσματική διδασκαλία και μάθηση της απόδειξης δεν εξασφαλίζεται με την απλή ένταξη κάποιας συγκροτημένης μαθηματικής θεωρίας (π.χ. της Ευκλείδειας γεωμετρίας) ή στοιχείων της λογικής στα προγράμματα σπουδών και τα διδακτικά βιβλία. Εκείνο που έχει απόλυτη προτεραιότητα είναι ο σχεδιασμός κατάλληλων διδακτικών δραστηριοτήτων, που λαμβάνουν σοβαρά υπόψη τις δυσκολίες και τις παρανοήσεις των μαθητών.

Όλα αυτά καθιστούν τη διδασκαλία και μάθηση της απόδειξης ένα εξαιρετικά σύνθετο αλλά και ελκυστικό πρόβλημα για την έρευνα και την πράξη της Διδακτικής των Μαθηματικών. Ιδιαίτερα η πράξη αντιμετωπίζει πολλαπλές δυσκολίες καθώς υποχρεώνεται να συμβιβάσει αντιφατικούς στόχους, όπως για παράδειγμα τη σταδιακή εξοικείωση των μαθητών με την αποδεικτική διαδικασία στην Άλγεβρα και τη Γεωμετρία της Α΄ και Β΄ Λυκείου, με την ανάγκη της προετοιμασίας τους για τις ιδιαίτερα υψηλές απαιτήσεις των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων στην Ανάλυση της Γ΄ Λυκείου. Οι απαιτήσεις των εξετάσεων έχουν μάλιστα πολλαπλές αρνητικές συνέπειες σε ολόκληρο το φάσμα της Λυκειακής εκπαίδευσης που ακυρώνουν βασικές αρχές της διδασκαλίας των Μαθηματικών, όπως θα δείξουμε στην επόμενη ενότητα.

---

[14] Τα χαρακτηριστικά αυτά που έχουν σήμερα καθολική αποδοχή δεν ήταν εξίσου αποδεκτά σε όλες τις αρχαίες μαθηματικές παραδόσεις. Αρχαίοι πολιτισμοί που ανέπτυξαν υψηλού επιπέδου μαθηματικές γνώσεις για την αντιμετώπιση «πρακτικών» προβλημάτων (π.χ. μελέτη της κίνησης των ουράνιων σωμάτων για τη μέτρηση του χρόνου και τη ναυσιπλοΐα) δεν συμμερίζονταν το ίδιο πρότυπο αιτιολόγησης των συμπερασμάτων που υιοθέτησαν και καθιέρωσαν οι αρχαίοι Έλληνες. Το ζήτημα αυτό, που αποτελεί σημείο αιχμής για τη σύγχρονη ιστορική έρευνα των Μαθηματικών, εξετάζεται πολύπλευρα και διεισδυτικά στο [1].

Ο ρόλος της απόδειξης στις εξετάσεις και η μάθηση της θεωρίας ως ζήτημα απομνημόνευσης και αναπαραγωγής

Εδώ και πολλά χρόνια έχει καθιερωθεί να θεωρείται ως «φυσιολογικό» θέμα στις πανελλαδικές εξετάσεις Μαθηματικών της Γ΄ Λυκείου η επίλυση μιας διαφορικής εξίσωσης, παρά το γεγονός ότι η σχετική ενότητα του αναλυτικού προγράμματος εξαιρείται παγίως από την εξεταστέα ύλη (χωρίς να έχουν ποτέ εξηγηθεί οι λόγοι αυτής της απόφασης). Έτσι λοιπόν, οι μαθητές που θα ακολουθήσουν Θετικές και Τεχνολογικές σπουδές, ασκούνται στην εκμάθηση τεχνασμάτων για την αναγωγή διαφορικών εξισώσεων σε εφαρμογές δύο πορισμάτων του θεωρήματος μέσης τιμής του Διαφορικού Λογισμού, χωρίς να διδάσκεται το αντίστοιχο εννοιολογικό υπόβαθρο (δηλαδή οι βασικές έννοιες και μορφές των διαφορικών εξισώσεων) που δίνει κάποιο μαθηματικό νόημα σε αυτά τα τεχνάσματα. Ακόμη πιο σοβαρό για το ζήτημα που εξετάζουμε είναι το γεγονός ότι στα συγκεκριμένα θέματα έχει καθιερωθεί να θεωρείται «φυσιολογική» διατύπωση του ζητουμένου η εξής:

«Να αποδείξετε ότι f(x) = …».

Η διατύπωση αυτή επιλέγεται προφανώς αντί των παραδοσιακών

«Να λυθεί η διαφορική εξίσωση …» ή «Να βρεθεί η συνάρτηση f …»

ώστε να αποκαλυφθεί η ζητούμενη συνάρτηση στους μαθητές που αδυνατούν να λύσουν τη διαφορική εξίσωση, για να μπορέσουν να ασχοληθούν με τα υπόλοιπα ερωτήματα που αφορούν συνήθως τη μελέτη της συγκεκριμένης συνάρτησης. Έχει παρατηρηθεί όμως επανειλημμένα κατά τη διόρθωση των γραπτών στα βαθμολογικά κέντρα ότι είναι ακριβώς οι μαθητές αυτής της κατηγορίας που αντί για απόδειξη, αντικαθιστούν τη ζητούμενη (και αποκαλυπτόμενη ταυτόχρονα!) συνάρτηση στη δεδομένη διαφορική εξίσωση, επαληθεύοντας ουσιαστικά τα δεδομένα. Αυτό δεν υποδηλώνει απλώς βαθειά άγνοια της αποδεικτικής διαδικασίας αλλά αποκαλύπτει και ορισμένες κακές διδακτικές πρακτικές, οι οποίες έχουν αναγάγει σε γενική αποδεικτική αρχή την ακόλουθη «μέθοδο»:

«Το ζητούμενο το παίρνω ως δεδομένο και καταλήγω σε κάτι που ισχύει»

Αυτή η «μέθοδος» είναι ασφαλώς πολύ εξυπηρετική, όταν όλα τα ενδιάμεσα στάδια που οδηγούν από το «δεδομένο» σε «αυτό που ισχύει» είναι ισοδύναμα μεταξύ τους και ο χρήστης έχει την ικανότητα ελέγχου των σχετικών μετασχηματισμών. Όμως η διόρθωση των γραπτών των πανελλαδικών εξετάσεων, η οποία αφορά μεγάλα δείγματα μαθητών που έχουν υποστεί μακροχρόνια, σχολική και εξωσχολική μαθηματική εκπαίδευση, δείχνει ότι αυτή την ικανότητα διαθέτουν ελάχιστοι απόφοιτοι της δευτεροβάθμιας εκπαίδευσης (για λεπτομερή στοιχεία και σχετικά παραδείγματα, βλ. στα [6], [7], [9] και [12]).

Αν λάβουμε ως δεδομένα ότι

α) από την αρχή της Α΄ Λυκείου τα σχολικά βιβλία της Άλγεβρας εφαρμόζουν σχεδόν αποκλειστικά αυτή τη «μέθοδο» (βλ. π.χ. τις αποδείξεις των ιδιοτήτων των απολύτων τιμών, των ριζών κ.λπ.) και

β) τη διαρκή συρρίκνωση και υποβάθμιση του ρόλου της απόδειξης στην Ευκλείδεια γεωμετρία,

δεν είναι δύσκολο να αντιληφθούμε ότι οι μαθητές φτάνουν στην Γ΄ Λυκείου έχοντας περιορισμένες και μονομερείς αντιλήψεις για την έννοια της αποδεικτικής διαδικασίας στα Μαθηματικά. Τη βελτίωση της κατάστασης δεν βοηθά βέβαια καθόλου το γεγονός ότι η διδασκαλία και μάθηση της θεωρίας στην τάξη αυτή εκφυλίζεται σε ζήτημα απομνημόνευσης και μηχανιστικής αναπαραγωγής. Οι μαθητές διδάσκονται πληθώρα «μεθοδολογικών» κανόνων και τεχνασμάτων, βάσει των οποίων γίνεται ομαδοποίηση των ασκήσεων σε κατηγορίες και ασκούνται εντατικά σε αυτή τη δραστηριότητα επιλύοντας θέματα αντίστοιχα με εκείνα των πανελλαδικών εξετάσεων. Αγνοούν όμως ταυτόχρονα και σε μεγάλο βαθμό τη σημασία ενός μαθηματικού ορισμού («ικανή και αναγκαία συνθήκη»), τη διάκριση ανάμεσα σε «ευθύ» και «αντίστροφο» θεώρημα, τη διαφορά «συνεπαγωγής» και «ισοδυναμίας».

Μέσα σε αυτό το πλαίσιο διδασκαλίας και μάθησης είναι φυσικά ουτοπικό να πιστεύει κανείς ότι το πρόβλημα μπορεί να αντιμετωπιστεί με την προσθήκη ορισμένων παραγράφων για την

αποδεικτική διαδικασία και τη μαθηματική λογική στα σχολικά βιβλία. Αυτό πίστευαν ίσως οι ιθύνοντες του Παιδαγωγικού Ινστιτούτου πριν μερικά χρόνια, όταν αποφάσισαν να εντάξουν τις ενότητες «Το λεξιλόγιο της Λογικής» και «Μέθοδοι απόδειξης» στο βιβλίο Άλγεβρας της Α΄ Λυκείου, αλλά καμιά ένδειξη βελτίωσης της κατάστασης δεν έχει καταγραφεί μέχρι σήμερα στα βαθμολογικά κέντρα. Όπως αναφέραμε και στην εισαγωγή, η διδασκαλία των Μαθηματικών σε όλο το φάσμα του Λυκείου (αν όχι νωρίτερα) χρειάζεται να κάνει συστηματική χρήση δραστηριοτήτων που συνδέονται με την αποδεικτική διαδικασία. Οι δραστηριότητες αυτές δεν είναι τυπικές ασκήσεις ή θέματα εξετάσεων, η επίλυση των οποίων επιδεικνύεται στον πίνακα από τον διδάσκοντα ή κάποιον επιμελή μαθητή. Απαιτούν αντίθετα τη δημιουργική συμμετοχή όλων των μαθητών, μέσα από κατάλληλα ερωτήματα που δημιουργούν ερευνητική προδιάθεση και καλλιεργούν το κλίμα συνεργασίας. Για το λόγο αυτό η συνέχεια της εισήγησης θα επικεντρωθεί στην ανάπτυξη και συζήτηση σχετικών παραδειγμάτων.

Μια δραστηριότητα για τις έννοιες της διάζευξης, σύζευξης και συνεπαγωγής

Να βρείτε <u>όλους</u> τους αριθμούς ν του συνόλου

$$A = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

που επαληθεύουν κάθε μια από τις ιδιότητες:

α) Ο ν είναι άρτιος

β) Ο ν είναι πρώτος

γ) Ο ν είναι άρτιος ή ο ν είναι πρώτος.

δ) Ο ν είναι άρτιος και ο ν + 1 είναι πρώτος.

ε) Αν ο ν είναι άρτιος, τότε ο ν + 1 είναι πρώτος.

Απάντηση

Αν συμβολίσουμε με Λ το ζητούμενο σύνολο των αριθμών του Α που επαληθεύουν την αντίστοιχη ιδιότητα, τότε θα είναι:

Ερώτηση (α): Ο ν είναι άρτιος $\Lambda = \{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20\}$

Ερώτηση (β): Ο ν είναι πρώτος $\Lambda = \{2, 3, 5, 7, 11, 13\ 17, 19\}$

Ερώτηση (γ): Ο ν είναι άρτιος ή ο ν είναι πρώτος

$$\Lambda = \{2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13, 14, 16, 17, 18, 19, 20\}$$

Ερώτηση (δ): Ο ν είναι άρτιος και ο ν + 1 είναι πρώτος

$$\Lambda = \{2, 4, 6, 10, 12, 16, 18\}$$

Ερώτηση (ε): Αν ο ν είναι άρτιος, τότε ο ν + 1 είναι πρώτος

$$\Lambda = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19\}$$

Λεπτομερή στοιχεία για την προέλευση, το θεωρητικό υπόβαθρο και τη διδακτική διαπραγμάτευση της προηγούμενης δραστηριότητας (ιδιαίτερα στο κρίσιμο βήμα της διάκρισης μεταξύ σύζευξης και συνεπαγωγής) υπάρχουν στα [10] και [11].

Μια δραστηριότητα για τη διαφορά ισοδυναμίας – συνεπαγωγής

Μια συνηθισμένη σχολική άσκηση:

Να λύσετε την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 < 0$

Στο Λύκειο χρησιμοποιούμε κάποια από τις στάνταρ διαδικασίες (παραγοντοποίηση, κατασκευή πίνακα προσήμων, πρόσημο τριωνύμου) και χωρίς να το αναφέρουμε, κάνουμε ουσιαστικά απόδειξη της ισοδυναμίας:

$x^2 - 3x + 2 < 0$ αν και μόνο αν $1 < x < 2$

Μια ασυνήθιστη σχολική άσκηση:

Να αποδείξετε ότι αν $x^2 - 3x + 2 < 0$, τότε $x > 0$

Πώς αντιμετωπίζουν μια τέτοια άσκηση οι μαθητές που έχουν διδαχθεί τη μελέτη του προσήμου ενός τριωνύμου $2^{ου}$ βαθμού;

Η διδασκαλία της προηγούμενης, ασυνήθιστης άσκησης σε μαθητές του Λυκείου (όχι μόνο της Α΄ τάξης) έχει δείξει τα εξής:

Οι μαθητές χρησιμοποιούν τη μεθοδολογία για το «πρόσημο του δευτεροβάθμιου τριωνύμου» και προσδιορίζουν το σύνολο λύσεων της ανίσωσης $x^2 - 3x + 2 < 0$ (δηλαδή $1 < x < 2$). Οι περισσότεροι όμως δυσκολεύονται να δεχθούν ότι έχουν αποδείξει το ζητούμενο συμπέρασμα (δηλαδή $x > 0$).

Είναι μάλιστα χαρακτηριστικό ότι πολλοί εξ' αυτών υποστηρίζουν ότι «η άσκηση είναι λάθος», και ότι η ορθή διατύπωση έπρεπε να είναι:

Να αποδείξετε ότι αν $x^2 - 3x + 2 < 0$, τότε $1 < x < 2$.

Στο ερώτημα «εξηγήστε γιατί η άσκηση είναι λάθος», η απάντηση των μαθητών έχει συχνά τη μορφή του ακόλουθου συλλογισμού:

Το συμπέρασμα $x > 0$ σημαίνει ότι μπορεί να είναι π.χ. $x = 3$. Για την τιμή αυτή όμως η υπόθεση $x^2 - 3x + 2 < 0$ γίνεται $2 < 0$ που είναι ψευδής.

Διαπιστώνουμε δηλαδή τη «φυσική» τάση των μαθητών να συνδέουν την αλήθεια μιας συνεπαγωγής αποκλειστικά με την αλήθεια της προκείμενης πρότασης.

Το συγκεκριμένο ζήτημα μας δίνει μια ευκαιρία να προκαλέσουμε συζήτηση σχετικά με τη διάκριση συνεπαγωγής και ισοδυναμίας.

Οι μαθητές που λύνουν την ανίσωση $x^2 - 3x + 2 < 0$ αποδεικνύουν ουσιαστικά την <u>ισοδυναμία</u>:

Για κάθε $x \in R$: $x^2 - 3x + 2 < 0$ αν και μόνο αν $1 < x < 2$ (1)

Αυτό που ζητήθηκε ήταν η απόδειξη της <u>συνεπαγωγής</u>:

Για κάθε $x \in R$: Αν $x^2 - 3x + 2 < 0$, τότε $x > 0$ (2)

Αν ήταν λιγότερο εθισμένοι στη μηχανική εφαρμογή αλγορίθμων και περισσότερο εξοικειωμένοι με τη λογική ανάλυση, οι μαθητές αυτοί θα μπορούσαν εύλογα να υποστηρίξουν ότι με την (1) έχουν αποδείξει περισσότερα από όσα τους ζητήθηκαν!

Το «αντιπαράδειγμα» $x = 3$ που χρησιμοποίησαν παραπάνω, αποδεικνύει ότι στην (2) δεν είναι αληθής η αντίστροφη πρόταση.

Μια δραστηριότητα για τις βασικές μεθόδους απόδειξης προτάσεων της μορφής «αν p, τότε q»

- Άμεση απόδειξη (*modus ponens*)
- Έμμεση απόδειξη (*modus tollens*)
- Απαγωγή σε άτοπο (*reductio ad absurdum*)

1ος τρόπος (άμεση απόδειξη)

Ο όρος *modus ponens* εκφράζει την αποδεικτική μέθοδο που χαρακτηρίζουμε ως «άμεση απόδειξη» μιας σύνθετης πρότασης της μορφής «αν p, τότε q».

Σχηματικά:

Από την: p αληθής (υπόθεση)

Και την: $p \Rightarrow q$ αληθής

Συμπεραίνουμε: q αληθής (συμπέρασμα)

Προφανώς δεν χρειάζεται να ασχοληθούμε με την περίπτωση που η p είναι ψευδής, επειδή τότε η συνεπαγωγή $p \Rightarrow q$ είναι εξ' ορισμού αληθής

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι αν $x^2 - 3x + 2 < 0$, τότε $x > 0$

Ξεκινώντας από την υπόθεση έχουμε διαδοχικά:

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΕΙΣ
Έστω ότι ισχύει $x^2 - 3x + 2 < 0$ (υπόθεση)	Προσθέτουμε το 3x στα δύο μέλη
$\Rightarrow$ $x^2 + 2 < 3x$	
$\Rightarrow$ $3x > x^2 + 2$	$x^2 \geq 0 \Rightarrow x^2 + 2 \geq 2$, Μεταβατική ιδιότητα
$\Rightarrow$ $3x > 2$	Πολλαπλασιάζουμε επί 1/3
$\Rightarrow$ $x > 2/3$	
$\Rightarrow$ $x > 0$ (συμπέρασμα)	Μεταβατική ιδιότητα

2ος τρόπος (έμμεση απόδειξη)

Ο όρος *modus tollens* εκφράζει την αποδεικτική μέθοδο που χαρακτηρίζουμε ως «έμμεση απόδειξη» μιας σύνθετης πρότασης της μορφής «αν p, τότε q».
Αντί της πρότασης «αν p, τότε q» αποδεικνύεται η ισοδύναμη, αντιθετοαντίστροφη πρόταση «αν ~q, τότε ~p» (όπου ~p και ~q οι αρνήσεις των προτάσεων p και q).
Σχηματικά:
Από την: ~q αληθής (άρνηση συμπεράσματος)
Και την: ~q ⇒ ~p αληθής
Συμπεραίνουμε: ~p αληθής (άρνηση υπόθεσης)

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι αν $x^2 - 3x + 2 < 0$, τότε $x > 0$
Ξεκινώντας από την άρνηση του συμπεράσματος έχουμε διαδοχικά:

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΕΙΣ
Έστω ότι ισχύει $x \leq 0$ (άρνηση του συμπεράσματος)	Μεταβατική ιδιότητα
$\Rightarrow$ $x \leq 1$ και $x \leq 2$	Ορισμός ανισότητας
$\Rightarrow$ $x - 1 \leq 0$ και $x - 2 \leq 0$	Γινόμενο αρνητικών
$\Rightarrow$ $(x - 1)(x - 2) \geq 0$	Επιμεριστική ιδιότητα
$\Rightarrow$ $x^2 - 3x + 2 \geq 0$ (άρνηση της υπόθεσης)	

3ος τρόπος (απαγωγή σε άτοπο)

Ο όρος *reductio ad absurdum* εκφράζει την αποδεικτική μέθοδο που χαρακτηρίζουμε ως απόδειξη μιας πρότασης της μορφής «αν p, τότε q» με «απαγωγή σε άτοπο».
Υποθέτουμε ότι τόσο η πρόταση p όσο και η άρνηση της πρότασης q είναι αληθείς και αναζητούμε μία αντίφαση.
Σχηματικά:
Από την: p αληθής (υπόθεση)
Και την: ~q αληθής
Συμπεραίνουμε: $(p \wedge \sim q) \Rightarrow (w \wedge \sim w)$ αληθής (αντίφαση)

Παράδειγμα: Να αποδείξετε ότι αν $x^2 - 3x + 2 < 0$, τότε $x > 0$
Ξεκινώντας από την υπόθεση και την άρνηση του συμπεράσματος έχουμε διαδοχικά:

ΜΕΤΑΣΧΗΜΑΤΙΣΜΟΙ	ΑΙΤΙΟΛΟΓΗΣΕΙΣ
Έστω ότι ισχύει $x^2 - 3x + 2 < 0$ και $x \leq 0$	Προσθέτουμε το 3x και το –2 στα δύο μέλη
$\Rightarrow x^2 < 3x - 2$ και $x \leq 0$	$x \leq 0 \Rightarrow 3x - 2 \leq -2$, Μεταβατική ιδιότητα
$\Rightarrow x^2 \leq -2$ (άτοπο)	Η ανισότητα $x^2 \leq -2$ βρίσκεται σε αντίφαση με την ανισότητα $x^2 \geq 0$ που ισχύει για κάθε $x \in R$

Δύο σημαντικές παρατηρήσεις

• Οι λατινικοί όροι *modus ponens*, *modus tollens* και *reductio ad absurdum* χρησιμοποιήθηκαν παραπάνω ως ονόματα για τις τρεις βασικές μεθόδους απόδειξης των προτάσεων της μορφής «αν p, τότε q».

Για την ακρίβεια, οι όροι αυτοί εκφράζουν τρεις βασικές «ταυτολογίες», δηλαδή σύνθετες λογικές προτάσεις που είναι πάντοτε αληθείς και αποδίδονται συμβολικά ως εξής:

$[p \wedge (p \Rightarrow q)] \Rightarrow q$ *modus ponens*

$[\sim q \wedge (\sim q \Rightarrow \sim p)] \Rightarrow \sim p$ *modus tollens*

$(p \Rightarrow q) \Leftrightarrow [(\sim q \wedge p) \Rightarrow (w \wedge \sim w)]$ *reductio ad absurdum*

• Η έμμεση απόδειξη με χρήση της αντιθετοαντίστροφης και η απόδειξη με απαγωγή σε άτοπο έχουν κοινό χαρακτηριστικό ότι χρησιμοποιούν ως υπόθεση την άρνηση του συμπεράσματος.

Είναι όμως δύο διαφορετικές μέθοδοι *έμμεσης* απόδειξης (*έμμεσης* με την έννοια ότι δεν συνάγεται *άμεσα* το ζητούμενο συμπέρασμα).

Στην πρώτη περίπτωση, από την άρνηση του συμπεράσματος συνάγεται η άρνηση της υπόθεσης

Στη δεύτερη περίπτωση, από την υπόθεση και την άρνηση του συμπεράσματος συνάγεται μια νέα πρόταση που αποτελεί αντίφαση.

Μια δραστηριότητα που επιχειρεί να δώσει απάντηση στο ερώτημα:
Πόσα τυχαία τρίγωνα υπάρχουν;

Για να εξαχθεί ένα έγκυρο μαθηματικό αποτέλεσμα, θα πρέπει να αναφέρεται σε έννοιες που προσδιορίζονται με σαφή και μονοσήμαντο τρόπο, δηλαδή με χρήση αξιωμάτων που περιγράφουν τις θεμελιώδεις ιδιότητές τους.

Ένα σύστημα αξιωμάτων, με το οποίο τυποποιούνται ορισμένες εμπειρικές παραδοχές σχετικά με την έννοια «τυχαίο τρίγωνο»:

Αξίωμα Ι: Το τρίγωνο δεν είναι ισοσκελές

Αξίωμα ΙΙ: Το τρίγωνο δεν είναι ορθογώνιο

Αξίωμα ΙΙΙ: Δύο γωνίες που διαφέρουν λιγότερο από 15° θεωρούνται ίσες

Με αυτά τα αξιώματα αποδεικνύεται το ακόλουθο αξιοσημείωτο θεώρημα:

Υπάρχει ένα μόνο (εξαιρουμένων των ομοίων προς αυτό) τυχαίο οξυγώνιο τρίγωνο, συγκεκριμένα το τρίγωνο που έχει γωνίες 45°, 60° και 75°.

Απόδειξη

Έστω τρίγωνο ΑΒΓ με γωνίες $\Gamma < B < A < 90^o$.

Επειδή η Α διαφέρει από τις 90° τουλάχιστον 15° θα ισχύει:

$$A = 90 - (15 + x) = 75 - x, \text{ με } x \geq 0.$$

Επειδή η Β διαφέρει από την Α τουλάχιστον 15°, θα ισχύει:

$$B = 75 - x - (15 + y) = 60 - x - y, \text{ με } y \geq 0.$$

Επειδή η Γ διαφέρει από την Β τουλάχιστον 15°, θα ισχύει:

$$\Gamma = 60 - x - y - (15 + z) = 45 - x - y - z, \text{ με } z \geq 0.$$

Άρα, έχουμε: $75 - x + 60 - x - y + 45 - x - y - z = 180 \Leftrightarrow 3x + 2y + z = 0$

Επειδή οι x, y, z είναι μη αρνητικοί, έπεται ότι $x = y = z = 0$.

Άρα οι γωνίες του τριγώνου είναι: $A = 75^o$, $B = 60^o$, $\Gamma = 45^o$.

Βιβλιογραφία

[1] Chemla K. [Ed.]: *The History of Mathematical Proof in Ancient Traditions*. Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[2] Hadamard J.: *Η Ψυχολογία της Επινόησης στα Μαθηματικά* (μετάφραση Σ. Ζαχαρίου). Κάτοπτρο, Αθήνα, 1995.

[3] Lin F.-L., Hsieh F.-J., Hanna G. & de Villiers M. [Eds.]: *Proceedings of the ICMI Study 19 conference: Proof and Proving in Mathematics Education*. Volume 1 & 2. The Department of Mathematics, National Taiwan Normal University, Taipei, 2009.

[4] Mariotti M.-A. & Balacheff N: Special Issue on Didactical and Epistemological Perspectives on Mathematical Proof. *ZDM Mathematics Education* 40, 2008.

[5] Θωμαΐδης Γ.: Μαθηματική απόδειξη και κριτική σκέψη στη διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας: Θεωρητικό πλαίσιο και περιεχόμενο μιας έρευνας στην Α΄ Λυκείου. Στο Δ. Χασάπης [Επιμ.] *Πρακτικά 2ου Διημέρου Διαλόγου για τη Διδασκαλία των Μαθηματικών*: *Το επιχείρημα και η απόδειξη στα σχολικά Μαθηματικά*, 147–158. Παιδαγωγικό Τμήμα Δημοτικής Εκπαίδευσης Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη, 2003.

[6] Θωμαΐδης Γ.: Τα θέματα των εξετάσεων, η μαθηματική απόδειξη και η διδασκαλία των Μαθηματικών. *Απολλώνιος* 4, 28–48, 2004.

[7] Θωμαΐδης Γ.: Μαθηματική απόδειξη, κοινή λογική και κριτική σκέψη. Στο Ε. Δημητριάδου [Επιμ.] *Πρακτικά 2ης Επιμορφωτικής Ημερίδας Διδακτικής Μαθηματικών*, 45–62. Παράρτημα Ε.Μ.Ε. και Σχολική Σύμβουλος Μαθηματικών Νομού Ιωαννίνων. Ιωάννινα, 2005.

[8] Θωμαΐδης Γ. & Τζανάκης Κ.: Ανάγνωση ιστορικών κειμένων και συζητήσεις για την έννοια της απόδειξης σε μια διαθεματική προσέγγιση της Ευκλείδειας Γεωμετρίας. Στο Γ. Θωμαΐδης, Ν. Καστάνης & Κ. Τζανάκης [Επιμ.] *Ιστορία και Μαθηματική Εκπαίδευση*, 253–270. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2006.

[9] Θωμαΐδης Γ.: *Μαθηματικά & Εξετάσεις*. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2009.

[10] Θωμαΐδης Γ.: Λογική και Διδακτική στην Άλγεβρα της Α΄ Λυκείου. *Ευκλείδης Γ΄* 73, 102–121, 2010.

[11] Θωμαΐδης Γ.: Η διδασκαλία της λογικής και της απόδειξης στο Λύκειο. Στο Επιστημονική Ένωση για τη Διδακτική των Μαθηματικών [Επιμ.] *Η Άλγεβρα και η Διδακτική της στη Σύγχρονη Εκπαίδευση*, 115–144. Εκδόσεις Ζήτη, Θεσσαλονίκη, 2011.

[12] Θωμαΐδης Γ.: Η επίδραση των θεμάτων των πανελλαδικών εξετάσεων στη διδασκαλία των Μαθηματικών Γυμνασίου – Λυκείου. Εισήγηση στην ημερίδα με θέμα *Διδασκαλία των Μαθηματικών και Πανελλαδικές Εξετάσεις: Προβληματισμοί και Προοπτικές.* (Ελληνογαλλική Σχολή Καλαμαρί, Θεσσαλονίκη 13–4–2013). Διαθέσιμη στο δικτυακό τόπο:
http://www.kalamari.gr/el/component/content/article/230-3hmeridamathimatikwn.html

[13] Θωμαΐδης Γ.: Διδακτικά εμπόδια στην κατανόηση της μαθηματικής απόδειξης από μαθητές του Λυκείου. Εισήγηση στην ημερίδα με θέμα *Διδακτική των Μαθηματικών, σχολικές αναγκαιότητες και πανεπιστημιακές δυνατότητες* (Τμήμα Μαθηματικών Α.Π.Θ., Θεσσαλονίκη 19–5–2014). Διαθέσιμη στο δικτυακό τόπο:
https://www.youtube.com/watch?v=rOc6N4scdq8

[14] Θωμαΐδης Γ.: Η μαθηματική απόδειξη ως πρόβλημα διδασκαλίας και μάθησης. Διάλεξη στο Παράρτημα Ε.Μ.Ε. Κέρκυρας (Κέρκυρα 20–11–2015:). Διαθέσιμη στο δικτυακό τόπο:
https://www.youtube.com/watch?v=kqBqhkoP31g (1° μέρος)
https://www.youtube.com/watch?v=NfhNfx3skO0 (2° μέρος)

ΣΥΝΕΧΗΣ & ΟΥΣΙΑΣΤΙΚΗ ΥΠΟΣΤΗΡΙΞΗ
για όλους όσοι βρίσκονται στο σχολείο ή στο φροντιστήριο.

ΝΕΕΣ συνθέσεις Προτεινόμενων θεμάτων για τις **ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ**
θα αναρτώνται στην ιστοσελίδα μας μέχρι και την **παραμονή των εξετάσεων!**

www.kandylas.eu

ΚΑΝΔΥΛΑΣ
ΕΚΔΟΣΕΙΣ

info@kandylas.eu **www.kandylas.eu**

Αιολίας 18, Νέα Κρήνη
55 132 Θεσσαλονίκη
Τηλ.: 6978 480120